TD 22

Limites et équivalents de suites et fonctions

LES INCONTOURNABLES

Les suites

Exercice 1 : [corrigé] Déterminer un équivalent simple des suites de termes généraux ci-dessous puis leur limite.

(a) $u_n = n^3 \ln\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\ln\left(1+\dfrac{3}{n}\right)$; (b) $u_n = n(\ln(n+1)-\ln(n))$; (c) $u_n = \dfrac{n\ln\left(1+\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}$;

(d) $u_n = n^2\left(1-\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$; (e) $u_n = \dfrac{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{e^{1/n^2}-1}$; (f) $u_n = \dfrac{1}{n^2}\mathrm{arctan}(n^2)$;

(g) $u_n = n^2\mathrm{arctan}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$; (h) $u_n = \sqrt{n^3+2n^2+1}$; (i) $u_n = \sqrt[3]{n^3+1}-n$;

(j) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Exercice 2 : [corrigé] Soit la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ définie par : $\forall n \geq 1; S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

(Q 1) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*; \dfrac{1}{2\sqrt{k+1}} \leq \sqrt{k+1}-\sqrt{k} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{k}}$.

(Q 2) En déduire que (S_n) vérifie cet encadrement :

$$2\big(\sqrt{n+1}-1\big) \leq S_n \leq 2\big(\sqrt{n+1}-\frac{1}{2}\big)$$

(Q 3) En déduire un équivalent de la suite $(S_n)_{n\geq 1}$.

Exercice 3 : [corrigé] On considère la fonction définie sur $[0;\ 1[$ par : $f(x) = \dfrac{2x}{\pi}\tan\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation : $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une unique solution que l'on notera x_n.
2. Montrer que la suite (x_n) est décroissante puis qu'elle converge vers un réel que l'on déterminera.
3. Déterminer un équivalent simple de (x_n).

Équivalents de fonctions

Exercice 4 : [corrigé] Déterminer un équivalent des fonctions f suivantes en a, puis calculer $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)$:

(a) $f(x) = x\ln\left(\dfrac{1+x}{x}\right)$, $a=+\infty$; (b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\ln\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)}$, $a=+\infty$; (c) $f(x) = x^3\arctan(e^{-x})$, $a=+\infty$;

(d) $f(x) = \dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{\tan(x)}$, $a=0$; (e) $f(x) = \dfrac{3}{x^3-1} - \dfrac{2}{x^2-1}$, $a=1$; (f) $f(x) = \dfrac{1-\tan(x)}{\cos(2x)}$, $a=\pi/4$.

Exercice 5 :

1. Démontrer que $\ln(x+1) \sim_{x\to+\infty} \ln(x)$. A-t-on $e^{x+1} \sim_{x\to+\infty} e^x$?
2. Démontrer que $\ln(2x) \sim_{x\to+\infty} \ln(x)$. A-t-on $e^{2x} \sim_{x\to+\infty} e^x$?

Exercice 6 : Déterminer un équivalent en a des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = x(2+\cos(x)) - 3\sin(x)$ en $a = 0$; (b) $f(x) = 2\sqrt{x} - \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$ en $a = +\infty$;

Exercice 7 : Déterminer les limites suivantes :

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$; (b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2+3x+1}{x^2-x+1}\right)^x$.

Exercice 8 : [corrigé] Calculer les limites suivantes :

(Q 1) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x)-\sin x}{x}$;

(Q 2) $\displaystyle\lim_{x\to0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2(x)}\right)$;

(Q 3) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sin(x-\sin x)}{\sqrt{1+x^3}-1}$;

(Q 4) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$;

Utiliser un développement limité pour obtenir l'équation d'une tangente et la position de la courbe par rapport à cette tangente

Exercice 9 : Donner la position du graphe de la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(1+x+x^2) \end{array}$ par rapport à sa tangente en 0 et en 1.

Utiliser un développement limité pour obtenir l'équation d'une asymptote

Exercice 10 : Soit $f : x \mapsto \left(1+2x^2+x^3\right)^{1/3}$. La courbe représentative de f admet-elle une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$? Si oui, donner son équation cartésienne ainsi que les positions relatives de ces deux courbes.

Sur les régularités de fonctions

Exercice 11 : [corrigé] Soit $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

(Q 1) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On note f encore le prolongement.

(Q 2) Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ en 0.

POUR S'ENTRAÎNER

Les suites

Exercice 12 : [corrigé] Déterminer un équivalent simple des suites de termes généraux ci-dessous puis leur limite.

(a) $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$; (b) $u_n = e^{-n^2+\frac{1}{n}} - e^{-n^2}$; (c) $u_n = \sin\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$;

(d)$u_n = \ln\left(\ln\left(e+\dfrac{1}{n}\right)\right)$; (e) $u_n = \tan\left(\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}\right)\right)$; (f) $u_n = \sqrt{n^2+n+1}-n$;

(g) $u_n = \dfrac{n^5+2n^3+2}{n^6+2n+1}$; (h) $u_n = \dfrac{(1-e^{\frac{1}{n}})\sin\frac{1}{n}}{n^2+n^3}$; (i) $u_n = \tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{n}\right)$;

(j) $u_n = \tan\left(\text{Arcsin}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$; (k) $u_n = \tan\left(\text{Arcsin}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)\right)$.

Exercice 13 : [corrigé] Déterminer un équivalent simple des suites de termes généraux ci-dessous puis leur limite.

(Q 1) $u_n = \sqrt{\text{ch}\left(\dfrac{1}{n}\right)-1}$; (Q 2) $u_n = \sqrt{\cos\left(\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)-1}$.

Exercice 14 : [corrigé]

(Q 1) Montrer que l'équation : $x^3-3x+2=\frac{1}{n}$ admet une unique solution x_n sur $]0;\ 1[$.

(Q 2) Montrer que la suite (x_n) est croissante puis qu'elle converge vers un réel que l'on précisera.

(Q 3) On pose : $v_n = x_n - 1$. Montrer que $v_n^2 \sim \frac{1}{3n}$ puis en déduire un équivalent de (v_n).

(Q 4) En déduire que : $x_n = a + \frac{b}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ avec a et b que l'on précisera.

Exercice 15 : [corrigé] Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

1. Montrer que $e^{u_n} \sim e^{v_n}$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=0$.
2. Si $u_n \sim v_n$, a-t-on $e^{u_n} \sim e^{v_n}$?

Équivalents de fonctions

Exercice 16 : Donner un équivalent simple en 0 des fonctions ci-dessous et la limite éventuelle en 0.

(a) $\ln(1+\sin(x))$; (b) $\dfrac{\ln(1+2x)}{\cos(3x)-1}$; (c) $\dfrac{(1-\cos(x))\ln(1+x^3)}{x^3\tan^2(3x)}$; (d) $\ln(\cos(x))$.

Exercice 17 : [corrigé] Déterminer un équivalent des fonctions f suivantes en a, puis calculer $\lim\limits_{x\to a} f(x)$:

(a) $f(x) = \dfrac{x^x-1}{x-1}, a=1$; (b) $f(x) = \dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}, a=4$; (c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}, a=2$;

(d) $f(x) = \dfrac{\sin(x)-\sin(e)}{\ln(x)-1}, a=e$; (e) $f(x) = \dfrac{1-2\cos(x)}{\pi-3x}, a=\pi/3$; (f) $f(x) = \dfrac{\cos(x)-\sin(x)}{1-\sqrt{2}\sin(x)}, a=\pi/4$.

Exercice 18 : [corrigé] Soit f une fonction dérivable en a tel que $f'(a) \neq 0$. Montrer que

$$f(x) - f(a) \sim_a (x-a)f'(a)$$

Exercice 19 : Déterminer un équivalent en a des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = \ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)$ en $a = 0$; (b) $f(x) = x^x - (\sin(x))^x$ en $a = 0$.

Limites de fonctions

Exercice 20 : Déterminer les limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sqrt{x})^{1/x}$; (b) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\ln(x)}$; (c) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos(x))^{1/x^3}$; (d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)^{x\ln(x)}$.

Exercice 21 : [corrigé] Calculer les limites suivantes :

(Q 1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x+\ln x}{1-\sqrt{2x-x^2}}$;

(Q 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(1+e^{-x})\right)^{1/x}$;

(Q 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4}{\cos 2x - e^{-2x^2}}$;

(Q 4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin x - 1}{1-2\cos(2x)}$;

(Q 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - \mathrm{Arcsin} x}{\sin x - \mathrm{Arctan} x}$;

(Q 6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\ln x}$;

(Q 7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\frac{1+x}{1-x}}{\mathrm{Arctan}(1+x)-\mathrm{Arctan}(1-x)}$.

Sur les régularités de fonctions

Exercice 22 : [corrigé] Soit $f : x \mapsto \dfrac{e^x - 1}{x}$.

(Q 1) Quel est l'ensemble de définition de f ?

(Q 2) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On note encore f le prolongement.

(Q 3) Démontrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Utiliser un développement limité pour obtenir l'équation d'une tangente et la position de la courbe par rapport à cette tangente

Exercice 23 : [corrigé] Soit $f : x \mapsto \dfrac{1-\cos(x)}{1-\cos(2x)}$.

(Q 1) Donner l'ensemble de définition de f puis sa période.

(Q 2) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 mais pas en π.

(Q 3) Démontrer que le prolongement par continuité de f est dérivable en 0 et donner son nombre dérivée, ainsi que la position de sa courbe représentative par rapport à sa tangente.

Utiliser un développement limité pour obtenir l'équation d'une asymptote

Exercice 24 : [corrigé] Étudier les branches infinies en $+\infty$ des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2(x-2)}$; (b) $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{\ln(x)}$; (c) $f(x) = (x+2)e^{1/x}$;

(d) $f(x) = \dfrac{x^2e^{2/x}}{x+1}$; (e) $f(x) = (x^2+1)\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right)$; (f) $f(x) = \sqrt{1+x^2}\arctan(x)$.

Indications

Exercice 6 :
(a) faire le développement limité en 0 à l'ordre 2.

(b) On factorise par $\sqrt{x}$.

Exercice 19 :

(a) $f(x) \sim_0 \dfrac{\sin(x)-x}{x}$. On détermine un équivalent plus simple à l'aide d'un développement limité du numérateur élémentaire.

(b) $f(x) = -e^{x\ln(x)}\left(e^{x\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)}-1\right)$ et on utilise le développement limité en 0 et exp.

Solution de l'exercice 9 :

en 0, $\ln(1+x+x^2) = x + \frac{1}{2}x^2 + o_0(x^2)$, donc au dessus de sa tangente au voisinage de 0.
en 1, $\ln(1+x+x^2) = \ln(3)+x-1-\frac{1}{6}(x-1)^2+o_0((x-1)^2)$, donc en dessous de sa tangente au voisinage de 0.

Correction de l'exercice 1 :

(a) Par équivalents usuels, $\ln\left(1+\dfrac{2}{n}\right) \sim \dfrac{2}{n}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n} = 0$. De même, $\ln\left(1+\dfrac{3}{n}\right) \sim \dfrac{1}{3n}$. Par produit : $\boxed{u_n \sim \dfrac{6}{n}.}$
Puisque : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{6}{n} = 0$, on en déduit : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0.}$

(b) $\ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$. Or $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \sim \dfrac{1}{n}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Par produit, $\boxed{u_n \sim 1.}$ Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$, on en déduit : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1.}$

(c) Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin^2\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0$ par composition des limites, nous avons par équivalent usuel : $\ln\left(1+\sin^2\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$ $\sin^2\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Par produit : $u_n \sim n\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Par équivalent usuel : $\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) \sim \dfrac{1}{n}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Par transitivité, $\boxed{u_n \sim 1.}$ Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$, on en déduit : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1.}$

(d) Par équivalent usuel, $1-\cos\left(\dfrac{1}{n}\right) \sim \dfrac{1}{2n^2}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Par produit : $\boxed{u_n \sim \dfrac{1}{2}.}$ Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$, on en déduit : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}.}$

(e) Par équivalents usuels, $1-\cos\left(\dfrac{1}{n}\right) \sim \dfrac{1}{2n^2}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et de même $e^{1/n^2}-1 \sim \dfrac{1}{n^2}$. Par quotient : $\boxed{u_n \sim \dfrac{1}{2}.}$
Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$, on en déduit : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}.}$

(f) Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \operatorname{Arctan}(n^2) = \dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{2} \neq 0$, nous avons $\operatorname{Arctan}(n^2) \sim \dfrac{\pi}{2}$, d'où $\boxed{u_n \sim \dfrac{\pi}{2n^2}}$ par produit. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\pi}{2n^2} = 0$, on en déduit $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0.}$

(g) Par équivalent usuel, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$ par équivalent usuel et car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$. Par produit : $\boxed{u_n \sim 1.}$
Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$, on en déduit $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1.}$

(h) Puisque n^3+2n^2+1 est polynômiale, $n^3+2n^2+1 \sim n^3$. Par passage à la racine, $\boxed{\sqrt{n^3+2n^2+1} \sim n^{3/2}.}$ Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{3/2} = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$

(i) $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n}} = \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}$. D'après (i), $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \sim \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$. D'autre part $n+1$ est polynômiale donc $\sqrt{n+1} \sim \sqrt{n}$. Par produit et quotient, nous en déduisons : $\boxed{u_n \sim \dfrac{1}{2n^{3/2}}.}$ Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n^{3/2}} = 0$, on en déduit $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0.}$

(j) $u_n = e^{-n^2}\left(e^{1/n}-1\right)$. Par équivalent usuel, $e^{1/n} - 1 \sim \dfrac{1}{n}$ donc $\boxed{u_n \sim \dfrac{e^{-n^2}}{n}.}$ Par opérations usuelles, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{-n^2}}{n} = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0.}$

Correction de l'exercice 2 :

(Q 1) D'après l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle $I = [k;\ k+1]$ appliqué à la fonction $f(x) = \sqrt{x}$, nous avons : $m(k+1-k) \leq |f(k+1) - f(k)| \leq M(k+1-k)$, où m est n'importe quel minorant f' et M n'importe quel majorant de $|f'|$ sur I. Or $\forall x \in I, f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = |f'(x)|$, et $\forall x \in I\ \dfrac{1}{\sqrt{k+1}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{k}}$. Au final :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*;\ \frac{1}{2\sqrt{k+1}} \leq \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}}.}$$

(Q 2) Puisque $\forall k \in \mathbb{N}^*, \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}}$, alors :
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}}$. Or par télescopage

$\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) = \sqrt{n+1}-1$. Par conséquent : $S_n \geq 2(\sqrt{n+1}-1)$.
En procédant de la même façon avec la deuxième inégalité, nous obtenons : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k+1}} \leq \sqrt{n+1} - 1$. Or par glissement d'indice,
$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k+1}} = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{2\sqrt{k}} = \frac{1}{2}(S_n + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 1)$.
On en déduit :
$S_n \leq 2(\sqrt{n+1}-1)+1-\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2\left(\sqrt{n+1}-\frac{1}{2}\right)$.
Au final, nous obtenons bien l'encadrement :

$$\boxed{2\big(\sqrt{n+1}-1\big) \leq S_n \leq 2\big(\sqrt{n+1}-\frac{1}{2}\big).}$$

(Q 3) Les deux encadrements sont des expressions équivalentes à $2\sqrt{n}$. Intuitivement, S_n devrait épouser le même comportement. Justifions alors ce point rigoureusement : En divisant l'encadrement précédent par $2\sqrt{n}$, nous obtenons l'encadrement :
$\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \frac{S_n}{2\sqrt{n}} \leq \sqrt{1+\frac{1}{n}} - \frac{1}{2\sqrt{n}}$. Or, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}} - \frac{1}{2\sqrt{n}} = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}} - \frac{1}{2\sqrt{n}} = 1$, donc par encadrement, $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{2\sqrt{n}} = 1 \Leftrightarrow \boxed{S_n \sim 2\sqrt{n}.}$

Correction de l'exercice 3 :

1. Par opérations usuelles, f est dérivable sur $[0;\ 1[$ et $\forall x \in [0;\ 1[, f'(x) = \frac{2}{\pi}\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \frac{2x}{\pi}\frac{\pi}{2} \times \frac{1}{\cos^2\left(\frac{2x}{\pi}\right)} = \frac{2}{\pi}\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \frac{x}{\cos^2\left(\frac{2x}{\pi}\right)}$.
Puisque $x \in [0;\ 1[$, nous avons : $\frac{x}{\cos^2\left(\frac{2x}{\pi}\right)} > 0$.
Nous avons également :
$\frac{\pi x}{2} \in \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) > 0$. Par somme d'expressions positives, nous en déduisons :
$\forall x \in [0;\ 1[,\ f'(x) > 0$. Ainsi, f est strictement croissante et continue donc induit une bijection de $[0;\ 1[$ vers $f([0;\ 1[) = [f(0);\ \lim_{x\to 1^-} f(x)[= [0;\ +\infty[$. Or $\frac{1}{n} \in [0;\ +\infty[$ donc l'équation : $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une unique solution $x \in [0;\ 1[$ que l'on note x_n.
2. Nous avons : $f(x_n) = \frac{1}{n}$ et $f(x_{n+1}) = \frac{1}{n+1}$ donc : $f(x_{n+1}) < f(x_n) \Leftrightarrow x_{n+1} < x_n$ car f est strictement croissante. On en déduit que (x_n) est strictement décroissante.
(x_n) est décroissante et minorée par 0 donc converge vers un réel ℓ. En passant l'égalité $f(x_n) = \frac{1}{n}$ à la limite et par continuité de f en $\ell \in [0;\ 1[$, on en déduit : $f(\ell) = 0 \Leftrightarrow \ell = 0$.
3. Puisque $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$, nous avons : $\frac{2x_n}{\pi}\tan\left(\frac{\pi x_n}{2}\right) \sim \frac{2x_n}{\pi} \times \frac{\pi x_n}{2} \sim x_n^2$ (par produit d'équivalents). Or : $\frac{2x_n}{\pi}\tan\left(\frac{\pi x_n}{2}\right) = \frac{1}{n}$, donc : $x_n^2 \sim \frac{1}{n}$. Par passage à la puissance, $x_n = \sqrt{x_n^2} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Correction de l'exercice 4 :

(a) $f(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \sim 1$ car $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x}$ puisque $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

(b) Après factorisation par $\sqrt{x}$ nous obtenons l'équivalent classique : $\sqrt{x+1}-\sqrt{x} \sim \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Pour ce qui est du dénominateur, nous constatons que : $\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right) = 1$. Nous écrivons alors : $\ln\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right) = \ln\left(1+\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}-1\right)\right) \sim \frac{e^x-1}{e^x+1} - 1 \sim -\frac{2}{e^x+1} \sim -\frac{2}{e^x}$ $(1 = o_{+\infty}(e^x)$ donc : $e^x+1 \sim e^x$.) Finalement, par quotient : $f(x) \sim_{+\infty} -\frac{e^x}{4\sqrt{x}}$. Puisque : $\lim_{x\to+\infty} -\frac{e^x}{4\sqrt{x}} = -\infty$ par croissances comparées, nous en déduisons : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

(c) Puisque $\lim_{x\to+\infty} e^-x = 0$, nous avons : $\mathrm{Arctan}(e^{-x}) \sim e^{-x}$. Par produit : $f(x) \sim_{+\infty} \frac{x^3}{e^x}$. Par croissances comparées : $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^x} = 0$ donc : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

(d) $f(x) = \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{\tan(x)} = \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)} \sim_0 \frac{x^2/2}{x} \sim_0 \frac{x}{2}$. $\lim_{x\to 0} x/2 = 0$ donc $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

(e) $f(x) = \frac{3}{x^3-1} - \frac{2}{x^2-1} = \frac{-2x^3+3x^2-1}{(x^3-1)(x^2-1)}$. En posant $x = 1+h$ avec h proche de 0 pour x proche de 1, le numérateur devient : $-3h^2-2h^3 \sim_0 -3h^2$. Ainsi, $-2x^3+3x^2-1 \sim_1 -3(x-1)^2$. Le même changement de variable au dénominateur donne : $((1+u)^3-1)((1+u)^2-1) \sim_0 6u^2$. Ainsi : $(x^3-1)(x^2-1) \sim_1 (x-1)^2$. Par quotient : $f(x) \sim_1 -\frac{1}{2}$ donc $\lim_{x\to 0} f(x) = -\frac{1}{2}$.

(f) On pose, $x = \frac{\pi}{4} + u$ et on utilise :
$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$ avec $a = \frac{\pi}{4}$, $b = u$.
L'expression devient alors :
$\frac{-2\tan(u)}{(1-\tan(u))\cos(\pi/2+2u)} = \frac{-2\tan(u)}{(1-\tan(u)) \times -\sin(2u)}$.
En remarquant que $1-\tan(u) \sim_1 1$ puisque :
$\lim_{u\to 0} 1-\tan(u) = 1$ et en procédant par opérations usuelles sur les équivalents usuels, nous obtenons : $f(x) \sim_1 1$ ce qui donne : $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$.

Correction de l'exercice 7 :

(a) $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = e^{f(x)}$, avec $f(x) = x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$. Or :

$\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \ln\left(1+\dfrac{x+1}{x-1}-1\right) = \ln\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)$.

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x-1} = 0$, on en déduit : $\ln\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right) \sim$ $\dfrac{2}{x-1}$. Ainsi, par produit, $f(x) \sim_{+\infty} \dfrac{2x}{x-1} \sim_{+\infty} 2$ (équivalents d'expressions polynômiales en l'infini). Nous en déduisons : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ donc :

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x = e^2}$ par composition des limites.

(b) $\left(\frac{x^2+3x+1}{x^2-x+1}\right)^x = e^{f(x)}$, avec :

$f(x) = \ln\left(\frac{x^2+3x+1}{x^2-x+1}\right) = \ln\left(1+\frac{x^2+3x+1}{x^2-x+1}-1\right) = \ln\left(1+\frac{3x}{x^2-x+1}\right)$.

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x}{x^2-x+1} = 0$, donc :

$f(x) \sim_{+\infty} x\dfrac{3x}{x^2-x+1} \sim_{+\infty} 3$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$

donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+3x+1}{x^2-x+1}\right)^x = e^3}$ par composition des limites.

Correction de l'exercice 8 :

(Q 1) $\frac{\ln(1+x)-\sin x}{x} \underset{x\to0}{=} \frac{x-x^2/2+o(x^2)-(x+o(x^2))}{x}$ $\underset{x\to0}{=} \frac{-x^2+o(x^2)}{x} \underset{x\to0}{=} -x/2+o(x)$. Par conséquent, la limite en 0 est égale à 0.

(Q 2) $\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2(x)}\right) = \frac{\sin^2(x)-x^2}{x^2\sin^2(x)}$.

- ☐ Le numérateur est légèrement pénible puisque c'est une différence. On utilise les développements limités : $\sin^2(x)-x^2 \underset{x\to0}{=} (x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))^2 - x^2 \underset{x\to0}{=} x^2(1-\frac{x^2}{6}+o(x^2))^2-x^2$

  $$\underset{x\to0}{=} x^2(1-\frac{2x^2}{6}+o(x^2))-x^2 \underset{x\to0}{=} = -\frac{x^4}{3}+o(x^4)$$

  Ainsi, $\sin^2(x)-x^2 \sim_{x\to0} -\frac{x^4}{3}$.
- ☐ Le dénominateur : $x^2\sin^2(x) \sim_{x\to0} x^4$.

Par quotient,

$$\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2(x)}\right) \sim_{x\to0} \frac{-1}{3}$$

et ainsi la limite en 0 est égale) $-1/3$.

(Q 3) $\frac{\sin(x-\sin x)}{\sqrt{1+x^3}-1}$;

- ☐ Le dénominateur : $\sqrt{1+x^3}-1 \sim_{x\to0} \frac{1}{2}x^3$.
- ☐ Le numérateur ? On a une composition à traiter.
  - $x-\sin x \underset{x\to0}{=} x^3/6+o(x^3)$.
  - De plus, $\sin(X) \underset{X\to0}{=} X - X^3/6+o(X^3)$.

  Ainsi, $\sin(x-\sin(x)) \underset{x\to0}{=} = x^3/6+o(x^3)$ et $\sin(x-\sin(x)) \sim_{x\to0} x^3/6$.

Par quotient,

$$\frac{\sin(x-\sin x)}{\sqrt{1+x^3}-1} \sim_{x\to0} \frac{x^3/6}{x^3/2} \sim_{x\to0} \frac{1}{3}$$

Ainsi la limite en 0 est égale) $1/3$.

(Q 4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$;

$x(e^x+1)-2(e^x-1) \underset{x\to0}{=} x\Big(1+x+x^2/2+o(x^2)+1\Big)-2\Big(1+x+x^2/2+x^3/6+o(x^3)-1\Big) \underset{x\to0}{=} \frac{x^3}{6}+o(x^3)$

Par quotient,

$$\frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3} \sim_{x\to0} \frac{x^3/6}{x^3} \sim_{x\to0} \frac{1}{6}$$

Ainsi la limite en 0 est égale à $1/6$.

Correction de l'exercice 11 :

(Q 1) On a :

f est continue sur $\mathbb{R}^*$ par quotient de fonctions qui le sont ;
$f(x) \sim_{x\to0} \frac{x}{x} \sim_{x\to0} 1$, donc $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 1$

Par théorème, la fonction f est prolongeable par continuité en 0. On note f encore le prolongement :

$$\boxed{f : x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}}$$

(Q 2) On a :

- la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ par la première question,
- la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ en tant que quotient de fonctions qui le sont.
- $\forall x \in \mathbb{R}^*$,

  $$f'(x) = \frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2}$$

  en utilisant la forme usuelle $(u/v)'$. On a une FI. On la lève grâce aux développements limités :

  $$\begin{aligned} x\cos(x)-\sin(x) &\underset{x\to0}{=} x\Big(1-\tfrac{x^2}{2}+o(x^2)\Big) \\ &\quad -\Big(x-\tfrac{x^3}{6}+o(x^3)\Big) \\ &\underset{x\to0}{=} \tfrac{-x^3}{3}+o(x^3) \end{aligned}$$

  Ainsi, par quotient :

  $$f'(x) \underset{x\to0}{\sim} \frac{-x}{3}$$

Par théorème, $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$.

Par théorème, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 12 :

(a) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right)$. Or, par équivalent usuel, $\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{2n}$ car $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} = 0$. Par quotient, $\boxed{u_n \sim \frac{1}{2n^{3/2}}}$. Puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n^{3/2}} = 0$, on en déduit $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$

(b) $\sqrt[3]{n^3+1} - n = n\left(\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{1/3} - 1\right)$. Or, par équivalent usuel, $\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{1/3} - 1 \sim \frac{1}{3n^3}$ car $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} = 0$. Ainsi, par produit, $\boxed{u_n \sim \frac{1}{3n^2}}$. Enfin, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3n^2} = 0$ donc $\boxed{u_n \sim \frac{1}{3n^2}.}$

(c) Par opérations usuelles, $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$ donc par équivalent usuel $\sin\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \sim \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$. Toujours par équivalent usuel, $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ donc par transitivité, $\boxed{u_n \sim \frac{1}{n}.}$ Puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, on en déduit $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

(d) On constate que $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(e+\frac{1}{n}\right) = 1$. On fait donc apparaître l'équivalent usuel : $u_n = \ln(1+v_n)$ avec $v_n = \ln\left(e+\frac{1}{n}\right) - 1$ qui tend nécessairement vers 0. Ainsi, $u_n \sim v_n$. D'autre part : $v_n = \ln\left(1+\frac{1}{en}\right)$ donc $v_n \sim \frac{1}{en}$ par équivalent usuel. Il s'ensuit $\boxed{u_n \sim \frac{1}{en}}$ par transitivité. Enfin $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{en} = 0$ donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} {}_n = 0.}$

(e) Par opérations usuelles, $\lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}\right) = 0$ donc par équivalent usuel $\tan\left(\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}\right)\right) \sim \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}\right)$. Toujours par équivalent usuel, $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n^2+3}}$. D'autre part : n^2+3 est polynômiale donc $n^2+3 \sim n^2$ ce qui donne par passage à la racine $\sqrt{n^2+3} \sim n$. Par quotient ainsi que par transitivité, $\boxed{u_n \sim \frac{1}{n}.}$ Puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, on en déduit : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

(f) $u_n = n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} - 1\right)$. Puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}+\frac{1}{n^2} = 0$, par équivalent usuel : $\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} - 1 \sim \frac{1}{2n}+\frac{1}{2n^2}$. De plus, $\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n^2} = \frac{n+1}{2n^2}$. Or $n+1$ est polynômiale donc $n+1 \sim n$. Par quotient, $\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n^2} \sim \frac{1}{2n}$. Par transitivité, $\boxed{u_n \sim \frac{1}{2n}.}$ Enfin, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} = 0$, donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$

(g) Le numérateur étant polynômiaux, nous avons : $n^5 + 2n^3 + 2 \sim n^5$ et $n^6 + 2n + 1 \sim n^6$. Par quotient, $\boxed{u_n \sim \frac{1}{n}.}$ Enfin, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$

(h) Par équivalents usuels, $e^{1/n} - 1 \sim \frac{1}{n}$, $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$. D'autre part, le dénominateur est polynômial donc $n^2 + n^3 \sim n^3$. Par produits et quotients, $\boxed{u_n \sim \frac{-1}{n^5}.}$ Enfin, $\lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{n^5} = 0$, donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$

(i) Par propriété algébrique, $u_n = \dfrac{1}{\tan\left(\frac{1}{n}\right)}$. Or, par équivalents usuels, $\tan\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ donc par opérations usuelles, $\boxed{u_n \sim n.}$ Nous avons $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$, donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$

(j) Puisque $\lim_{n\to+\infty} \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$, par équivalents usuels, $u_n \sim \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{n}\right)$. De plus, toujours par équivalents usuels, $\operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ donc par transitivité $\boxed{u_n \sim \frac{1}{n}.}$ Enfin, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$

Correction de l'exercice 13 :

(Q 1) $u_n = \sqrt{\operatorname{ch}\left(\frac{1}{n}\right)} - 1 = \sqrt{1+(\operatorname{ch}(1/n)-1)} - 1$. Or $\operatorname{ch}(1/n) - 1 \to 0$. Par équivalent usuel :

$$u_n \sim \frac{1}{2}\Big(\operatorname{ch}(1/n) - 1\Big) \sim \frac{1}{4n^2}$$

en utilisant un équivalent usuel, ainsi que la transitivité de la relation $\sim$.

(Q 2) $u_n = \sqrt{\cos\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)} - 1$. Même technique. On sait que $\cos\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) \to 1$ donc $\cos\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) - 1 \to$

0. Par équivalent usuel :

$$u_n = \sim \frac{1}{2}\left(\cos\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)-1\right) \sim \frac{1}{2}\times\frac{-1}{2}\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2$$

car $\sin(1/n) \to 0$ et $\cos(u_n) - 1 \sim \frac{-u_n^2}{2}$ si $u_n \to 0$. Enfin, $\sin(1/n) \sim 1/n$. Par transitivité et passage à la puissance, on obtient :

$$u_n \sim \frac{-1}{4n^2}$$

Correction de l'exercice 14 :

(Q 1) La fonction d'expression $f(x) = x^3 - 3x + 2$ a pour dérivée : $f'(x) = 3(x^2 - 1)$, ce qui prouve que f est strictement décroissante sur $]0;\ 1[$. Étant par ailleurs continue (car dérivable par exemple) sur cet intervalle, elle induit une bijection de $]0;\ 1[$ vers $]f(1);\ f(0)[=]0;\ 2[$. Il ne nous reste plus qu'à constater que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n} \in]0;\ 2[$ pour assurer l'existence et l'unicité de l'antécédent x_n sur $]0;\ 1[$ associé à f. D'où :

$\boxed{x^3 - 3x + 2 = \frac{1}{n} \text{ admet un unique antécédent } x_n \in]0;\ 1}$

(Q 2) L'idée est de comparer les images de x_n et x_{n+1} par f. En effet : $f(x_{n+1}) = \frac{1}{n+1}$ et $f(x_n) = \frac{1}{n}$ par définition. Or $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$. Par conséquent : $f(x_{n+1}) \leq f(x_n) \Leftrightarrow x_{n+1} \geq x_n$, la fonction f étant strictement décroissante sur $]0;\ 1[$. Cela prouve donc que (x_n) est croissante. Étant de plus majorée par 1, on en déduit qu'elle converge vers un réel ℓ. Par ailleurs : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < x_n < 1$, donc par passage à la limite, $0 \leq \ell \leq 1$. Un passage à la limite de la relation : $x_n^3 - 3x_n + 2 = \frac{1}{n}$ fournit par ailleurs la relation : $\boxed{\ell^3 - 3\ell + 2 = 0.}$ ℓ est donc finalement un zéro de $x^3 - 3x + 2$ sur $[0;\ 1]$. La factorisation de cette expression (1 est racine évidente), par exemple par division euclidienne, est : $x^3 - 3x + 2 = (x - 1)(x^2 + x - 2) = (x - 1)^2(x + 2)$. L'unique zéro sur $[0;\ 1]$ étant 1, on en déduit que (x_n) converge vers 1.

(Q 3) Posons : $x_n = 1 + v_n$. Alors : (v_n) converge vers 0 par opérations élémentaires. De plus : $x_n^3 = 1 + 3v_n + 3v_n^2 + v_n^3$. On en déduit :
$x_n^3 - 3x_n + 2 = 3v_n^2 + v_n^3$. Ainsi : $3v_n^2(1 + \frac{1}{3}v_n) = \frac{1}{n}$.
Puisque $\lim\limits_{1+\frac{2}{3}v_n \to =} 1$, nous en déduisons : $1 + \frac{1}{3}v_n \sim 1$. Ainsi, $\frac{1}{n} \sim 3v_n^2$ par produit. Par quotient : $\boxed{v_n^2 \sim \frac{1}{3n}.}$
Enfin, v_n étant négative, $\sqrt{v_n^2} = -v_n$, donc en passant à la racine l'équivalent précédent, nous en déduisons : $\boxed{v_n \sim -\frac{1}{\sqrt{3n}}.}$

(Q 4) $v_n \sim -\frac{1}{\sqrt{3n}} \Leftrightarrow x_n - 1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{\sqrt{3n}}\right)$. En remarquant que $o\left(\frac{1}{\sqrt{3n}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, car $o(\lambda u_n) = o(u_n)$ quelque soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$, et en faisant passer le 1 de l'autre côté, nous obtenons le développement :

$\boxed{x_n = a + \frac{b}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$ avec $a = 1$ et $b = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Correction de l'exercice 15 :

1. $e^{u_n} \sim e^{v_n} \Leftrightarrow \frac{e^{u_n}}{e^{v_n}} \to 1 \Leftrightarrow e^{u_n - v_n} \to 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$.
2. Si $u_n \sim v_n$, a-t-on $e^{u_n} \sim e^{v_n}$? Cette assertion est fausse. Prenons pour tout entier $n \geq 0$, $u_n = n + 1$ et $v_n = n$. Alors $u_n \sim v_n$ mais $\frac{e^{u_n}}{e^{v_n}} = e$ est le terme général d'une suite ne convergeant pas vers 1.

Correction de l'exercice 17 :

(a) $f(x) = \frac{x^x - 1}{x - 1} = \frac{e^{x\ln(x)} - 1}{x - 1}$. Or $e^{x\ln(x)} - 1 \sim_1 x\ln(x)$ car $\lim\limits_{x\to1} x\ln(x) = 0$. De plus $\lim\limits_{x\to1} x = 1$ donc $x \sim_1 1$. Enfin, $\ln(x) = \ln(1 + (x - 1)) \sim_1 x - 1$ ce qui donne au final : $f(x) \sim_1 1$ et donc $\lim\limits_{x\to1} f(x) = 1$.

(b) En posant $x = 4+u$ et en factorisant, nous aboutissons à l'expression : $-3\frac{\sqrt{1+\frac{u}{9}} - 1}{1 - \sqrt{1-u}} \sim_0 \frac{\frac{u}{6}}{\frac{u}{2}} \sim_0 \frac{1}{3}$. Donc : $f(x) \sim_1 \frac{1}{3}$ et par conséquent : $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \frac{1}{3}$.

(c) De même, avec $x = 2 + u$ nous aboutissons à : $2\frac{\sqrt{1+\frac{u}{4}} - 1}{\ln(1 + u/2)} \sim_0 \frac{1}{2}$. Ainsi, $f(x) \sim_1 \frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \frac{1}{2}$.

(d) On pose : $x = \frac{\pi}{3} + u$. Alors le numérateur devient : $1 - 2\cos\left(\frac{\pi}{3} + u\right) = 1 - \cos(u) - \sqrt{3}\sin u = \frac{u^2}{2} + o_0(u^2) - \sqrt{3}(u + o_0(u)) = -\sqrt{3}u + o_0(u)$ car $u^2 = o_0(u)$ et par opérations usuelles sur la relation de négligeabilité. Ainsi : $1 - 2\cos\left(\frac{\pi}{3} + u\right) \sim_0 -\sqrt{3}u$ donc : $1 - 2\cos(x) \sim_{\pi/3} -\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$. En factorisant par -3 le dénominateur, on obtient : $f(x) \sim_{\pi/3} \frac{\sqrt{3}}{3}$ et par conséquent : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} f(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

(e) On pose : $x = \frac{\pi}{3}+u$, ce qui donne : $\frac{-\sqrt{2}\sin(u)}{1 - \cos(u) - \sin(u)}$.
Or $1 - \cos(u) - \sin(u) = \frac{u^2}{2} + o_0(u^2) - u - o_0(u) = -u + o_O(u)$ car $u^2 = o_0(u)$ et par opérations usuelles sur la relation de négligeabilité. Par conséquent : $1 - \cos(u) - \sin(u) \sim_0 -u$ et donc : $\frac{-\sqrt{2}\sin(u)}{1 - \cos(u) - \sin(u)} \sim_0 \sqrt{2}$. On en déduit : $f(x) \sim_{\pi/4} \sqrt{2}$ ce qui prouve que : $\lim\limits_{x\to\pi/4} f(x) = \sqrt{2}$.

(f) On pose $x = \frac{\pi}{4} + u$ et on utilise $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$, ce qui donne :

$f\left(\frac{\pi}{4}+u\right) = \dfrac{-\sqrt{2}\sin(u)}{1-\cos(u)-\sin(u)}$. Or, $1-\cos(u) \sim \dfrac{u^2}{2}$ donc $1-\cos(u) = \dfrac{u^2}{2} + o(\dfrac{u^2}{2})$. De plus : $-\sin(u) = -u + o(u)$. Donc : $1-\cos(u)-\sin(u) = -u + o(u) + \underbrace{\dfrac{u^2}{2} + o(\dfrac{u^2}{2})}_{=o(u)} = -u + o(u) = -u + o(-u)$. Ceci prouve donc que : $1-\cos(u)-\sin(u) \sim_0 -u$. Puisque : $-\sqrt{2}\sin(u) \sim_0 -\sqrt{2}u$, par quotient : $f\left(\frac{\pi}{4}+u\right) \sim_0 \sqrt{2}$

Au final, $f(x) \sim_{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2}$, donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x) = \sqrt{2}.}$

Correction de l'exercice 18 :

Puisque f est dérivable en a, on a par définition,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \to_{x\to a} f'(a)$$

Or $f'(a) \neq 0$ donc

$$\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)f'(a)} \to_{x\to a} 1$$

et

$$f(x)-f(a) \sim_a (x-a)f'(a)$$

Correction de l'exercice 20 :

(a) $(1+\sqrt{x})^{1/x} = e^{f(x)}$, avec $f(x) = \dfrac{\ln(1+\sqrt{x})}{x}$. Par opérations usuelles sur les équivalents, $f(x) \sim_0 \sqrt{x}$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. Par composition des limites, $\boxed{\lim\limits_{x\to(1+\sqrt{x})^{1/x}} =1.}$

(b) $(1+x)^{\ln(x)} = e^{f(x)}$, avec $f(x) = \ln(x)\ln(1+x) \sim_0 x\ln(x)$. Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. Par composition des limites, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}(1+\sqrt{x})^{1/x} = 1.}$

(c) $\cos(x)^{1/x^3} = e^{f(x)}$, avec $f(x) = \dfrac{\ln(\cos(x))}{x^3}$. Or $\ln(\cos(x)) \sim -\dfrac{x^2}{2}$ (exercice 10 (d) par exemple), donc $f(x) \sim_0 -\dfrac{1}{2x}$. Nous avons donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, donc par composition des limites,

$\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} \cos(x)^{1/x^3} = 0}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^-} \cos(x)^{1/x^3} = +\infty.}$

(d) $\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)^{x\ln(x)} = e^{f(x)}$ avec $f(x) = x\ln(x)\ln\left(\dfrac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right)$

Or : $\ln(x+1) = \ln(x(1+1/x)) = \ln(x) + \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$,

donc : $f(x) = x\ln(x)\ln\left(1 + \dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\ln(x)}\right)$. Or, par opérations usuelles, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\ln(x)} = 0$ donc : $f(x) \sim_{+\infty} x\ln(x)x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \sim_{+\infty} 1$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right)^{x\ln(x)} = e}$ par composition des limites.

Correction de l'exercice 21 :

(Q 1) On utilise le changement de variable $x-1 = h$.

$$\frac{1-x+\ln x}{1-\sqrt{2x-x^2}} = \frac{\ln(1+h)-h}{1-\sqrt{1-h^2}}$$

(a) $\ln(1+h) \underset{h\to 0}{=} h - h^2/2 + o(h^2) \Rightarrow \ln(1+h) - h \sim_{h\to 0} h^2/2$.

(b) $1-\sqrt{1-h^2} \sim_{h\to 0} h^2/2$ par équivalents usuels.

Par quotient, $\frac{\ln(1+h)-h}{1-\sqrt{1-h^2}} \sim_{h\to 0} \frac{h^2/2}{h^2/2} \sim_{h\to 0} 1$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x+\ln x}{1-\sqrt{2x-x^2}} = -1$.

(Q 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\ln(1+e^{-x})\right)^{1/x}$;

On passe à la forme exponentielle avant de commencer.

$$\left(\ln(1+e^{-x})\right)^{1/x} = \exp\left(\frac{\ln(\ln(1+e^{-x}))}{x}\right).$$

On étudie la limite de cette quantité : $\frac{\ln(\ln(1+e^{-x}))}{x}$.

On sait que $e^{-x} \to_{x\to+\infty} 0$. Ainsi, $\ln(1+e^{-x}) \underset{x\to+\infty}{=} e^{-x} + o(e^{-x})$. Par conséquent, $\ln(\ln(1+e^{-x})) \underset{x\to+\infty}{=} \ln(e^{-x}+o(e^{-x})) \underset{x\to+\infty}{=} \ln(e^{-x}[1+o(1)]) \underset{x\to+\infty}{=} -x + \ln(1+o(1)) \underset{x\to+\infty}{=} -x + o(1)$.

Finalement, $\frac{\ln(\ln(1+e^{-x}))}{x} \sim_{x\to+\infty} \frac{-x}{x} \sim_{x\to+\infty} -1$. Puisque la fonction exp est continue sur $\mathbb{R}$, on sait que

$$\exp\left(\frac{\ln(\ln(1+e^{-x}))}{x}\right) \to_{x\to+\infty} \boxed{\exp(-1)}.$$

(Q 3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\cos 2x - e^{-2x^2}}$;

Utilisons les développements limités usuels afin d'obtenir un équivalent du dénominateur.

$$\cos 2x - e^{-2x^2} \underset{x\to 0}{=} \left[1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{4!} + o(x^4)\right] - \left[1 - 2x^2 + (-2x^2)^2/2 + o(x^4)\right]$$

$$\underset{x\to 0}{=} \frac{-4x^4}{3} + o(x^4)$$

Par quotient,

$$\frac{x^2}{\cos 2x - e^{-2x^2}} \sim_{x\to 0} \frac{x^4}{\frac{-4x^4}{3}} \sim_{x\to 0} \frac{-3}{4}$$

(Q 4) $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{2\sin x - 1}{1-2\cos(2x)}$;

On fait le changement de variables $h = x - \pi/6$.

$$\frac{2\sin x - 1}{1-2\cos(2x)} = \frac{2\sin(h+\pi/6)-1}{1-2\cos(2h+\pi/3)}$$

☐ $2\sin(h+\pi/6)-1 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(h)+\frac{1}{2}\cos(h)\right)-1 = \sqrt{3}\sin(h)+\cos(h)-1 \underset{h\to 0}{=} \sqrt{3}h+o(h)$

☐ $1-2\cos(2h+\pi/3) = 1-2[\frac{1}{2}\cos(2h)-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2h)] = 1-\cos(2h)+\sqrt{3}\sin(2h) \underset{h\to 0}{=} 1-[1+o(h)]+\sqrt{3}h+o(h) = \sqrt{3}h+o(h)$.

Par quotient,

$$\frac{2\sin(h+\pi/6)-1}{1-2\cos(2h+\pi/3)} \sim_{h\to 0} \frac{\sqrt{3}h}{\sqrt{3}h} \sim_{h\to 0} 1$$

et finalement

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{2\sin x - 1}{1-2\cos(2x)} = 1.$$

(Q 5) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \mathrm{Arcsin} x}{\sin x - \mathrm{Arctan} x}$;

☐ On peut retrouver rapidement le développement limité de Arcsin en 0. La dérivée de cette dernière est $x \mapsto (1-x^2)^{-1/2}$. Or $(1-x^2)^{-1/2} \underset{x\to 0}{=} 1+(-1/2)\times(-x^2)/1!+o(x^2) \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$.
De plus $x \mapsto (1-x^2)^{-1/2}$ est continue sur $]-1;1[$. Par la propriété d'intégration des développements limités, on obtient

$$\mathrm{Arcsin}(x) \underset{x\to 0}{=} x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

Ainsi,
$\tan(x)-\mathrm{Arcsin}(x) \underset{x\to 0}{=} \left(x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)-\left(x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^3}{6}+o(x^3)$.

☐ $\sin x - \mathrm{Arctan} x \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)-\left(x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^3}{6}+o(x^3)$.

Par quotient,

$$\frac{\tan x - \mathrm{Arcsin} x}{\sin x - \mathrm{Arctan} x} \sim_{x\to 0} \frac{-x^3/6}{x^3/6} \sim_{x\to 0} 1$$

(Q 6) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\ln x}$;

Toujours le même changement de variables : $x-1 = h$.

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\ln x} = \frac{(1+h)^{1/2}-(1+h)^{1/3}}{\ln(1+h)}$$

☐ $(1+h)^{1/2}-(1+h)^{1/3} \underset{h\to 0}{=} 1+\frac{h}{2}+o(h)-\left(1+\frac{h}{3}+o(h)\right) \underset{h\to 0}{=} \frac{h}{6}+o(h)$.

Par quotient,

$$\frac{(1+h)^{1/2}-(1+h)^{1/3}}{\ln(1+h)} \sim_{h\to 0} \frac{h/6}{h} \sim_{h\to 0} \frac{1}{6}$$

Ainsi, $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\ln x} = 1/6$.

(Q 7) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln\frac{1+x}{1-x}}{\mathrm{Arctan}(1+x)-\mathrm{Arctan}(1-x)}$.

☐ On remarque que
$\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x)-\ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-\left(-x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right) \underset{x\to 0}{=} = 2x+o(x^2)$

☐ $f(x) = \mathrm{Arctan}(1+x)-\mathrm{Arctan}(1-x)$. Pourquoi pas utiliser la formule de Taylor Young pour conclure ! Cette fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ en tant que différence de fonctions qui le sont. On a $f(0) = 0$ et

$$f'(x) = \frac{1}{1+(1+x)^2}+\frac{1}{1+(1-x)^2} \Rightarrow f'(0) = 1$$

Par la formule de Taylor Young,

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} x+o(x).$$

Finalement,

$$\frac{\ln\frac{1+x}{1-x}}{\mathrm{Arctan}(1+x)-\mathrm{Arctan}(1-x)} \sim_{x\to 0} \frac{2x}{x} \sim_{x\to 0} 2.$$

Correction de l'exercice 22 :

1. L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}^*$.
2. On utilise un développement limité. $e^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+x^2/2+o(x^2) \Rightarrow f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x+x^2/2+o(x^2)}{x} \underset{x\to 0}{=} 1+x/2+o(x)$. Par conséquent, $\lim_0 f = 1$. On a donc :
   | f admet une limite finie en 0 ,
   | f est continue sur $\mathbb{R}^*$ en tant que produit de fonctions qui le sont.

   Par propriété, f est prolongeable par continuité en 0 et on pose :

$$f : x \to \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

   Cette fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}$.
3. ☐ La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ car produit de fonctions qui le sont.
   ☐ La fonction f admet un $DL1(0)$ donc par propriété, elle est dérivable en 0 et $f'(0) = 1/2$. Cherchons à montrer que f' est continue en 0. Pour cela, on doit montrer qu'elle admet une limite en 0 et on utilise notre nouvel outil, les développements limités !

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{xe^x-[e^x-1]}{x^2}$$

$$xe^x-[e^x-1] \underset{x\to 0}{=} (x-1)(1+x+x^2/2+o(x^2))+$$

$1 \underset{x\to 0}{=} (-1+1)+(1-1)x+(-1/2+1)x^2+o(x^2) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}x^2+o(x^2)$

Ainsi,

$$f'(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}+o(1)$$

Finalement, $\lim_0 f' = 1/2$. La fonction f' admet donc une limite finie en 0 et elle est donc continue en 0. On a montré que f est de classe C^1 en 0.

Finalement, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 23 :

(Q 1) $f(x)$ n'est pas défini si et seulement si $\cos(2x) = 1 \Leftrightarrow 2x = 0[2\pi] \Leftrightarrow x = 0[\pi]$. L'ensemble de définition de f est $\mathcal{D}_f = \cup_{k\in\mathbb{Z}}]k\pi;(k+1)\pi[$.
On a pour tout réel x : $f(x+2\pi) = f(x)$ en utilisant la 2π périodicité de $\cos$. Donc, f est également 2π périodique.

(Q 2) On calcule la limite de f en 0. On a une FI. Donc pour la lever, on effectue un équivalent. Pour l'obtenir ici, l'équivalent usuel en 0 de $\cos$ suffit.

$$f(x) \sim_{x\to 0} \frac{x^2/2}{(2x)^2/2} \sim_{x\to 0} \frac{1}{4}$$

Par propriété, $\lim_0 f = 1/4$. Cette fonction est continue sur $\mathcal{D}_f$ et admet une limite finie en 0. Par propriété, elle est donc prolongeable par continuité en 0, et ce prolongement, noté encore f, vérifie $f(0) = 1/4$.
Maintenant, on calcule la limite en π. Ici, pas de FI ! On a $\lim_{x\to\pi} 1-\cos(2x) = 0_+$ et $\lim_{x\to\pi}(1-\cos(x) = 2$. Par quotient, $\lim_\pi f = +\infty$. La limite est infini, donc f n'admet pas de prolongement par continuité en π.

(Q 3) On peut effectuer un $DL_1(0)$ de ce prolongement.

(a) Le numérateur. On part de $\cos(x) =_{x\to 0} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$. Donc, $1-\cos(x) =_{x\to 0} \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)$.

(b) De même, $\cos(2x) = 1 - \frac{[2x]^2}{2} + \frac{[2x]^4}{24} + \varepsilon(x)x^4$, avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$. Donc, $\frac{1}{1-\cos(2x)} = \frac{1}{2x^2 - \frac{2x^4}{3} + x^4\varepsilon(x)} = \frac{1}{2x^2} \times \frac{1}{1-x^2/3+\varepsilon(x)x^2}$.
De plus, $\frac{1}{1-X} =_{X\to 0} 1+X+o(X)$. On prend alors $X = x^2/3 - \varepsilon(x)x^2$ et on obtient

$$\frac{1}{1-\cos(2x)} =_{x\to 0} \frac{1}{2x^2} \times \left(1+\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right).$$

Finalement,

$$\begin{aligned} f(x) &=_{x\to 0} \left(\tfrac{x^2}{2} - \tfrac{x^4}{24} + o(x^4)\right) \times \tfrac{1}{2x^2} \times \left(1+\tfrac{x^2}{3}+o(x^2)\right) \\ &=_{x\to 0} \tfrac{1}{2} \times \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{x^2}{24} + o(x^2)\right) \times \left(1+\tfrac{x^2}{3}+o(x^2)\right) \\ &=_{x\to 0} \tfrac{1}{2} \times \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{x^2}{24} + o(x^2)\right) \times \left(1+\tfrac{x^2}{3}+o(x^2)\right) \\ &=_{x\to 0} \tfrac{1}{4} + \tfrac{x^2}{8} + o(x^2) \end{aligned}$$

La fonction admet donc un $DL_2(0)$ donc par troncature, un $DL_1(0)$. Par propriété, f est donc dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. De plus, $x \mapsto f(x) - 1/4$ est du signe de $x \mapsto x^2/8$ au voisinage de 0, donc positive. Ainsi, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de sa tangente en 0.

Correction de l'exercice 24 :

(a) $f(x) = x - \frac{2}{3} - \frac{4}{9x} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$. L'asymptote oblique a donc pour équation $y = x - \frac{2}{3}$ et la courbe représentative de f est en dessous de cette dernière au voisinage de $+\infty$.
(a) $f(x) = 1 + \frac{1}{x\ln(x)} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x\ln(x)}\right)$. L'asymptote oblique a donc pour équation $y = 1$ et la courbe représentative de f est au dessus de cette dernière au voisinage de $+\infty$.
(c) $f(x) = x + 3 + \frac{1}{x} + o_{+\infty}\left(\frac{5}{2x}\right)$. L'asymptote oblique a donc pour équation $y = x+3$ et la courbe représentative de f est au dessus de cette dernière au voisinage de $+\infty$.
(d) $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$. L'asymptote oblique a donc pour équation $y = x+1$ et la courbe représentative de f est au dessus de cette dernière au voisinage de $+\infty$.
(e) $f(x) = x + \frac{2}{3x} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$. L'asymptote oblique a donc pour équation $y = x$ et la courbe représentative de f est au dessus de cette dernière au voisinage de $+\infty$.
(f) $f(x) = \frac{\pi}{2}x - 1 + \frac{\pi}{4x} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$. L'asymptote oblique a donc pour équation $y = x\frac{\pi}{2}x$ et la courbe représentative de f est au dessous de cette dernière au voisinage de $+\infty$.

⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆