TD 11

Nombres entiers, rationnels et réels

LES INCONTOURNABLES

Exercice 1 : On considère $a > -1$. Montrer que pour tout entier naturel n, $(1+a)^n \geq 1 + na$.

Exercice 2 : Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq p$, $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

Exercice 3 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $u_0 \in [0;\ 1]$, $u_1 \in [0;\ 1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{1}{5}(2u_{n+1} + 3u_n)$. Montrer que pour tout entier naturel n : $u_n \in [0;\ 1]$.

Exercice 4 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{3}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}$. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n$.

Exercice 5 : [corrigé] Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que :

1. 7 divise $3^{2n+1} + 2^{n+2}$.
2. $3^{3n+3} - 26n - 27$ est divisible par 169.

Exercice 6 : [corrigé]

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{n(n+1)}{2}$ est un nombre entier.
2. En déduire que le carré d'un nombre impair est de la forme $8k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 7 : [corrigé] **(Critère de divisibilité par 3 ou 9)**

Soient $m; n \in \mathbb{N}$ et $m = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} m_k 10^k$ avec $\forall k \in [\![0;\ n]\!],\ 0 \leq m_k \leq 9$. On pose : $N = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} m_k$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 9 | 10^n - 1$ On pourra utiliser une identité remarquable !
2. En déduire que $9 | m - N$.
3. Montrer alors que 3 divise m si et seulement si 3 divise N.
4. De même, montrer que 9 divise m si et seulement si 9 divise N.

Exercice 8 : [corrigé] Montrer que la somme d'un nombre rationnel avec un nombre irrationnel est un nombre irrationnel. *(On pourra raisonner par l'absurde).*

Exercice 9 : Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculer $\mathrm{pgcd}(4p+3, 3p+2)$.

Exercice 10 : Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\left\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

POUR S'ENTRAÎNER

Exercice 11 : Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Exercice 12 : Soit (U_n) telle que : $U_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} U_k$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = 2^n$.

Exercice 13 : Soit (u_n) telle que $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}$. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geq 3^{n-2}$.

Exercice 14 : Démontrer que tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ peut s'écrire comme une somme de puissances de 2 toutes différentes.

Exercice 15 : Soit (u_n) telle que : $u_1 = 3$ et $\forall n \geq 1,\ u_{n+1} = \displaystyle\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n = 3n$.

Exercice 16 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer par récurrence forte qu'il existe $(p, q) \in \mathbb{N}$ tels que $n = 2^p(2q+1)$.

Exercice 17 : Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Montrer par récurrence forte sur n qu'il existe $(q, r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ n = qd + r$ avec $0 \leq r < d$.

Exercice 18 : On suppose que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. On veut aboutir à une contradiction. Soit $A = \left\{n \in \mathbb{N}^* \ / \ n\sqrt{2} \in \mathbb{N}\right\}$.

1. Montrer que A est non vide.
2. Notons $n_0 \in \mathbb{N}^*$ le minimum de A. Montrer que $n_0(\sqrt{2}-1) \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que $n_0(\sqrt{2}-1)\sqrt{2} \in \mathbb{N}$. Conclure.

Exercice 19 : [indications] Montrer que $\left(1+\sqrt{5}\right)^n + \left(1-\sqrt{5}\right)^n$ est un entier pair, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 20 : Montrer que pour tout entier naturel n, 2 puis 6 divisent $n(n+1)(n+2)$.

Exercice 21 : [corrigé] python *D'après Banque PT, oral Mathématiques et Algorithmiques.*

1. Soit l'entier $n = 1234$. Quel est le quotient, noté q, de la division euclidienne de n par 10 ? Quel est le reste ? Que se passe-t-il si on recommence la division par 10 à partir de q ?
2. Écrire un programme avec en entrée un entier n et en sortie la somme des cubes des chiffres de cet entier.

Exercice 22 : [corrigé] **(Critère de divisibilité par 11)**
Soient $m;n \in \mathbb{N}$ et $m = \sum_{k=0}^{n} m_k 10^k$ avec $m_0, \cdots, m_n \in \{0;\cdots;9\}$ son écriture en base 10. On pose : $N = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i m_i$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $11|10^n - (-1)^n$.
2. En déduire que 11 divise m si et seulement si 11 divise N.

Exercice 23 : [corrigé] python Soit n un entier naturel, q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de n par 10.

1. Vérifier que $10q + r = 7(q + r) + 3(q - 2r)$.
2. Démontrer alors que : n est multiple de 7 si et seulement si $q - 2r$ est multiple de 7.
3. En déduire un **algorithme** pour déterminer en calcul mental si un entier est multiple de 7. Le traduire en langage Python.
4. Appliquer cet algorithme aux entiers $84, 315, 1\ 890$.

Exercice 24 : [corrigé] Calculer le pgcd puis le ppcm des nombres suivants :

1. 84 et 90
2. 364 et 495
3. $2\ 613\ 600$ et $4\ 306\ 500$.
4. $n!$ et $(n+1)!$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 25 : [corrigé]
Soit a, b, c trois entiers naturels.

1. Si $c \mid ab$, a-t-on $c \mid a$ ou $c \mid b$?
2. On suppose que a et c sont premiers entre eux. Démontrer que si $c \mid ab$ alors $c \mid b$.

Exercice 26 : [corrigé] (*) **(Nombres de Mersenne)** Soit a un nombre entier supérieur ou égal à 2.

1. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $(a-1)|(a^N - 1)$. On pourra factoriser $a^N - 1$ par $a - 1$.
2. En déduire que : si $a^n - 1$ est premier avec $n \geq 2$, alors $a = 2$ et n est premier.
3. Donner quatre nombres premiers de cette forme.
4. Un nombre est dit parfait si la somme de ses diviseurs autres que lui-même est égale à lui même. Démontrer que si $m = 2^n - 1$ est premier, alors $2^{n-1}m$ est parfait.

Exercice 27 : (**) Soit p un nombre premier.

(Q 1) Montrer que pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, $p\binom{p-1}{k-1} = k\binom{p}{k}$

(Q 2) En déduire que, pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, p divise $\binom{p}{k}$. On pourra utiliser l'exercice 25.

(Q 3) Montrer par récurrence que pour tout entier n, $n^p - n$ est divisible par p.

(Q 4) En déduire que si n n'est pas divisible par p alors p divise $n^{p-1} - 1$.

Exercice 28 : Montrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 29 : [corrigé] Démontrer que l'équation $x^3 + x - 1 = 0$ admet une et une seule solution dans $\mathbb{R}$, puis que cette solution est irrationnelle.

Exercice 30 : On considère les ensembles des nombres suivants :

- $A =]0;4] \cup \{5\} \cup [7;+\infty[$
- $B = \left\{1 + \dfrac{1}{n} ; n \in \mathbb{N}^*\right\}$
- $C = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N}^*\right\}$

Pour chaque ensemble, étudier s'il est majoré dans $\mathbb{R}$? minoré dans $\mathbb{R}$? Précisez les bornes supérieures et inférieures si elles existent, le maximum, le minimum si ils existent.

Exercice 31 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$. Montrer que $A = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$ est borné.

Exercice 32 : [corrigé] (**) Soit $f : [0;1] \to [0;1]$ une fonction croissante.
On veut montrer que f a un **point fixe** i.e. qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$.
Pour cela on pose $E = \{x \in [0;1] \ / \ f(x) \geq x\}$.

1. Montrer que E admet une borne supérieure notée α qui est dans $[0;1]$.
2. Montrer que $f(\alpha)$ est un majorant de E ; en déduire que $f(\alpha) \geq \alpha$.
3. En déduire que $f(\alpha) \in E$ et conclure que $f(\alpha) = \alpha$.

Exercice 33 : [corrigé] Résoudre dans $\mathbb{R}$,

1. $\lfloor x \rfloor = 3$
2. $\lfloor x \rfloor = \lfloor 4 - x \rfloor$.
3. $\lfloor 2x + 1 \rfloor = \lfloor x + 4 \rfloor$

Exercice 34 :

1. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lfloor x_i \rfloor \leq \lfloor \sum_{i=1}^{n} x_i \rfloor$.

Indications

Exercice 19 : On peut utiliser deux fois le binôme de Newton.

Correction de l'exercice 5 :

On montre par récurrence que $\mathcal{P}_n$: "7 divise $3^{2n+1}+2^{n+2}$" est vraie pour tout entier n.

— Initialisation. Pour $n=0, 3^{2n+1}+2^{n+2}=7$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

— Hérédité. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie ($n \in \mathbb{N}$.) Alors

$$3^{2[n+1]+1}+2^{[n+1]+2} = 3^{2n+1}\times 9+2\times 2^{n+2} = 7\times 3^{2n+1}+2$$

Puisque $\mathcal{P}_n$ est vraie, $7|[3^{2n+1}+2^{n+2}]$. Par propriété de la relation de divisibilité, $7|7\times 3^{2n+1}+2\times[3^{2n+1}+2^{n+2}]$. Ainsi, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

— On a montré que $\mathcal{P}_0$ est vraie et $\forall n\in\mathbb{N}, \mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$. Par le théorème de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est donc vraie pour tout entier n.

Correction de l'exercice 6 :

1. Si $n=2p$ est pair alors $\dfrac{n(n+1)}{2} = \frac{2p(2p+1)}{2} = p(2p+1)$. Si $n=2p+1$ est impair, alors $\dfrac{n(n+1)}{2} = \frac{(2p+1)(2p+2)}{2} = (p+1)(2p+1)\in\mathbb{N}$.
2. Soit $2n+1$ un nombre impair. Alors $(2n+1)^2 = 4n^2+4n+1 = 4\frac{2n(n+1)}{2}+1 = 8n(n+1)+1$. Ainsi, le carré d'un nombre impair est de la forme $8k+1$ avec $k\in\mathbb{N}$.

Correction de l'exercice 7 :

1. C'est une formule $a^n-b^n=(a-b)\times\sum_{k=0}^{n-1}a^kb^{n-1-k}$. Donc, $10^n-1=(10-1)\times\sum_{k=0}^{n-1}10^k = 9\times Q_n$ avec $Q_n=\sum_{k=0}^{n-1}10^k\in\mathbb{N}$.
2. Nous avons l'égalité : $10^n-1=9\times Q_n$. Les nombres 3 et 9 sont des diviseurs de 10^n-1.
3. Le nombre 3 divise m si et seulement si 3 divise $m-\sum_{i=0}^n m_i+\sum_{i=0}^n m_i = \sum_{i=0}^n[10^i-1]m_i+\sum_{i=0}^n m_i$. Or 3 divise $[10^i-1]$ pour tout entier i et par conséquent, divise $\sum_{i=0}^n[10^i-1]m_i$. Finalement, 3 divise m si et seulement si 3 divise $\sum_{i=0}^n m_i$ autrement dit la somme des chiffres du nombre m.
4. Même raisonnement.

Correction de l'exercice 8 :

On suppose que $x\in\mathbb{Q}, y\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ sont tels que $x+y\notin\mathbb{R}-\mathbb{Q}$. Par conséquent, $x+y\in\mathbb{Q}$. La différence de deux rationnels est un rationnel. Donc $y=x+y-x\in\mathbb{Q}$. C'est absurde car y est irrationnel.

Correction de l'exercice 11 : ☐ **Initialisation.** Montrons que $\mathcal{P}_0$ est vraie. D'une part, $\sum_{k=0}^0 k^3 = 0^3 = 0$, d'autre part, $\dfrac{0^2\times(0+1)^2}{4}=0$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

☐ **Hérédité.** On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie à un rang $n\in\mathbb{N}$ fixé quelconque, c'est à dire que l'on suppose que $\displaystyle\sum_{k=0}^n k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$. Alors, montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi, c'est à dire

$$\sum_{k=0}^{n+1}k^3=\frac{(n+1)^2((n+1)+1)^2}{4}=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

On part de

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1}k^3 &= \sum_{k=0}^{n}k^3+(n+1)^3\\ &= _{\text{car}\mathcal{P}_n \text{ est supposée vraie}}\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3\\ &= \frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^3}{4}\\ &= \frac{(n+1)^2\left(n^2+4n+4\right)}{4}\\ &= \frac{(n+1)^2\left((n+2)^2\right)}{4}\end{aligned}$$

On a donc montré que $\forall n\in\mathbb{N}, \mathcal{P}_n\Rightarrow\mathcal{P}_{n+1}$.

☐ Finalement, $\mathcal{P}_0$ est vraie et $\forall n\in\mathbb{N}, \mathcal{P}_n\Rightarrow\mathcal{P}_{n+1}$ également. Par le théorème de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier n.

Correction de l'exercice 21 :

1. Le reste est le chiffre des unités, 4, le quotient est 123. Si on recommence, on obtiendra le chiffre des dizaines.

```
n=int(input("Donner un nombre entier:
    "))
q=n
r=0
S=0
while q!=0:
    r=q%10
    S=S+r**3
    q=q//10
print(S)
```

Correction de l'exercice 22 :

1. L'entier 11 divise m si et seulement si 11 divise : $m - \left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i m_i\right) + \left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i m_i\right)$. Or : $m - \left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i m_i\right) = \sum_{i=0}^{n} m_i\left(10^i - (-1)^i\right)$. Par propriété,
$$\begin{aligned}10^i - (-1)^i &= (10-[-1]) \times \sum_{k=0}^{i-1} 10^k \times (-1)^{i-1-k} \\ &= 11 \times \sum_{k=0}^{i-1} 10^k \times (-1)^{i-1-k}.\end{aligned}$$
Le nombre 11 est donc un diviseur de $m - \left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i m_i\right)$.
Ainsi, il divise m si et seulement il divise $\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i m_i\right)$ autrement dit la somme alternée de ses chiffres.

Correction de l'exercice 23 :

1. $7(q+r) + 3(q-2r) = 7q + 7r + 3q - 6r = 10q + r$.
2. n est multiple de 7 si et seulement si $7|7(q+r) + 3(q-2r)$. Or 7 divise $7(q+r)$. Ainsi, n est multiple de 7 si et seulement si $7|3(q-2r)$. Or 7 et 3 sont deux nombres premiers distincts. Par propriété, $7|3(q-2r) \Leftrightarrow 7|(q-2r)$.

```
#la suite des q-2r decroit
    strictement d'où
#la terminaison de l'algorithme ci-
    dessous
#le dernier entier non nul est 10q+r
#avec q-2r<=0. Ainsi :
#10q+r<=21r<=189 car 0<=r<=9, r état
    le reste de
#la division euclidienne

def div7(n):
    q=n//10
    r=n%10
    while q-2*r>0:
        n=q-2*r
        q=n//10
        r=n%10
    L=[7*k for k in range(28)]
#liste des multiples de 7 <189
    if n in L:
        return True
    else :
        return False
```

Tant que $q - 2r$ n'est pas mentalement dans la table de 7, on calcule le quotient et le reste de la division euclidienne par 10 de ce nombre.

4. Par exemple : $84 = 810 + 4$. Or $8 - 2 \times 4 = 2$ n'est pas divisible par 7 et 84 non plus. $315 = 3110 + 5$. Puis $31 - 2 \times 5 = 21$ est divisible par 7 et 315 aussi.

De même, 1890 l'est également.

Correction de l'exercice 24 :

1. $pgcd(84, 90) = 6; ppcm(84, 90) = 1260$.
2. $pgcd(364, 495) = 1; ppcm((364, 495) = 180\,180$
3. $pgcd(2\,613\,600, 4\,306\,500) = 2700;$
$pgcd(2\,613\,600, 4\,306\,500) = 41\,678\,307\,000$
4. $n!$ divise $(n+1)!$. Donc $pgcd(n!; (n+1)!) = n!$ et leur ppm est $(n+1)!$.

Correction de l'exercice 25 :

1. Ce résultat est faux. Prenons $c = 6$ et $a = 4, b = 3$. Alors 6 divise 12 mais 6 ne divise pas 4, et 3.
2. *Considérons la décomposition en facteurs premiers de c. La DFP de ab est obtenue, par unicité de cette dernière, en effectuant le produit de celle de a par celle de b. De plus, ab est égal à kc. Donc la DFP de ab est obtenue en effectuant le produit de celle de c par celle de k. Or aucun nombre premier de la DFP de c est dans celle de a car les entiers a et c sont premiers entre eux. Ainsi, par unicité de la DFP de ab, la DFP de b contient celle de c ce qui signifie que c divise b.*

Correction de l'exercice 26 :

1. On utilise la formule : $a^n - b^n = (a-b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$.
Ainsi, $a^N - 1 = a^N - 1^N = (a-1)\sum_{k=0}^{N-1} a^k$. Donc, par définition, $\boxed{a - 1 \text{ divise } a^N - 1.}$
2. *Supposons que* $a^n - 1$ est premier. Alors, ses seuls diviseurs sont lui même et 1. Or $a - 1$ divise $a^n - 1$. Donc $a - 1 = 1$ ou $a - 1 = a^n - 1 \Leftrightarrow a = 2$ ou $a = 1$ ou $a = 0$. Or, le nombre a est supérieur à 2. On a donc montré que $\boxed{a = 2.}$ Montrons par l'absurde que n est premier. S'il ne l'était pas alors il existe $p; q \in \mathbb{N}$ tels que $p \geq 2; q \geq 2$ et $pq = n$. Mais notre nombre $a^n - 1$ serait égal à $a^{pq} - 1 = \left(a^p\right)^q - 1$. Or, par le résultat de la question 1, le nombre $a^p - 1$ serait un diviseur de $\left(a^p\right)^q - 1$. Ceci est notre contradiction. Ainsi, $\boxed{n \text{ est premier.}}$
3. Par exemple, $2^2 - 1 = 3; 2^3 - 1 = 7; 2^5 - 1 = 31; 2^7 - 1 = 127$. Ce sont des nombres premiers. Il ne faut pas penser que tous les nombres de la forme $2^n - 1$ sont premiers. Par exemple, $2^{11} - 1 = 2047$ n'est pas premier.
4. On suppose que $m = 2^n - 1$ est premier. Donc, les diviseurs de $2^{n-1}m$ sont : $1; 2; \cdots; 2^{n-1}$ et : $m; 2m; \cdots; 2^{n-1}m$. En sommant les diviseurs autre que $2^{n-1}m$, on obtient :
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} 2^k + \sum_{k=0}^{n-2} 2^k m &= 2^n - 1 + m(2^{n-1} - 1) \\ &= m + m2^{n-1} - m = \boxed{2^{n-1}m}.\end{aligned}$$

Ainsi, par définition, $\boxed{\text{le nombre } 2^{n-1}m \text{ est parfait.}}$

Correction de l'exercice 28 :

Supposons le contraire $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\frac{p}{q}$ avec $p,q\in\mathbb{N}^*$ deux entiers premiers entre eux. Alors $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2=\frac{p^2}{q^2}\Leftrightarrow 5+2\sqrt{6}=\frac{p^2}{q^2}\Leftrightarrow\sqrt{6}\in\mathbb{Q}$. Mais $\sqrt{6}\notin\mathbb{Q}$. En effet, si $\sqrt{6}=\frac{a}{b}$ avec a,b deux entiers premiers entre eux, alors $6=p^2/q^2\Leftrightarrow q^26=p^2$. Dans ce cas, 2 divise p^2 donc p est un entier pair, $p=2p'$. L'égalité devient $6q^2=4(p')^2\Leftrightarrow 3q^2=2(p')^2$. Donc, 2 divise $3q^2$, donc q. Cela signifie que q est pair. Voici notre absurdité, p et q étant premiers entre eux, 2 ne peut être un diviseur commun. Finalement, grâce à ce raisonnement par l'absurde, nous avons montré que $\sqrt{2}+\sqrt{3}\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$.

Correction de l'exercice 29 :

La fonction $f:x\mapsto x^3+x-1$, définie sur $\mathbb{R}$, est une fonction polynomiale. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. $\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=3x^2+1>0$. Donc f est strictement croissante et continue. Elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$. Donc 0 a un unique antécédent par f. Supposons que cet antécédent soit rationnel, p/q avec $p\in\mathbb{Z};q\in\mathbb{N}^*$, p et q premiers entre eux. Alors

$$(\frac{p}{q})^3+\frac{p}{q}-1=0\Leftrightarrow\frac{p^3+pq^2-q^3}{q^3}=0\Leftrightarrow p(p^2+q^2)=q^3.$$

Cela signifie que p divise q^3. Or nous avons supposé que q et p sont premiers entre eux. Si p est différent de 1 alors p ne peut diviser q^3 (sinon un entier premier de la décomposition en facteurs premiers de p serait dans celle de q^3, donc celle de q.) Ainsi, $p=1\Rightarrow 1+q^2=q^3$. Donc q divise $1+q^2$. Mais q divise q^2. Donc q divise $q^2+1-q^2=1$ et est donc égale à 1. On vérifie que 1 n'est pas solution de l'équation.

Correction de l'exercice 32 :

1. L'ensemble E est non vide puisque $0\in E$ et est majoré car inclus dans $[0;1]$. Par propriété, il admet une borne supérieure notée α qui est dans $[0;1]$.
2. Soit $x\in E$. Alors, par croissance de f, $x\le\alpha\Rightarrow f(x)\le f(\alpha)$. Or $x\le f(x)$. Par transitivité, pour tout x élément de E, $x\le f(\alpha)$ et $f(\alpha)$ est un majorant de E. Puis, α étant le plus petit des majorants, et $f(\alpha)$ en étant un, on en déduit que $f(\alpha)\ge\alpha$.
3. $f(\alpha)\ge\alpha\Rightarrow f(f(\alpha))\ge f(\alpha)$ par croissance de f. Donc, $f(\alpha)\in E$ et est donc plus petit que la borne supérieure α. Ainsi, $f(\alpha)\le\alpha\le f(\alpha)\Leftrightarrow$ $\boxed{f(\alpha)=\alpha}$.

Correction de l'exercice 33 :

1. $S=[3;4[$.
2. On peut s'aider d'une représentation graphique avant de commencer. On note $p=\lfloor x\rfloor$. Par définition,
$$\left\{\begin{array}{lll} p & \le & x<p+1\\ p & \le & 4-x<p+1\end{array}\right. .$$
Ainsi : $2p\le 4<2p+2\Leftrightarrow 1<p\le 2\Leftrightarrow p=2$. En remplaçant, on obtient :
$$\left\{\begin{array}{lll} 2 & \le & x<3\\ 2 & \le & 4-x<3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{lll} 2 & \le & x<3\\ -3 & < & x-4\le -2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{lll} 2 & \le & x<3\\ 1 & < & x\le 2\end{array}\right.\Leftrightarrow x=2.$$
Du fait d'une implication précédente, on est obligé de faire la réciproque. On a bien $\lfloor 2\rfloor=2$ et $\lfloor 4-2\rfloor=2$. Finalement, $S=\{2\}$.
3. Soit $k\in\mathbb{Z}$ tel que : $k\le x<k+1$ ($k=\lfloor x\rfloor$). On sait qu'alors $\lfloor x+4\rfloor=\lfloor x\rfloor+4=k+4$. On distingue maintenant deux situations :
   — $x\in[k;\ k+1/2[$, auquel cas : $2k+1\le 2x+1<2k+1$ et donc : $\lfloor 2x+1\rfloor=2k+1$. Ainsi, $\lfloor 2x+1\rfloor=\lfloor x+4\rfloor\Leftrightarrow 2k+1=k+4\Leftrightarrow k=3$ et donc $x\in[3;\ 7/2]$.
   — $x\in[k+1/2;\ k+1[$, auquel cas : $2k+2\le 2x+1<2k+3$ et donc : $\lfloor 2x+1\rfloor=2k+2$. Ainsi, $\lfloor 2x+1\rfloor=\lfloor x+4\rfloor\Leftrightarrow 2k+2=k+4\Leftrightarrow k=2$ et donc $x\in]5/2;\ 3[$.

   Au final, $\lfloor 2x+1\rfloor=\lfloor x+4\rfloor\Leftrightarrow x\in[3;\ 5/2]\cup]5/2;\ 3[\Leftrightarrow$ $\boxed{x\in]5/2;\ 7/2].}$