TD 26

Matrices et applications linéaires

LES INCONTOURNABLES

Exercice 1 : [corrigé] Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1. Calculer A^2. Que peut-on en déduire sur f?
2. Déduire de précédemment une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $Mat_{\mathcal{B}}(f)$ est la plus simple possible.

Exercice 2 : [corrigé] Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

(Q 1) Déterminer une base et calculer la dimension de $F = \ker(f - id)$ et de $G = \ker(f - 4id)$.

(Q 2) Montrer que F et G sont supplémentaires. En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice B de f est diagonale.

(Q 3) Déterminer B^n puis A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3 : Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de l'espace $E = \mathbb{R}^3$ et l'application linéaire f de E dans E telle que :

$$f(e_1) = 2e_2 + 3e_3, \quad f(e_2) = 2e_1 - 5e_2 - 8e_3, \quad f(e_3) = -e_1 + 4e_2 + 6e_3.$$

(Q 1) Donner la matrice de f dans $\mathcal{B}$.

(Q 2) Étudier le sous-espace $\ker(f - id)$: dimension, base.

(Q 3) Étudier le sous-espace $\ker(f^2 + id)$: dimension, base.

(Q 4) Montrer que la réunion des bases précédentes, notée B', constitue une base de E.

(Q 5) Donner la matrice de passage de la base B à la base B' puis de la base B' à la base B.

(Q 6) Quelle est la matrice de f dans cette nouvelle base ? et celle de f^2 ?

Exercice 4 : [corrigé] Soient $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\Phi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui à M associe $AM - MA$. Déterminer la matrice de Φ dans la base canonique de E après avoir vérifié que c'est un endomorphisme. En déduire $\ker(\Phi)$ et $\mathrm{Im}(\Phi)$.

Exercice 5 :

Pour $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on pose $\varphi(P) = P(X + 1)$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ et déterminer sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Montrer que φ est un ismorphisme et calculer $\varphi^{-1}(P)$ pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 6 : [corrigé] Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^3 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

(Q 1) L'application linéaire f est-elle un automorphisme ?

(Q 2) Soit $x_0 \in E$ tel que $f^2(x_0) \neq 0_E$. Montrer que $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ est une base de E.

(Q 3) Quelle est la matrice de f dans cette base ?

Exercice 7 : [corrigé] Soit E l'espace vectoriel $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, et ϕ l'application linéaire définie par

$$\phi \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ f & \mapsto & f'' + 9f. \end{array}$$

Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $\mathcal{B} = \left(\cos;\sin;\cos^3;\sin^3\right)$.

(Q 1) Déterminer le noyau de ϕ et donner sa dimension.

(Q 2) Démontrer que $\mathcal{B}$ est une base de F.

(Q 3) Démontrer que F est stable par ϕ.

(Q 4) Soit $\psi : F \to F$ la restriction de ϕ à F.

(Q a) Donner la matrice Ψ de ψ dans la base $\mathcal{B}$.

(Q b) Donner une base du noyau de ψ.

(Q c) Démontrer que $\ker \phi = \ker \psi$.

(Q d) Déduire de ce qui précède les formules donnant $\cos 3x$ et $\sin 3x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.

Exercice 8 : Déterminer le rang des matrices suivantes :

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 12 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & -6 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 11 & -2 & 16 \end{pmatrix}$; (d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; (e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

POUR S'ENTRAÎNER

Exercice 9 : Soient $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définies par $f\left(((x,y,z))\right) = (x+2y+3z, y+2z)$ et $g\left((x,y)\right) = (x-y, x-2y, x-3y)$.

(Q 1) Calculer les matrices de $f,\ g,\ f \circ g$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

(Q 2) Exprimer alors $f \circ g((x;y))$ pour $(x;y) \in \mathbb{R}^2$ à l'aide de la matrice de $f \circ g$

Exercice 10 : [corrigé] Dans $\mathbb{R}^3$, on note $\mathcal{B}$ la base canonique et $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$, avec $f_1 = (1,1,1)$, $f_2 = (1,1,0)$ et $f_3 = (1,0,0)$ (exprimés donc dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.) **On admet que $\mathcal{F}$ est une base.**

(Q 1) Trouver les matrices de passage $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}}$ et $P_{\mathcal{F}}^{\mathcal{B}}$.

(Q 2) Soit $v = (1,3,-2)$. Trouver les coordonnées de v dans la base $\mathcal{F}$.

(Q 3) Soit $v = 2f_1 - 5f_2 + 3f_3$. Trouver les coordonnées de v dans $\mathcal{B}$.

(Q 4) Trouver la matrice de l'application linéaire f définie par $f\left((x,y,z)\right) = (2y+z, x-4y, 3x)$ dans $\mathcal{B}$.

(Q 5) Trouver la matrice de f dans la base $\mathcal{F}$.

(Q 6) Déterminer $Mat_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}}(f)$ et $Mat_{\mathcal{F}}^{\mathcal{B}}(f)$.

Exercice 11 : [corrigé] Soit $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(Q 1) Justifier que P est la matrice de passage de la base canonique $B = (e_1; e_2; e_3)$ à une base $\mathcal{B}' = (e_1'; e_2'; e_3')$ que l'on précisera et calculer sa matrice inverse.

(Q 2) On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x;y;z) = \Big(2x+2y+z; -2x-y; x+y-z\Big)$. Donner la matrice de f dans la base canonique, puis dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 12 : [corrigé] Déterminer une base du noyau, l'image de l'application linéaire canoniquement associée à la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ainsi que cette dernière application linéaire, et vérifier le théorème du rang. Faire de même avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 13 : [corrigé] Soit f l'application linéaire définie par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x;y;z) & \mapsto & (y+z; x-z; x-y) \end{array}$$

et soit $F = \ker\left(f - Id_E\right)$, $G = \ker\left(f + 2Id_E\right)$.

(Q 1) Donner les matrices de $f - Id_E$ et de $f + 2Id_E$ dans les bases canonique de $\mathbb{R}^3$.

(Q 2) Donner une base de F et une base de G.

(Q 3) Démontrer que F et G sont supplémentaires.

(Q 4) Donner la matrice de f dans une base adaptée à la somme directe $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

(Q 5) Quelle égalité matricielle peut-on vérifier ?

Exercice 14 : [corrigé] Soit $\Phi : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ qui à P associe R le reste de la division euclidienne de X^2P par $X^3 - 1$. Déterminer la matrice de Φ dans la base canonique de E après avoir vérifié que c'est une application linéaire. En déduire $\ker(\Phi)$ et $\mathrm{Im}(\Phi)$.

Exercice 15 : [corrigé] Pour P un polynôme, on pose : $u(P) = P(X) + P(X+1)$.

(Q 1) Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

(Q 2) Donner la matrice M de u dans la base canonique.

(Q 3) Montrer que M est inversible et déterminer M^{-1}.

(Q 4) En déduire que u^{-1} est un automorphisme et donner $u^{-1}(X^2)$.

(Q 5) (a) Montrer que quel que soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$:

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k u(P)(k) = (-1)^n P(n+1) - P(1).$$

(b) En déduire une expression simple de $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2$.

Exercice 16 : [corrigé] Soit $E = \mathbb{R}_3[X], \Phi : P \mapsto (X^2-1)P'' + 2XP'$. Déterminer la matrice de Φ dans la base canonique de E après avoir vérifié que c'est un endomorphisme. En déduire $\ker(\Phi)$ et $\mathrm{Im}(\Phi)$.

Indications

Correction de l'exercice 1 :

1. Nous obtenons : $A^2 = A$. Or $A = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f)$ donc $A^2 = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(()f^2)$. Ainsi : $A^2 = I_3 \Leftrightarrow \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(()f^2) = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f) \Leftrightarrow f^2 = f$. Par ailleurs f est linéaire donc f est un projecteur.
2. On cherche une base associée aux éléments caractéristiques d'un projecteur. On étudie donc le noyau et l'image de f.
   - Noyau : On résout le système : $AX = 0_3$. Puisque $A \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on en déduit : $AX = 0_3 \Leftrightarrow$ $\begin{cases} x = -\frac{1}{2}z \\ y = -z \end{cases}$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Par conséquent : $X = \begin{pmatrix} -\frac{z}{2} \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Au final $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(e_1)$ avec $e_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Il s'agit d'une droite vectorielle dont e_1 est bien évidemment une base.
   - Image : A étant la matrice dans la base canonique, nous avons : $\text{Im}(f) = \text{Vect}(e_2, e_3, e_4)$ avec : $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $e_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Le théorème du rang assure que $\text{rg}(f) = 2$ donc que l'image est de dimension 2. Les vecteurs e_2 et e_3 n'étant pas colinéaires, ces derniers forment une famille libre donc une base de $\text{Vect}(e_2, e_3)$ (qui est donc de dimension 2). Or, $\text{Vect}(e_2, e_3) \subset \text{Im}(f)$ et ces deux espaces ont la même dimension. Par conséquent, ils sont égaux ce qui assure que : $\text{Im}(f) = \text{Vect}(e_2, e_3)$ ainsi qu'une base de $\text{Im}(f)$ est (e_2, e_3).

   Par supplémentarité des espaces caractéristiques, on sait que : $B' = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. On calcule alors $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ car : $f(e_1) = 0$ ($e_1 \in \text{Ker}(f)$) $f(e_2) = Ae_2 = e_2$ et $f(e_3) = Ae_3 = e_3$.

Correction de l'exercice 2 :

(Q 1) Par propriété, la matrice de $f - id$ est

$$M(f - id) = A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Puis, $(x, y, z) \in \ker(f - id)$ si et seulement si $(A - I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Or

$$A - I_3 \sim_{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc, $(x, y, z) \in \ker(f - id) \Leftrightarrow (x, y, z) = (-y - z, y, z) = y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1)$.
On a donc obtenu

$$\ker(f - id) = \text{Vect}\Big((-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\Big)$$

La famille $\Big((-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\Big)$ est donc génératrice, libre (les deux vecteurs ne sont pas colinéaires). C'est donc une base de $\ker(f - id)$ qui est alors de dimension 2.
Par propriété, la matrice de $f - 4id$ est :

$$M(f - 4id) = A - 4I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Puis, $(x, y, z) \in \ker(f - 4id)$ si et seulement si $(A - 4I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Or :

$$\begin{aligned} A - 4I_3 \quad &\sim_{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &\sim_{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \\ &\sim_{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}.$$

Donc, $(x, y, z) \in \ker(f - 4id) \Leftrightarrow (x, y, z) = (z, z, z) = z(1, 1, 1)$.
On a donc obtenu

$$\ker(f - id) = \text{Vect}\Big((1, 1, 1)\Big)$$

La famille $\Big((1, 1, 1)\Big)$ est donc génératrice, libre (le vecteur est non nul). C'est donc une base de $\ker(f - 4id)$ qui est alors de dimension 1.

(Q 2)
- $\dim(F) + \dim(G) = 2 + 1 = \dim(\mathbb{R}^3)$.
- Montrons que l'intersection de ces deux espaces vectoriels est nul.
  1. $\{0_{\mathbb{R}^3}\} \subset F \cap G$ car ce sont deux sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
  2. Soit $\overrightarrow{u} \in F \cap G$. Plusieurs stratégies. Soit on utilise les bases de F et de G. Soit on utilise leur définition :

  $$\overrightarrow{u} \in F \Leftrightarrow f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$$

  $$\overrightarrow{u} \in G \Leftrightarrow f(\overrightarrow{u}) = 4\overrightarrow{u}$$

  Ainsi, $\overrightarrow{u} = 0_{\mathbb{R}^3}$. On a donc montré que $F \cap G \subset \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

  Par double inclusions, $\{0_{\mathbb{R}^3}\} = F \cap G$.

Par les deux points démontrés, nous en déduisons que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$. Prenons alors cette base de $\mathbb{R}^3$, adaptée à ces espaces supplémentaires : $\mathcal{B}' = \Big((-1,1,0),(-1,0,1),(1,1,1)\Big)$. La matrice de f dans cette base est alors :

$$M(f)_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1') & f(e_2') & f(e_3') \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1' \\ e_2' \\ e_3' \end{array}$$

(Q 3) Par une rapide récurrence, on montre que

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}$$

(produit de matrices diagonales). Par propriété :

$$A = M(f)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} M(f)_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$$

Par une rapide récurrence,

$$A^n = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} B^n P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$$

Par définition, $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1' & e_2' & e_3' \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$ et par propriété $P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \left(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et finalement

$$\begin{aligned} A^n &= \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 4^n & 4^n & 4^n \end{pmatrix} \\ &= \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 4^n & -1+4^n & -1+4^n \\ -1+4^n & 2+4^n & -1+4^n \\ -1+4^n & -1+4^n & 2+4^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 4 :

- Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On calcule $\Phi(\lambda M + \mu N) = A(\lambda M + \mu N) - (\lambda M + \mu N)A = \lambda\Phi(M) + \mu\Phi(N)$. De plus, $AM - MA \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Ainsi, l'application Φ est donc un endomorphisme.
- On calcule les images des vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_2$.

  Pour E_{11}. $\Phi(E_{11}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

  Pour E_{12}. $\Phi(E_{12}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

  Pour E_{21}. $\Phi(E_{21}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

  Pour E_{22}. $\Phi(E_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

  La matrice de Φ est donc

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- **Le noyau ?** Soit :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \ker(\Phi) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

  Or

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim_{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Ainsi, $(a,b,c,d) = (d, -c/2, c, d) = d(1,0,0,1) + c(0,-1/2,1,0)$ et $M = d\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et

$$\boxed{\ker(\Phi) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)}.$$

- $Im(\Phi)$? On a :

$$\begin{aligned} Im(\Phi) &= \mathrm{Vect}\Big(\Phi(E_{11}), \Phi(E_{12}), \Phi(E_{21}), \Phi(E_{22})\Big) \\ &= \boxed{\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)}. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 6 :

(Q 1) Si f était un automorphisme, alors f^{-1} existerait et donc $f^3 = 0_{\mathcal{L}(E)} \Rightarrow (f^{-1})^2 f^3 = 0_{\mathcal{L}(E)}$, ce qui entraîne $f = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Or ceci est impossible par hypothèse. D'où le résultat.

(Q 2) Puisque $f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$, il existe $x_0 \in E$ tel que $f^2(x_0) \neq 0_E$. Soient alors a, b, c des éléments de $\mathbb{K}$ tels que : $ax_0 + bf(x_0) + cf^2(x_0) = 0_E$. Alors en appliquant f et en utilisant la linéarité de cette dernière, nous obtenons : $af(x_0) + bf^2(x_0) + cf^3(x_0) = f(0_E) = 0_E$. Or $f^3(x_0) = O_E$ car $f^3 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ par hypothèse. Nous avons donc : $af(x_0) + bf^2(x_0) = 0_E$. En appliquant à nouveau f et en raisonnant de même ; il s'ensuit : $af^2(x_0) = O_E \Leftrightarrow a = 0_E$ car $f^2(x_0) \neq 0_E$ par hypothèse. Nous avons donc $bf^2(x_0) = 0_E$ en reprenant les relations précédentes, ce qui entraîne de la même manière $b = 0$. Pour finir, la relation initiale s'écrit alors : $cf^2(x_0) = O_E$ ce qui donne alors $c = 0$.

Nous avons donc montré que la famille précédente est libre. Elle est de plus de taille maximale car on est dans $\mathbb{R}^3$ et la famille a trois éléments. Il s'agit donc au final d'une base de $\mathbb{R}^3$.

(Q 3) Notons : $e_1 = x_0$, $e_2 = f(x_0)$ et $e_3 = f^{(}x_0)$. Alors : $f(e_1) = f(x_0) = e_2$, $f(e_2) = f^2(x_0)$ et $f(e_3) = f^3(x_0) = 0_E$ car $f^3 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ par hypothèse. Par conséquent : $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 7 :

(Q 1) $y \in \text{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow y'' + 9y = 0$. On reconnaît alors une edl d'ordre deux homogène à coefficients constants dont les solutions sont les fonctions de la forme : $t \mapsto \lambda\cos(3t) + \mu\sin(3t)$ donc $\text{Ker}(\varphi) = \text{Vect}(\cos(3t), \sin($
Par définition $(\cos(3t), \sin(3t))$ est génratrice de $\text{Ker}(\varphi)$. Elle est de plus libre. En effet, si a et b sont tels que $\forall t \in \mathbb{R},\ a\cos(3t) + b\sin(3t) = 0$, alors pour $t = 0$ cela donne $a = 0$ et pour $t = \frac{\pi}{2}$ cela donne $b = 0$. Il s'agit donc d'une base de $\text{Ker}(\varphi)$ constituée de deu éléments ce qui entraîne $\dim(\text{Ker}(\varphi)) = 2$.

(Q 2) $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de F par définition et elle est de de plus libre. En effet, soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tels que : $a\cos(t) + b\sin(t) + c\cos^3(t) + d\sin^3(t) = 0$. Alors $t = 0$ donne : $a + c = 0$ et $t = \frac{\pi}{2}$ donne $b + d = 0$. En dérivant et en prenant $t = 0$ cela donne par ailleurs : $b = 0$ en évaluant la relations dérivée en $\frac{\pi}{2}$ nous obtenons : $a = 0$. Ainsi, $a = b = c = d = 0$ ce qui prouve la liberté.

La famille est libre et génératrice de F donc est une base de F.

(Q 3) Par calculs :

- $\varphi(\cos) = 8\cos \in \text{Vect}(\mathcal{B})$.
- $\varphi(\sin) = 8\sin \in \text{Vect}(\mathcal{B})$.
- $\varphi(\cos^3) = 6\cos \in \text{Vect}(\mathcal{B})$.
- $\varphi(\sin^3) = 6\sin \in \text{Vect}(\mathcal{B})$.

Par linéarité : $\varphi(F) \subset F$.

(Q 4) (Q a) Puisque pour tout $f \in F$, $\psi(f) = \varphi(f)$ alors en reprenant les calculs précédents nous obtenons : $\Psi = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(Q b) $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \text{Ker}(\Psi) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{4}z \\ y = -\frac{3}{4}t \end{cases}$. D'où $X = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3/4 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$ ce qui assure que :
$\text{Ker}(\Psi) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -3/4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et donc que :
$\text{Ker}(\psi) = \text{Vect}(\cos^3 - \frac{3}{4}\cos, \sin^3 - \frac{3}{4}\sin)$.

(Q c) Puisque $\psi = \varphi_F$, nécessairement $\text{Ker}(\psi) \subset \text{Ker}(\varphi)$. Or $\dim(\text{Ker}(\varphi)) = 2$ et d'après la question précédente nous avons également $\dim(\text{Ker}(\psi)) =$ 2. Par conséquent, nécessairement : $\text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}(\psi)$.

(Q d) $(\cos(3t), \sin(3t))$ étant une famille génératrice de $\text{Ker}(\varphi)$, nécessairement : $\cos(3x) \in \text{Ker}(\varphi)$. Or $\text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}(\psi)$ donc $\cos(3t) \in \text{Ker}(\psi)$. Puisque $\text{Ker}(\psi) = \text{Vect}(\cos^3 - \frac{3}{4}\cos, \sin^3 - \frac{3}{4}\sin)$ il s'ensuit :
$\forall t \in \mathbb{R},\ \cos(3t) = a(\cos^3(t) - \frac{3}{4}\cos(t)) + b(\sin^3(t) - \frac{3}{4}\sin(t))$. Pour $t = 0$ on obtient : $1 = \frac{a}{4}$ et pour $t = \frac{pi}{2}$, $b = 0$ d'où :
$\cos(3t) = 4\cos^3(t) - 3\cos(t)$.

On obtient de la même façon la formule pour $\sin(3t)$.

Correction de l'exercice 10 :

1. La famille $\mathcal{F}$ est exprimée dans la base $\mathcal{B}$. La matrice de passage $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}}$ est donc

$$\boxed{P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (f_1) & (f_2) & (f_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ (e_1) \\ (e_2) \\ (e_3) \end{array}}$$

Pour donner l'autre matrice de passage, on remarque que $e_1 = f_3, e_2 = f_2 - f_3, e_3 = f_1 - f_2$. Ainsi,

$$\boxed{P_{\mathcal{F}}^{\mathcal{B}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (e_1) & (e_2) & (e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ (f_1) \\ (f_2) \\ (f_3) \end{array}}$$

On aurait pu également utiliser le fait que cette matrice est la matrice inverse de la première matrice de passage.

2. On a la matrice $X = M(v)_{\mathcal{B}}$. Or on sait que

$$M(v)_{\mathcal{F}} = P_{\mathcal{F}}^{\mathcal{B}} M(v)_{\mathcal{B}}$$

Ainsi,

$$M(v)_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

On obtient donc $\boxed{v = -2f_1 + 5f_2 - 2f_3}$.


Ce résultat se vérifie facilement : $-2f_1 + 5f_2 - 2f_3 = (-2, 5, -2)$.

3. On a la matrice $X = M(v)_{\mathcal{F}}$. Or on sait que

$$M(v)_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}} M(v)_{\mathcal{F}}$$

Ainsi,

$$M(u)_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

On obtient donc $\boxed{v = -3e_2 + 2e_3}$.

Sinon, on peut aussi calculer directement : $v = 2f_1 - 5f_2 + 3f_3 = (2,2,2) + (-5,-5,0) + (3,0,0) = (0,-3,2)$.

4. Par définition

$$M(f)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$

5. On utilise la formule :

$$M(f)_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}} = P_{\mathcal{F}}^{\mathcal{B}} M(f)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}}$$

Et on obtient :

$$\begin{aligned} M(f)_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -6 & -6 & -2 \\ 6 & 5 & -1 \end{pmatrix}}. \end{aligned}$$

Comment vérifier le résultat ? Par exemple, $f(f_3) = (0,1,3)_{\mathcal{B}} = 3f_1 - 2f_2 - f_3$.

6. Par propriété :

$$\begin{aligned} Mat_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}}(f) &= Mat_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}}(f) P_{\mathcal{F}}^{\mathcal{B}} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -6 & -6 & -2 \\ 6 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ -1 & 6 & 1 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} Mat_{\mathcal{F}}^{\mathcal{B}}(f) &= Mat_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -6 & -6 & -2 \\ 6 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ -14 & -8 & -2 \\ 10 & 4 & -1 \end{pmatrix}}. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 11 :

1. On pose $(e_1' = (-1,1,1), e_2' = (1,-1,1), e_3' = (1,1,-1))$.
   - Cette famille est-elle libre ? Soit $\lambda, \mu, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda e_1' + \mu e_2' + \gamma e_3' = 0_{\mathbb{R}^3}$. Alors la matrice associée est
   $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim_{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim_{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   Ainsi, $\lambda = \mu = \gamma = 0$. Par définition la famille est libre.
   - On a une famille libre de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3. Par théorème, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.
   - Ainsi, P est bien la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

2. Par définition, $M(f)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Par propriété, $M(f)_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} M(f)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$. On connait $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.
   La seconde $P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ est l'inverse de cette dernière. Calculons la :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_{\mathcal{L}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Finalement $P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 12 :

Par définition, $(x,y) \in \mathrm{Ker}(A)$ si et seulement si $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Or

$$A \sim_{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $(x,y) \in \ker(A) \Leftrightarrow (x,y) = y(-2,1)$. On en déduit :

$$\boxed{\ker(A) = \mathrm{Vect}((-2,1))}.$$

Par définition, $\mathrm{Im}(A)$ est l'espace vectoriel engendré par $(f(e_1), f(e_2))$ avec f son application linéaire canoniquement associée, (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Donc, $Im(A) = \mathrm{Vect}\Big((4,2),(8,4)\Big) = v\mathrm{Vect}\Big((2,1)\Big)$.

Puis, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f((x,y)) = (4x+8y, 2x+4y)$.

Le noyau de A est de dimension 1 puisque $((-2,1))$ est une famille génératrice et libre (le vecteur est non nul). De même, $\mathrm{Im}(A)$ est de dimension 1. On a donc $\dim(\ker(A)) + rg(A) = 1 + 1 = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$. Le théorème du rang est vérifié.

Correction de l'exercice 13 :

(Q 1) On a $M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Donc, $M(f - Id_E) = M(f) - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $M(f + 2Id_E) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(Q 2) On calcule le noyau de $f - id$. $(x,y,z) \in \ker(f - id) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Alors

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim_{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

soit x en inconnue principale et y, z en inconnues secondaires.

Donc, $(x,y,z) \in \ker(f - id_3) \Leftrightarrow (x,y,z) = (y+z, y, z) = y(1,1,0) + z(1,0,1)$ et

$$\ker(f - id) = \mathrm{Vect}\Big((1,1,0);(1,0,1)\Big).$$

Les vecteurs $\Big((1,1,0);(1,0,1)\Big)$ ne sont pas colinéaires, donc forment une famille libre de $\ker(f - id)$ et ainsi une base.

On calcule le noyau de $f + 2id_E$. $(x,y,z) \in \ker(f+2id) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim_{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim_{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

soit x, y en inconnues principales et z en inconnue secondaire.

Donc, $(x,y,z) \in \ker(f + 2id) \Leftrightarrow (x,y,z) = (-z, z, z) = z(-1,1,1)$ et

$$\ker(f + 2id) = \mathrm{Vect}\Big((-1,1,1)\Big).$$

De plus, ce vecteur $(-1,1,1)$ forme également une famille libre de $\ker(f + 2id)$ puis qu'il est non nul et ainsi une base.

(Q 3) On a :

- $\dim(F) + \dim(G) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$
- Puisque les noyaux sont des sous espaces vectoriels, on sait que $\overrightarrow{0}_E \in F \cap G$. Soit $\overrightarrow{x} \in \ker(f - id) \cap \ker(f + 2id) \Leftrightarrow f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}$ et $f(\overrightarrow{x}) = -2\overrightarrow{x} \Rightarrow \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}_E$. Ainsi, par double inclusion, $\boxed{F \cap G = \{\overrightarrow{0}_E\}}$.

Par théorème, les espaces sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

(Q 4) On concatène les deux bases et on obtient une base adaptée à cette somme directe. Dans cette base $B' = \Big(e_1 = (1,1,0); e_2 = (1,0,1); e_3 = (-1,1,1)\Big)$, ne calculons pas les images ! On a directement $f(e_1) = e_1, f(e_2) = e_2, f(e_3) = -2e_3$. Ainsi, la matrice de f dans cette base est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(Q 5) Par théorème, $M(f)_{B_c}^{B_c} = P_{B_c}^{B'} M(f)_{B'}^{B'} P_{B'}^{B_c}$, soit

$$A = P_{B_c}^{B'} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} P_{B'}^{B_c}$$

avec $P_{B_c}^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P_{B'}^{B_c} = (P_{B_c}^{B'})^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 14 :

- Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$. On note R_1 le reste de la division euclidienne de X^2P par $X^3 - 1$ et R_2 celui de X^2R par $X^3 - 1$. Par le théorème de la division euclidienne, $X^2P = Q_1(X^3-1)+R_1$ et $X^2P = Q_2(X^3-1)+R_2$, avec $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}[X]$. On a $X^2(\lambda P + \mu Q) = (\lambda Q_1 + \mu Q_2)(X^3-1)+(\lambda R_1+\mu R_2)$. De plus, $deg(\lambda R_1+\mu R_2) \leq max(deg(R_1), deg(R_2)) < 3$. Par unicité, on sait que le reste de la division euclidienne de $(\lambda P+\mu Q)$ par X^3-1 est $\lambda R_1 + \mu R_2$. Ainsi,
$$\Phi(\lambda P + \mu Q) = \lambda\Phi(P) + \mu\Phi(Q).$$
L'application Φ est donc linéaire.
- On calcule les différents restes des polynômes constituant la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

  Pour 1. On a $X^2.1 = 0(X^3 - 1) + X^2 \Rightarrow \Phi(1) = X^2$.

  Pour X. On a $X^2.X = 1(X^3-1)+1 \Rightarrow \Phi(X) = 1$.

  Pour X^2. On a $X^2.X^2 = X(X^3-1)+X \Rightarrow \Phi(X^2) = X$.

  Pour X^3. On a $X^2.X^3 = X^2(X^3 - 1) + X^2 \Rightarrow \Phi(X^3) = X^2$.

  Ainsi,
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
- $P = a + bX + cX^2 + dX^3 \in \ker(\Phi) \Leftrightarrow M\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \\ a + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (a,b,c,d) = (-d,0,0,d) = d(-1,0,0,1) \Leftrightarrow P = X^3-1$. Ainsi, $\boxed{\ker(\Phi) = \mathrm{Vect}\Big(X^3 - 1\Big)}$.
- L'image ? On sait que $Im(\Phi) = \mathrm{Vect}\Big(\Phi(1), \Phi(X), \Phi(X^2), \Phi(X^3)\Big) = \mathrm{Vect}\Big(X^2, 1, X, X^2\Big) = \boxed{\mathrm{Vect}\Big(1, X, X^2\Big)}$.

Correction de l'exercice 15 :

(Q 1) Si $P \in \mathbb{R}_2[X]$, alors $P(X+1) \in \mathbb{R}_2[X]$ donc $P(X) + P(X+1) \in \mathbb{R}_2[X]$, ce qui prouve que : $u : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$.

Soient P_1 et P_2 deux éléments de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors : $u(P_1+\lambda P_2) = (P_1+\lambda P_2)(X)+(P_1+\lambda P_2)(X+$

1).

Or par définition : $(P_1+\lambda P_2)(X) = P_1(X)+\lambda P_2(X)$ et de même : $(P_1+\lambda P_2)(X+1) = P_1(X+1)+\lambda P_2(X+1)$.

Par conséquent : $u(P_1+\lambda P_2) = P_1(X)+P_1(X+1)+\lambda(P_2(X)+\lambda P_2(X+1) = u(P_1)+\lambda u(P_2)$.

Au final, $u : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ et u est linéaire donc u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

(Q 2) $u(1) = 2$, $u(X) = 2X+1$ et $u(X^2) = 2X^2+2X+1$ donc $M = \mathcal{M}at_{\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, où $\mathcal{C} = (1, X, X^2)$ est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

(Q 3) M est déjà échelonnée donc directement $\mathrm{rg}(M) = 3$ ce qui prouve que M est inversible. La calcul de l'inverse de M, obtenu en faisant les mêmes opérations élémentaires pour réduire M sur I_3, donne : $M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(Q 4) Puisque $M = \mathcal{M}at_{\mathcal{C}}(()u)$ est inversible, on en déduit que u est un isomorphisme et que : $\mathcal{M}at_{\mathcal{C}}(u^{-1}) = M^{-1}$. Puisque u est un isomorphisme, u^{-1} également et comme $u^{-1} : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$, on obtient que u^{-1} est un automorphisme. Par définition, $u^{-1}(X^2)$ correspond à la dernière colonne de M^{-1}. Ainsi, $u^{-1}(X^2)$ $\frac{1}{2}(X^2-X)$.

(Q 5) (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k u(P)(k) = \sum_{k=1}^{n}(P(k)+P(k+1)) = \sum_{k=1}^{n}(v_{k+1}-v_k)$ avec $v_k = (-1)^{k-1}P(k)$. Par télescopage :

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k u(P)(k) = v_{n+1}-v_1 = (-1)^n P(n+1)-P(1)$.

(b) Pour : $P = u^{-1}(X^2)$, on en déduit :

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k u(u^{-1}(X^2))(k) = (-1)^n u^{-1}(X^2)(k+1)-u^{-1}(X^2)(k)$.

Or : $u(u^{-1}(X^2) = X^2$ donc : $u(u^{-1}(X^2))(k) = k^2$ et $u^{-1}(X^2) = \frac{1}{2}(X^2-X) = \frac{1}{2}X(X-1)$ donc : $u^{-1}(X^2)(k+1) = \frac{1}{2}k(k+1)$ et $u^{-1}(X^2)(1) = 0$.

Au final, nous en déduisons : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2 = \frac{(-1)^n n(n+1)}{2}$.

Correction de l'exercice 16 :

Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$. Alors

$\Phi(\lambda P+\mu Q) = (X^2-1)(\lambda P+\mu Q)''+2X(\lambda P+\mu Q)' = \lambda(X^2-1)P''+\mu(X^2-1)Q''+\lambda 2XP'+\mu 2XQ' = \lambda\Phi(P)+\mu\Phi(Q)$

Par définition Φ est linéaire. De plus, $\Phi(P)$ est un polynôme par propriété sur les polynômes. De plus,

$$deg((X^2-1)P''+2XP') \leq \max(deg((X^2-1)P''), deg(2XP')).$$

Or $deg((X^2-1)P'' = 2+deg(P)-2 = deg(P)$ et $deg(2XP') = 1+deg(P)-1 = deg(P)$. Ainsi, $deg(\Phi(P)) \leq 3$. On a ainsi montré que $\Phi(P) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X])$.

Par définition,

$$M(\Phi) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \Phi(1) & \Phi(X) & \Phi(X^2) & \Phi(X^3) \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ (1) \\ (X) \\ (X^2) \\ (X^3) \end{array}$$

On sait que $P = \sum_{k=0}^{3} a_k X^k \in \ker(\Phi)$ si et seulement si $\Phi(P) = 0_{\mathbb{R}_3[X]}$ ce qui équivaut à

$$M(\Phi)\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Or :

$$M(\Phi) \sim_{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \sim_{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalement, $P = \sum_{k=0}^{3} a_k X^k \in \ker(\Phi)$ si et seulement si $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ si et seulement si P est constant.

$$\boxed{\ker(\Phi) = \mathbb{R}_0[X]}.$$

Enfin, $\mathrm{Im}(\Phi) = \mathrm{Vect}\Big(\Phi(1), \Phi(X), \Phi(X^2), \Phi(X^3)\Big) = \mathrm{Vect}\Big(2X, 6X^2-2, 12X^3-6X\Big) = \boxed{\mathrm{Vect}\Big(X, 3X^2-1, 2X^3-X\Big)}$.

⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆