

Limites et continuité des fonctions

LES INCONTOURNABLES

Limites

Exercice 1 : [corrigé] En utilisant la définition de la limite, montrer que :

$$(Q1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x+4} = \frac{1}{2};$$

$$(Q2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 3} = +\infty.$$

Exercice 2 : Étudier la limite de la fonction suivante en 0 : $f : \begin{cases} \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x}{2x + |x|} \end{cases}$.

Exercice 3 : On considère la fonction définie par : $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x - [x] \end{cases}$. Montrer que f n'admet pas de limite en $+\infty$.

Exercice 4 : [corrigé] Soit f une fonction T périodique définie sur $\mathbb{R}$ possédant une limite finie en $+\infty$.

(Q1) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}; f(x) = f(x + nT)$.

(Q2) Montrer que f est constante.

Exercice 5 : [corrigé] Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) \end{cases}$. Calculer la limite de f en $a = +\infty$.

Continuité

Exercice 6 : Les fonctions suivantes sont-elles continues sur $\mathbb{R}$? (a) $f(x) = [x]$; (b) $g(x) = [x] \sin(\pi x)$.

Exercice 7 : Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = e^{-1/x^2}$ admet un prolongement par continuité sur $\mathbb{R}$ que l'on précisera.

Exercice 8 : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)^2 = 1$.

1. Donner un exemple de fonction non constante vérifiant les hypothèses ci-dessus.
2. On suppose de plus f continue sur $\mathbb{R}$. Montrer, en raisonnant par l'absurde, que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1$.

Exercice 9 : [corrigé] Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et telle que pour tout $x \in \mathbb{R}, f\left(\frac{x+1}{2}\right) = f(x)$. Soit la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2}$ et $u_0 = x$.

(Q1) Déterminer une expression simple de u_n en fonction de x et n , puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(Q2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, f(x) = f(u_n)$. Conclure.

POUR S'ENTRAÎNER

Exercice 10 : [corrigé] Montrer que la fonction suivante n'admet pas de limite en $a = +\infty$:

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \cos(x) + \sin(x) \end{cases}.$$

Exercice 11 : (**) Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x - 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 2x + 1$ si $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

(Q 1) Montrer que la fonction n'admet pas de limite en 0.

(Q 2) Si la fonction admet une limite en -2 , quelle est-elle? En revenant à la définition, montrer que la fonction a une limite en -2 .

Exercice 12 : [corrigé] Calculer les limites suivantes :

(Q 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\ln(x)}}{(\ln(x))^{\ln(x)}}$

(Q 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\operatorname{sh}(3x)}{\operatorname{sh}(6x)} \right)$

(Q 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} - (\ln(x))^2$

(Q 3) $\lim_{x \rightarrow 0+} \cos(x) \ln(x)$

(Q 5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 e^{-\sqrt{x}}$

Exercice 13 : [corrigé] Déterminer les limites en $+\infty$ des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$; (b) $f(x) = \frac{x^2 - \lfloor x \rfloor}{x^2 + \lfloor x \rfloor}$;

Exercice 14 : On note F la primitive sur $\mathbb{R}^+$ de la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{1+x^3}$ qui s'annule en 0,

c'est à dire $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^3}$.

(Q 1) Montrer que F est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. En déduire que F admet une limite en $+\infty$.

(Q 2) (Q a) Montrer que : $\forall x \geq 1, \frac{1}{1+x^3} \leq \frac{1}{1+x^2}$.

(Q b) En déduire que pour $x \geq 1, \int_1^x \frac{dt}{1+t^3} \leq \arctan(x) - \frac{\pi}{4}$.

(Q c) En déduire pour tout $x \geq 0 : F(x) \leq 1 + \frac{\pi}{2}$, puis que F admet une limite finie en $+\infty$.

Continuité d'une fonction sur un intervalle

Exercice 15 : [corrigé] Déterminer les valeurs de a et b pour que la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + a^2} & \text{si } x < 0 \\ 1 + b & \text{si } x = 0 \\ bx + 2a & \text{sinon} \end{cases}$$

soit continue en 0.

Exercice 16 : [corrigé] Étudier la continuité sur $\mathbb{R}$ des fonctions ci-dessous :

(a) $f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 0$; (b) $f(x) = \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 0$.

Prolongement par continuité

Exercice 17 : Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité au point a indiqué :

- (Q 1) $f(x) = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ en $a = 0$
- (Q 2) $f(x) = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x^2-2x-3}$ en $a = 3$ puis $a = -1$
- (Q 3) $f(x) = x^2 \ln(x)$ en $a = 0_+$.
- (Q 4) $f(x) = x^2 e^{\frac{-1}{x}}$ en $a = 0$.
- (Q 5) $f(x) = \frac{\sqrt{3x^2+1}-2}{x-1}$ en $a = 1$.

Exercice 18 : Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2-1}} \text{ si } |x| > 1 \\ f(x) = x^2 - 3x + 2 \text{ si } |x| < 1 \end{cases}$$

- (Q 1) Étudier les limites de f en 1_+ et en 1_- . Peut-on prolonger f par continuité en 1?
- (Q 2) Mêmes questions en -1 .

Équations fonctionnelles.

Exercice 19 : [corrigé] Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues en 0 et telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f(3x) = f(x)$.

Dans les exercices sur les suites de nombres réels, on a montré que pour tout réel x , il existe une suite de nombres rationnels $(\frac{[nx]}{n})_{n \geq 1}$ qui converge vers x . Autrement dit, pour tout réel, il existe une suite de rationnels qui converge vers ce réel.

Exercice 20 : [corrigé] (**) Soient f et g deux fonctions continues définies sur $\mathbb{R}$ et coïncidant sur $\mathbb{Q}$. Montrer que $f = g$.

Exercice 21 : [corrigé] (*) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (E).$$

Soit $a = f(1)$.

- (Q 1) Déterminer $f(0)$.
- (Q 2) Calculer $f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis pour $n \in \mathbb{Z}$.
- (Q 3) Calculer $f(r)$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$.
- (Q 4) Soit x un nombre réel. En considérant une suite (r_n) de rationnels convergeant vers x , démontrer que $f(x) = ax$.
- (Q 5) En déduire l'ensemble des fonctions vérifiant (E) .

Étude des suites récurrentes.

Exercice 22 : Étudier le comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par : $u_0 \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2$.

Exercice 23 : Étudier le comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par : $u_0 \geq 1; \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \ln(u_n)$.

Exercice 24 : Étudier le comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par : $u_0 \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = e^{u_n} - 1$

Exercice 25 : Étudier le comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$u_0 = \sqrt{a}, u_1 = \sqrt{a + \sqrt{a}}, u_2 = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}} \dots$$

Exercice 26 : Étudier le comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$u_0 \in [0; 1], u_{n+1} = 1 - u_n^2$$

Exercice 27 : Étudier le comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par : $u_0 \in]0; 1[, u_{n+1} = u_n - u_n^2$, puis de $\left(\sum_{k=0}^n u_k^2\right)_{n \geq 0}$ et de $\left(\prod_{k=0}^n [1 - u_k]\right)_{n \geq 0}$.

Théorèmes des valeurs intermédiaires et autres.

Exercice 28 : [corrigé] Montrer que l'équation $\tan(x) = x$ admet une infinité de racines réelles.

Exercice 29 : [corrigé]

(Q 1) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $5f(c) = 2f(a) + 3f(b)$

(Q 2) Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et vérifiant $f(0) = f(1)$ Montrer qu'il existe $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$ tel que $f(\alpha + \frac{1}{2}) = f(\alpha)$.

Exercice 30 : Une voiture part de Bordeaux à l'instant $t = 0$ et atteint Moissac à l'instant $t = 2$ après avoir parcouru 180km. On note f la fonction qui à $t \in [0; 2]$ associe la distance parcourue par la voiture. On suppose que f est continue. Démontrer qu'il existe deux villes A et B distantes de 90km telles que la voiture mette exactement une heure pour aller de A à B . Pour cela, on considère la fonction : $g : t \mapsto f(t+1) - f(t)$. On distinguera les cas : $f(1) = 90$ ou $f(1) > 90$ et $f(1) < 90$.

Exercice 31 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{+\infty} f = +\infty$ et $\lim_{-\infty} f = -\infty$. On note $y \in \mathbb{R}$.

1. Justifiez l'existence d'un réel $A > 0$ tel que $\forall x \geq A, f(x) > y$ et $\forall x \leq -A, f(x) < y$.
2. Justifiez l'existence de $x_0 \in [-A; A]$ tel que : $y = f(x_0)$.

Exercice 32 : [corrigé] Montrer qu'une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue et périodique est bornée.

Exercice 33 : [corrigé] Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

(Q 1) Montrer que $f \circ g$ est bornée.

(Q 2) Montrer que $g \circ f$ est bornée.

Exercice 34 : [corrigé] Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction **continue et strictement positive**. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que : $\forall x \in [a; b], f(x) \geq c$.

Exercice 35 : (*) Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ **continue**. On suppose que $\lim_{+\infty} f = \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Exercice 36 : Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes.

(Q 1) Démontrer si f est continue alors la fonction $|f| : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est continue.

(Q 2) Démontrer que la réciproque est fausse.

Exercice 37 : [indications]

(Q 1) Si x est un réel strictement positif, calculer $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{x^t - 1}{t}$.

(Q 2) Soit z un nombre complexe de module non-nul r et d'argument θ . Démontrer que la limite $\ell = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{r^t e^{i\theta t} - 1}{t}$ existe et la calculer. Que vaut e^ℓ ?

Indications

Exercice 37 : (1) $\frac{x^t - 1}{x} = \ln(x) \times \frac{e^{t \ln(x)} - 1}{t \ln(x)}$ et penser au calcul de limites par taux d'accroissement.

(2) Calculer les limites des parties réelles et imaginaires.

Pour la partie réelle, on l'écrit sous la forme $\cos(t) \left(\frac{r^t - 1}{t} \right)$ $\frac{\cos(t) - 1}{t}$. En utilisant la question précédente et en pensant à nouveau au calcul de limite par taux d'accroissement, on en déduit que $\ell = \ln(r) + i\theta$ et donc $e^\ell = z$.

Correction de l'exercice 1 :

(Q 1) On fixe $\varepsilon > 0$, et on regarde : $\left| \frac{2}{x+4} - \frac{1}{2} \right| = \frac{|x|}{2|x+4|}$. Or, si $x \in [-1; 1]$, $x+2 \geq 1$ et donc : $|x+4| \geq 3$. Il s'ensuit : $\frac{|x|}{|x+2|} \leq \frac{|x|}{6}$. Alors, en posant : $\eta = \min(\varepsilon/6, 1) > 0$, nous avons : $\forall x \in \mathbb{R} - 2 \cap [-\eta; \eta]$, $|x+2| \geq 1$ et $|x| \leq \varepsilon$, d'où :

$\forall x \in \mathbb{R} - 2 \cap [-\eta; \eta]$, $|f(x) - \frac{1}{2}| \leq \varepsilon$. Donc, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R} - 2 \cap [-\eta; \eta]$, $|f(x) - \frac{1}{2}| \leq \varepsilon$, ce qui, par définition de la limite, revient à dire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$.

(Q 2) Soit $M > 0$, alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2 + x + 3} \geq \sqrt{x}$ et $\sqrt{x} \geq M$ si et seulement si $x \geq M^2$. Par conséquent : si $x \geq M^2$, $\sqrt{x^2 + x + 3} \geq \sqrt{x} \geq M$. Bref, en posant $A = M^2 > 0$, nous avons :

$\forall M > 0$, $\exists A > 0$ tel que : $\forall x \geq A$, $f(x) \geq M$ ce qui revient à dire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ par définition de la limite.

Correction de l'exercice 4 :

(1) Ce résultat est immédiat puisque si f est T périodique alors f est nT périodique.

(2) Notons $L = \lim_{+\infty} f$. On sait que la suite $(x + nT)$ admet $+\infty$ comme limite en $+\infty$. Par propriété, la suite $(f(x + nT))_{n \geq 0}$ tend alors vers L . Cependant, cette suite est constante égale à $f(x)$. Donc $f(x) = L$. Ceci étant vrai pour tous les réels x , on en déduit que f est constante.

Correction de l'exercice 5 :

Le problème de cette fonction est la fonction $\cos$. On remarque que $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $|f(x)| \leq 1 \times |\sin(\frac{1}{x})|$. Or cette dernière admet 0 pour limite en $+\infty$. Par le théorème de l'encadrement, f admet une limite en $+\infty$, égale à 0.

Correction de l'exercice 9 :

(1) On reconnaît une suite linéaire d'ordre 1. Le point fixe est $l = \frac{l+1}{2} \Leftrightarrow l = 1$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 1$. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2} - 1 = \frac{u_n - 1}{2} = \frac{1}{2} \times v_n$. Cette suite est donc géométrique de raison $1/2$. Par propriété, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n v_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^n [x - 1] \Rightarrow u_n = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n [x - 1]$. Puisque la raison positive est strictement inférieure à 1, on en déduit $u_n \rightarrow 1$.

(2) Par récurrence, on établit ce résultat. Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, elle est continue en 1. Par propriété, $(f(u_n))$ converge donc vers $f(1)$. Par passage à la limite dans l'égalité précédente, on obtient $f(x) = f(1)$. Ceci étant vrai pour tous les réels x , on en déduit que la fonction est constante.

Correction de l'exercice 10 :

Comme d'habitude, prenons les deux suites $(2n\pi)_{n \geq 0}$ et $(2n\pi + \pi)_{n \geq 0}$ admettant $+\infty$ comme limite. De plus, $f(2n\pi) = 1 \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 1$ et $f(2n\pi + \pi) = -1 \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} -1$. Par la caractérisation séquentielle de la limite, on en déduit que f n'admet pas de limite en $+\infty$.

Correction de l'exercice 12 :

(1) $\frac{x^{\ln(x)}}{(\ln(x))^{\ln(x)}} = \frac{e^{[\ln(x)]^2}}{e^{\ln(x) \ln(\ln(x))}} = e^{\ln(x) (\ln(x) - \ln(\ln(x)))} = e^{\ln(x) (\ln(x/\ln(x)))}$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} x/\ln(x) = 0$ par croissances comparées. Par composition, on en déduit $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x/\ln(x))) = -\infty$. Par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) (\ln(x/\ln(x))) = +\infty$. Enfin, par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\ln(x)}}{(\ln(x))^{\ln(x)}} = +\infty$.

(2)

$$\left(\frac{\text{sh}(3x)}{\text{sh}(6x)} \right) = \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{e^{6x} - e^{-6x}} = e^{-3x} \times \frac{1 - e^{-6x}}{1 - e^{-12x}}.$$

Par limites usuelles, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-6x}}{1 - e^{-12x}} = 1$. Par conséquent, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\text{sh}(3x)}{\text{sh}(6x)} \right) = 0$.

(3) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos(x) \ln(x) = -\infty$ par produit de limites usuelles.

(4) $\sqrt{x} - \left(\ln(x) \right)^2 = \sqrt{x} \left(1 - \frac{(\ln(x))^2}{\sqrt{x}} \right)$. Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x))^2}{\sqrt{x}} = 0$. Par produit de limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} - \left(\ln(x) \right)^2 = +\infty$.

(5) $x^5 e^{-\sqrt{x}}$ est une croissance comparée : $\frac{(\sqrt{x})^4}{e^{\sqrt{x}}}$. On sait que $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{10}}{e^x} = 0 \text{ par CC} \end{cases}$ Ainsi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 e^{-\sqrt{x}} = 0$.

Correction de l'exercice 13 :

- (a) Pour tout x , $\lfloor x \rfloor \leq x$ et d'autre part : $x < \lfloor x \rfloor + 1 \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor > x - 1$, d'où l'encadrement : $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$. Ce qui donne en divisant par $x > 0$: $\forall x \in]0; +\infty[$, $\frac{x-1}{x} < \frac{\lfloor x \rfloor}{x} \leq 1$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} = 1$ donc par théorème d'encadrement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x} = 1$.

(b) $f(x) = \frac{1 - \frac{\lfloor x \rfloor}{x}}{1 + \frac{\lfloor x \rfloor}{x^2}}$. Toujours par encadrement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x^2} = 0$ ce qui donne : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

Correction de l'exercice 15 :

Par opérations usuelles, $\lim_{0-} f = |a|$, $\lim_{0+} f = 2a$. La fonction f est continue en 0 si et seulement si f admet une limite en 0 ce qui équivaut ici à $2a = |a| = 1 + b \Leftrightarrow a = 0, b = -1$.

Correction de l'exercice 16 :

- Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}^*$ en tant que produit de fonctions continues qui le sont. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $|x^2 \cos(\frac{1}{x})| \leq x^2$. Par le théorème de l'encadrement, $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos(\frac{1}{x}) = 0 = f(0)$. La fonction f admet donc une limite finie en 0 et elle est par définition continue en 0. Finalement, elle est continue sur $\mathbb{R}$.
- Même principe. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}^*$ en tant que produit de fonctions continues qui le sont. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $|\sin(x) \sin(\frac{1}{x})| \leq |\sin(x)|$. Par le théorème de l'encadrement, $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(1/x) \times \sin(x) = 0 = f(0)$. La fonction f admet donc une limite finie en 0 et elle est continue en 0. Finalement, elle est continue sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 19 :

On vérifie que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, f(x) = f(\frac{x}{3^n})$. Par continuité de la fonction f en 0 et puisque $\frac{x}{3^n} \rightarrow 0$, par passage à la limite dans l'égalité, on obtient $f(x) = f(0)$. On a donc montré que si f vérifie les conditions demandées alors f est une fonction constante. La réciproque est immédiate, mais encore faut-il le dire. L'ensemble des fonctions est :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & a \end{array} ; a \in \mathbb{R} \right\}$$

Correction de l'exercice 20 :

Soient f et g deux fonctions continues définies sur $\mathbb{R}$ et coïncidant sur $\mathbb{Q}$. Montrer que $f = g$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- On sait que la suite $(\frac{\lfloor nx \rfloor}{n})_{n \geq 1}$ est une suite de rationnelles convergeant vers x .
- Or $\forall n \geq 1, f(\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}) = g(\frac{\lfloor nx \rfloor}{n})$. De plus, les fonctions f et g sont continues.

- Par propriété, $(f(\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}))_{n \geq 1}$ converge vers $f(x)$ et $(g(\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}))_{n \geq 1}$ converge vers $g(x)$.
- En passant à la limite dans l'égalité, on obtient $f(x) = g(x)$.

Ceci étant vraie pour tout réel x , on en déduit que les fonctions f et g sont égales.

Correction de l'exercice 21 :

Soit $a = f(1)$.

(Q 1) En utilisant la relation vérifiée par f , on a $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+0) = f(x) + f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$.

(Q 2) On montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_n : "f(n) = nf(1)"$.

- $\mathcal{P}_0$ est vraie par 1.
- Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un rang $n \in \mathbb{N}$. Montrons alors que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. On a $f(n+1) = f(n) + f(1)$ d'après la relation (E). Par $\mathcal{P}_n$, on en déduit que $f(n+1) = nf(1) + f(1) = (n+1)f(1)$. Ainsi $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
- Par le théorème de Récurrence, on en déduit $\forall n \geq 0, f(n) = nf(1)$.

Soit alors $n \in \mathbb{Z} - \mathbb{N}$. Alors $-n \in \mathbb{N}$ et $f(-n) = -nf(1)$. De plus, d'une part, $f(n-n) = f(n) + f(-n)$ et d'autre part, $f(n-n) = f(0) = 0$. Ainsi, $f(n) = -f(-n) = -(-nf(1)) = nf(1)$.

Finalement, $\forall n \in \mathbb{Z}, f(n) = nf(1)$.

(Q 3) Soit $r \in \mathbb{Q}$. Alors $\exists p, q \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, r = \frac{p}{q}$. On obtient : $f(r) = f(\frac{p}{q}) = p \times f(\frac{1}{q})$ par la question précédente. Reste à calculer $f(\frac{1}{q})$. On utilise que $f(q \times \frac{1}{q}) = f(1) = a$ d'une part ou $f(q \times \frac{1}{q}) = q \times f(\frac{1}{q})$. Finalement, $f(\frac{1}{q}) = \frac{1}{q}a$ et on en déduit que

$$f(r) = p \times \frac{1}{q} f(1) = ra.$$

(Q 4) Soit x un nombre réel. Soit $(r_n)_{n \geq 0}$ une suite de rationnelles convergeant vers x . On a $f(r_n) = r_n f(1)$. Puisque f est une fonction continue et que $r_n \rightarrow x$, on en déduit par propriété que $f(r_n) \rightarrow f(x)$. Par passage à la limite dans l'égalité précédente, on obtient $f(x) = ax$.

(Q 5) ANALYSE. Si f est continue et vérifie (E) alors $\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax$.

SYNTHESE. Il est immédiat de vérifier que les fonctions linéaires précédentes vérifient l'équation (E).

CONCLUSION. L'ensemble des fonctions solutions de (E) est :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax \end{array} ; a \in \mathbb{R} \right\}$$

Correction de l'exercice 28 :

Fixons $n \in \mathbb{Z}$ et étudions l'équation sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2} + n\pi; \frac{\pi}{2} + n\pi[$. On pose : $g(x) = \tan(x) - x$.

HYPO (1) On a $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2} + n\pi^+} g = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + n\pi^-} g = +\infty$. Donc, par propriété, g est négative au voisinage de $-\frac{\pi}{2} + n\pi_+$ et ainsi il existe $A > -\frac{\pi}{2} + n\pi$ tel que $g(A) \leq 0$. De même, g est positive au voisinage de $\frac{\pi}{2} + n\pi_-$ et ainsi il existe $B < \frac{\pi}{2} + n\pi_-$ tel que $g(B) \geq 0$.

HYPO (2) g est continue sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2} + n\pi; \frac{\pi}{2} + n\pi[$.

Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc un réel $c_n \in]-\frac{\pi}{2} + n\pi; \frac{\pi}{2} + n\pi[$ tel que $g(c_n) = 0$. Ceci étant vraie pour tout $n \in \mathbb{Z}$, et étant donné que $\forall n \in \mathbb{Z}, c_n < \frac{\pi}{2} + n\pi < c_{n+1}$, on en déduit qu'il existe une infinité de solutions de l'équation $\tan(x) = x$.

$c = f(\alpha)$ on en déduit le résultat demandé.



Correction de l'exercice 29 :

- (1) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On cherche si il existe $c \in [a, b]$ tel que $5f(c) = 2f(a) + 3f(b) \Leftrightarrow f(c) - \left(\frac{2}{5}f(a) + \frac{3}{5}f(b)\right) = 0$. On pose $g : x \mapsto f(x) - \left(\frac{2}{5}f(a) + \frac{3}{5}f(b)\right)$. Puis, utilisez le théorème des valeurs intermédiaires.
- (2) De même, on pose : $g : x \mapsto f(x + \frac{1}{2}) - f(x)$. Puis, utilisez le théorème des valeurs intermédiaires.

Correction de l'exercice 32 :

Soit T la période de f . Alors f est continue sur le segment $[0; T]$. Par le théorème de Weierstrass, la fonction est bornée (et atteint ses bornes). Ainsi $\exists M \in \mathbb{R}, |f| \leq M$. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z}, x - nT \in [0; T]$. Donc, $|f(x)| = |f(x - nT)| \leq M$. Ceci étant vraie pour tout réel x ,

on en déduit que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 33 :

- (Q 1) La fonction f est bornée, donc $\exists M \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, |f(y)| \leq M$. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \in \mathbb{R} \Rightarrow |f(g(x))| \leq M$. On a montré que $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |f \circ g(x)| \leq M$. Par propriété, **la fonction $f \circ g$ est donc bornée.**
- (Q 2) La fonction f est bornée, donc $\exists M \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, |f(y)| \leq M$ et $f(\mathbb{R}) \subset [-M; M]$ ce qui implique que $g(f(\mathbb{R})) \subset g([-M; M])$. Par le théorème de Weierstrass, g étant continue sur $[-M; M]$, on en déduit que $g([-M; M])$ est **un intervalle fermé borné**. Donc $\exists m', M' \in \mathbb{R}, \forall x \in [-M; M], m' \leq g(x) \leq M'$. Par conséquent, $g \circ f$ est une fonction bornée.

Correction de l'exercice 34 :

Puisque f est continue sur le segment $[a; b]$, d'après le théorème de Weierstrass (ou des bornes atteintes), on sait qu'il existe $\alpha \in [a; b]$ tel que : $f(\alpha) = \inf\{f(x); x \in [a; b]\}$. Ainsi, $\forall x \in [a; b], f(x) \geq f(\alpha)$. Or $f(\alpha) > 0$ car f est strictement positive sur $[a; b]$ par hypothèse. En posant :