TD 4

Nombres complexes - La base

LES INCONTOURNABLES

Calcul algébrique complexe

Exercice 1 : [corrigé] On pose $z_1 = -(\sqrt{3}+i)$ et $z_2 = 1+i$.

1. Mettre $\frac{z_1}{z_2}$ sous forme trigonométrique, puis sous forme algébrique.
2. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.

Exercice 2 : [solutions]
Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

(a) $e^{\frac{2013i\pi}{6}}$; (b) $-e^{\frac{50i\pi}{4}}$; (c) $(1+i)^{22}(1-\sqrt{3}i)^{18}$; (d) $\dfrac{(1+i)^{45}}{(1-i)^{31}}$; (e) $(1+i)^{47}+(1-i)^{47}$.

Exercice 3 : [solutions] Donner le module et un argument des nombres complexes suivants :

(a) $-\sqrt{3}+i$; (b) $-1-i$; (c) $1-i\sqrt{3}$; (d) $-3e^{7i\pi/8}$; (e) $2ie^{i\pi/3}$; (f) $\dfrac{(\sqrt{3}-i)^4}{1+i}$.

Exercice 4 : [indications] [corrigé] Montrer que : $\forall x \neq \pi\ [2\pi],\ \dfrac{1-\cos(x)-i\sin(x)}{1+\cos(x)+i\sin(x)} = -i\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

Exercice 5 : [indications] [corrigé] Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ (i+1)^n+(i-1)^n = 2^{\frac{n}{2}+1}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) i^n$.

Exercice 6 : [indications] Démontrer :

1. la <u>formule du parallélogramme</u> : $\forall z, z' \in \mathbb{C},\ |z+z'|^2+|z-z'|^2 = 2(|z|^2+|z'|^2)$;
2. puis l'inégalité : $\forall z, z' \in \mathbb{C},\ |z|+|z'| \leq |z+z'|+|z-z'|$.

Nombres complexes et trigonométrie

Exercice 7 : [solutions] Linéariser les expressions suivantes :

$$\text{(a) } \cos^5(x);\ \text{(b) } \sin^3(x)\cos^3(x).$$

Pour cela, on admet que : $(x+y)^5 = x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$.

Exercice 8 : [indications] [corrigé]

1. Exprimer $\cos(5\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ uniquement.
2. En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ est solution de l'équation : $16x^4-20x^2+5=0$.
3. Résoudre l'équation précédente et en déduire une expression de $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

Exercice 9 : [solutions] Résoudre l'équation : $3\sin(x)-\sqrt{3}\cos(x) = \sqrt{6}$.

POUR S'ENTRAÎNER

Calcul algébrique complexe

Exercice 10 : [solutions] Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$$\text{(a) } \overline{(1+2i)(3-5i)}\,; \quad \text{(b) } \frac{3+i}{2-i}+\frac{2-i}{3+i}\,; \quad \text{(c) } \frac{i+5}{(i+3)^2}\,; \quad \text{(d) } \left(\frac{2-3i}{1+7i}\right)^2; \quad \text{(e) } \left(\frac{(2+4i)^2}{\overline{1-i}}\right)^{-1}.$$

Exercice 11 : [solutions] Pour $a \in \mathbb{R}$, donner l'écriture trigonométrique de chacun des nombres complexes suivants :

(a) $z_1 = \cos(a) - i\sin(a)$; (b) $z_2 = -\cos(a) + i\sin(a)$; (c) $z_3 = -\cos(a) - i\sin(a)$;

(d) $z_4 = -\sin(a) + i\cos(a)$; (e) $z_5 = \sin(a) + i\cos(a)$; (f) $z_6 = -\sin(a) - i\cos(a)$.

Exercice 12 : [solutions]
Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$\text{(a) } -3e^{3i\pi/4}\,; \quad \text{(b) } (1+i)^{17}(\sqrt{3}-i)^{13}\,; \quad \text{(c) } \frac{1-i}{\sqrt{3}+i}\,; \quad \text{(d) } \frac{1-\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-i}\,; \quad \text{(e) } \frac{(\sqrt{3}-i)^{17}}{(-1+i\sqrt{3})^{31}}.$$

Exercice 13 : [corrigé] Déterminer les nombres complexes z de module 1 tels que $\left(\dfrac{z}{z-1}\right)^3 \in \mathbb{R}$.

Exercice 14 : Soit z un nombre complexe non nul.

1. Montrer que z et $\dfrac{1}{z}$ ont même module si et seulement si z est sur le cercle unité.
2. En déduire l'ensemble des nombres complexes z tels que z, $\dfrac{1}{z}$ et $1-z$ aient le même module.

Exercice 15 : Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} - \{1\}$ tel que $|z| \leq 1$, on a : $\mathcal{R}e\left(\dfrac{1}{1-z}\right) \geq \frac{1}{2}$.

Exercice 16 : Soient z et z' deux nombres complexes. Montrer que $|z+z'| = |z-z'|$ si et seulement si $\arg(z) \equiv \arg(z') + \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$.

Exercice 17 : Soit z un nombre complexe tel que : $|z| < 1$. Montrer que $\left|\dfrac{1}{1-z}\right| < \dfrac{1}{1-|z|}$.

Exercice 18 : Soient $(x;\ y;\ z) \in \mathbb{R}^3$ tels que : $e^{ix}+e^{iy}+e^{iz}=0$. Montrer que : $e^{2ix}+e^{2iy}+e^{2iz}=0$.

Exercice 19 : Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| < 1$.

1. Démontrer que, pour tout nombre complexe z tel que $1-\overline{a}z \neq 0$:

$$1-\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|^2 = \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\overline{a}z|^2}.$$

2. En déduire que $|z| < 1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| < 1$.

Exercice 20 : Soient $(u, v, w) \in \mathbb{U}^3$.

1. Montrer que $\left|\dfrac{1}{u} + \dfrac{1}{v} + \dfrac{1}{w}\right| = |u + v + w|$.
2. En déduire $|uv + vw + uw| = |u + v + w|$.

Nombres complexes et trigonométrie

Exercice 21 : [solutions] Linéariser les expressions suivantes :

$$\text{(a)}\ \cos(x)\sin^2(x); \ \text{(b)}\ \sin^4(2x)\cos^2(x).$$

Pour cela, on admet que $(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$.

Exercice 22 : [solutions] Résoudre les équations trigonométriques suivantes :

$$\text{(a)}\ \sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) = \sqrt{2}; \quad \text{(b)}\ \tfrac{\sqrt{3}}{3}\cos(x) + \sin(x) = -\tfrac{2}{\sqrt{3}}.$$

DIVERS

Exercice 23 : On dit qu'un entier N est somme de deux carrés si il existe deux entiers a et b tels que $N = a^2 + b^2$.

1. python Écrire un algorithme en langage Python qui demande à l'utilisateur un entier N et qui indique si N est une somme de deux carrés ou ne l'est pas.
2. Tester votre procédure sur $25, 30, 313$ puis finalement sur 25×313. Que remarque-t-on sur ce dernier produit ?
3. L'objectif est donc de démontrer qu'un produit de deux nombres sommes de deux carrés est encore un nombre somme de deux carrés. On prend $N = a^2 + b^2$ et $N' = c^2 + d^2$ avec a, b, c, d des entiers. En remarquant que N est le module d'un nombre complexe z ainsi que N' , démontrer le résultat.

Indications

Exercice 4 : Factoriser par l'angle moitié le numérateur et le dénominateur.

Exercice 5 : Mettre sous forme exponentielle les deux termes de la somme pour obtenir une expression de la forme $e^{i\theta}+e^{i\theta'}$. Dans un deuxième temps, on remarque que $e^{i\theta}+e^{i\theta'}=e^{i\theta}(1+e^{i\alpha})$, avec $\alpha=\theta'-\theta$. On peut alors factoriser par l'angle moitié.

Exercice 6 :
1. Utiliser $|z|^2=z\overline{z}$
2. Élever au carré.

Exercice 8 :
1. On délinéarise l'expression.
2. D'après précédemment, $16\cos(\theta)^5-20\cos(\theta)^3+5\cos(\theta)=\cos(5\theta)$, donc pour $\theta=\frac{\pi}{10}$ et $x=\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$, cela donne ...
3. $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ est une des quatre solutions de l'équation précédente. Il s'agit d'une équation bicarrée dont on sait obtenir une expression des solutions avec des radicaux. Une seule de ces quatre expressions est comprise entre 0 et $\frac{1}{2}$.

Solution de l'exercice 2 :

(a) $-i$, (b) $-i$, (c) $-2^{29}i$, (d) -2^7, (e) 2^{24}.

Solution de l'exercice 3 :

(a) $|z|=2$, $\arg(z)=\frac{5\pi}{6}\ [2\pi]$, (b) $|z|=\sqrt{2}$, $\arg(z)=\frac{5\pi}{4}\ [2\pi]$, (c) $|z|=2$, $\arg(z)=-\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$, (d) $|z|=3$, $\arg(z)=\frac{15\pi}{8}\ [2\pi]$, (e) $|z|=2$, $\arg(z)=\frac{5\pi}{6}\ [2\pi]$, (f) $|z|=8\sqrt{2}$, $\arg(z)=-\frac{11\pi}{12}\ [2\pi]$.

Solution de l'exercice 7 :

(a) $\cos^5(x)=\frac{1}{16}\cos(5x)+\frac{5}{16}\cos(3x)+\frac{5}{8}\cos(x)$, (b) $\sin^3(x)\cos^3(x)=-\frac{1}{32}\sin(6x)+\frac{3}{32}\sin(2x)$,

Solution de l'exercice 9 :

$S=\left\{\frac{11\pi}{12}\ [2\pi];\ \frac{5\pi}{12}\ [2\pi]\right\}$.

Solution de l'exercice 10 :

(a) $13-i$, (b) $\frac{3}{2}+\frac{i}{2}$, (c) $\frac{23}{50}-\frac{11}{50}i$, (d) $\frac{18+161,5i}{625}$, (e) $\frac{1}{100}-\frac{7}{100}i$.

Solution de l'exercice 11 :

(a) $z_1=e^{-ia}$, (b) $z_2=e^{i(\pi-a)}$, (c) $z_3=e^{i(\pi+a)}$, (d) $z_4=e^{i\left(\frac{\pi}{2}+a\right)}$, (e) $z_5=e^{i\left(\frac{\pi}{2}-a\right)}$, (f) $z_6=e^{i\left(-\frac{\pi}{2}-a\right)}$.

Solution de l'exercice 12 :

(a) $3e^{i7\pi/4}$, (b) $\sqrt{2}2^{21}exp(i\pi/12)$, (c) $\frac{\sqrt{2}}{2}exp(-i5\pi/12)$, (d) $exp(-i\pi/6)$, (e) $\frac{1}{2^{14}}e^{i\pi/2}$.

Solution de l'exercice 21 :

(a) $\cos(x)\sin^2(x)=\frac{1}{4}\cos(x)-\frac{1}{4}\cos(3x)$ (b) $\sin^4(2x)\cos^2(x)=\frac{1}{32}\cos(10x)+\frac{1}{16}\cos(8x)-\frac{3}{32}\cos(6x)-\frac{1}{4}\cos(4x)+\frac{1}{16}\cos(2x)+\frac{3}{16}$.

Solution de l'exercice 22 :

(b) $S=\left\{\frac{4\pi}{3}\ [2\pi]\right\}$.

Correction de l'exercice 1 :

1. $z_1=2e^{i7\pi/6}$, $z_2=\sqrt{2}e^{i\pi/4}$. Par propriété, $\frac{z_1}{z_2}=\frac{2e^{i7\pi/6}}{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}=\sqrt{2}e^{i11\pi/12}$. Puis

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{-(\sqrt{3}+i)}{(1+i)}\\ &= \frac{-(\sqrt{3}+i)(1-i)}{2}\\ &= \frac{-\left((\sqrt{3}+1)+i(1-\sqrt{3})\right)}{2}\\ &= \boxed{-\frac{(\sqrt{3}+1)}{2}+i\frac{\sqrt{3}-1}{2}}\end{aligned}$$

2. On utilise que

$$\sqrt{2}e^{i11\pi/12}=-\frac{(\sqrt{3}+1)}{2}+i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, nous obtenons :

$$\sqrt{2}\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)=-\frac{\sqrt{3}+1}{2}\Leftrightarrow\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)=-\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

et

$$\sqrt{2}\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\Leftrightarrow\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

Correction de l'exercice 4 :

D'une part, $1-\cos(x)-i\sin(x)=1-e^{ix}=e^{ix/2}\left(e^{-ix/2}-e^{ix/2}\right)=-2i\sin(x/2)e^{ix/2}$. D'autre part, $1+\cos(x)+i\sin(x)=1+e^{ix}=e^{ix/2}\left(e^{-ix/2}+e^{ix/2}\right)=2\cos(x/2)e^{ix/2}$. Finalement,

$$\frac{1-\cos(x)-i\sin(x)}{1+\cos(x)+i\sin(x)}=\frac{-2i\sin(x/2)e^{ix/2}}{2\cos(x/2)e^{ix/2}}=-i\tan(x/2)$$

Correction de l'exercice 5 :

Remarquons que $1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $i-1=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$. Finalement,

$$\begin{aligned}(i+1)^n+(i-1)^n &= (\sqrt{2})^n\left(e^{i\frac{\pi n}{4}}+e^{i\frac{3\pi n}{4}}\right)\\ &= (\sqrt{2})^n e^{i\frac{2\pi n}{4}}\left(e^{-i\frac{\pi n}{4}}+e^{i\frac{\pi n}{4}}\right)\\ &= (\sqrt{2})^n i^n\times 2\times\cos(n\tfrac{\pi}{4})\\ &= 2^{\frac{n}{2}+1}\cos\left(\tfrac{n\pi}{4}\right)i^n\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 8 :

1. On suit les étapes d'une délinéarisation :

$$\begin{aligned}\cos(5\theta) &= Re(e^{i5\theta})\\ &= Re([\cos(\theta)+i\sin(\theta)]^5)\\ &= Re([cos^5(\theta)+5i\cos^4(\theta)\sin(\theta)\\ &\quad +10i^2\cos^3(\theta)\sin^2(\theta)+10i^3\cos^2(\theta)\sin^3(\theta)\\ &\quad +5i^4\cos(\theta)\sin^4(\theta)+i^5\sin^5(\theta)])\\ &= \cos^5(\theta)-10\cos^3(\theta)\sin^2(\theta)+5\cos(\theta)\sin^4(\theta)\\ &= \cos^5(\theta)-10\cos^3(\theta)(1-\cos^2(\theta))\\ &\quad +5\cos(\theta)[1-\cos^2(\theta)]^2\\ &= (1+10+5)\cos^5(\theta)-20\cos^3(\theta)+5\cos(\theta)\\ &= 16\cos^5(\theta)-20\cos^3(\theta)+5\cos(\theta)\end{aligned}$$

2. Remarquons que $\cos(5\frac{\pi}{10})=0$. Par l'égalité précédente, $\frac{\pi}{10}$ est donc solution de l'équation $16\cos^5(\theta)-20\cos^3(\theta)+5\cos(\theta)=0$. De plus, $\cos(\frac{\pi}{10})\neq 0$. Par conséquent, $\frac{\pi}{10}$ est solution de $16\cos^4(\theta)-20\cos^2(\theta)+5=0$.
3. Les solutions de $16X^2-20X+5=0$ sont
$$\frac{20\pm\sqrt{80}}{2\times 16}=\frac{5\pm\sqrt{5}}{8}$$
Elles sont toutes les deux positives. Les solutions de $16X^4-20X^2+5=0$ sont
$$\pm\sqrt{\frac{5\pm\sqrt{5}}{8}}$$
Le nombre $\cos(\frac{\pi}{10})$ est positif et supérieur à $\sqrt{3}/2$. Il est donc égal à $\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$

Correction de l'exercice 13 :

Puisque z est de module 1 alors il a pour forme trigonométrique $e^{i\theta},\theta\neq 0[2\pi]$. Transformons l'expression de Z.

$$\begin{aligned}Z &= \left(\frac{z(\overline{z}-1)}{|z-1|^2}\right)^3\\ &= \left(\frac{e^{i\theta}(e^{-i\theta}-1)}{|z-1|^2}\right)^3\\ &= \left(\frac{e^{i\theta}\times e^{-i\theta/2}\times(e^{-i\theta/2}-e^{i\theta/2})}{|z-1|^2}\right)^3\\ &= \left(\frac{e^{i\theta/2}\times(-2i\sin(\theta/2))}{|z-1|^2}\right)^3\\ &= e^{3i\theta/2+i\frac{3\pi}{2}}\times\left(\frac{-2\sin(\theta/2)}{|z-1|^2}\right)^3\end{aligned}$$

Ainsi, $Z\in\mathbb{R}$ si et seulement si $3\theta/2+\frac{3\pi}{2}=0[\pi]$ ce qui équivaut à $\theta=-\pi[\frac{2\pi}{3}]=\frac{\pi}{3}[\frac{2\pi}{3}]$. L'ensemble des solutions est
$$\{e^{i\frac{\pi}{3}};e^{i\pi};e^{i\frac{5\pi}{3}}\}$$

[1] Girolamo Cardano (Pavie, 24 septembre 1501 - Rome, 21 septembre 1576), parfois nommé Gerolamo Cardano, Hieronymus Cardanus en latin ou encore Jérôme Cardan en français, est un mathématicien, un philosophe, un astrologue, un inventeur, et un médecin italien.

On lui attribue quelques découvertes en physique, en chimie et en mathématiques. Entre autres, il fut le premier à introduire des idées générales à la théorie des équations algébriques. Sa méthode de résolution des équations du troisième degré eut pour conséquence l'émergence des nombres imaginaires, qui deviendront nos nombres complexes au XIXe siècle (Méthode de Cardan).

Son nom est également associé à une méthode de stéganographie utilisant une grille à trous masquant une partie d'un texte pour révéler les mots utiles. Elle deviendra plus tard une méthode de cryptographie quand la grille pourra être déplacée d'un quart de tour (technique utilisée, par exemple, dans le roman Mathias Sandorf de Jules Verne).

Cardan a donné son nom à un système mécanique permettant le gyroscope libre et ayant donné naissance au joint de transmission. La découverte figure dans le De subtitilate. Robert Hooke, au XVIIe siècle, perfectionna ce mécanisme pour réaliser un joint brisé, dit aussi joint universel.

Il a avancé le premier exposé du calcul des probabilités (Liber de ludo aleae).

⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆

1. Source : Wikipedia