

Intégration

LES INCONTOURNABLES

Exercice 1 : Quelques souvenirs. Calculer :

(Q 1) $I = \int_{1/4}^1 \frac{1}{t+\sqrt{t}} dt$ en effectuant le changement de variable $u = \sqrt{t}$.

(Q 2) $J = \int_0^1 \frac{1}{t^2-t-6} dt$ en effectuant une DES.

(Q 3) $K = \int_0^1 \frac{1}{t^2-3t+3} dt$

(Q 4) $K_1 = \int_0^1 \frac{t^2-3t}{t^2-3t+3} dt$

(Q 5) $L = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} \frac{\ln(t)}{t^n} dt$ en effectuant une IPP, avec $n \geq 2$.

Exercice 2 : [corrigé] Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \int_0^1 t^n e^{-t} dt$.

(Q 1) Montrer, à l'aide d'encadrements, que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

(Q 2) Calculer I_0 .

(Q 3) Donner une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n .

(Q 4) On pose $W_n = \frac{I_n}{n!}$ pour tout entier n .

(a) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, W_k - W_{k-1} = -\frac{1}{e \times k!}$.

(b) En déduire $W_n = 1 - \frac{1}{e} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$.

(c) En déduire que $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$.

Exercice 3 : [corrigé]  (**lemme de Riemann-Lebesgue**) Soit f une fonction de classe C^1 sur $[a; b]$.

À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \sin(nt) dt = 0$.

Exercice 4 : [corrigé]

(Q 1) Calculer $\int_0^1 \ln(1+x) dx$.

(Q 2) Calculer alors la limite de la suite de terme général : $v_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$

Exercice 5 : [corrigé]

(Q 1) En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $t \mapsto \ln(1+t)$ en x et $x_0 = 0$, montrer que : $\forall n \geq 1$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + (-1)^n \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt$$

(Q 2) En déduire que :

$$\ln(2) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} + (-1)^n \int_0^1 \left(\frac{1-t}{1+t} \right)^n \frac{dt}{1+t}.$$

(Q 3) On pose, pour tout entier n , $I_n = \int_0^1 \left(\frac{1-t}{1+t} \right)^n \frac{dt}{1+t}$. Montrer, à l'aide du changement de variable

$$u = \frac{1-t}{1+t} \text{ que :}$$

$$I_n = \int_0^1 \frac{u^n}{1+u} du.$$

(Q 4) En déduire, à l'aide d'encadrements, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$. Retrouver alors la limite de la suite de terme

$$\text{général } \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} \right)_{n \geq 1}.$$

Exercice 6 : [corrigé] [EXTRAIT BANQUE PT]

On pose pour tout réel x , $F(x) = x \int_1^2 e^{-x^2 t^2} dt$ et $G(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$.

(Q 1) (Q a) Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^1$ et donner G' .

(Q b) En déduire la monotonie de G puis les deux comportements possibles pour G en $+\infty$.

(Q c) On rappelle que $\forall t \in \mathbb{R}, 1+t \leq e^t$. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}^+, G(x) \leq \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$ ainsi que $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) \in \mathbb{R}$. On ne demande pas de calculer cette limite.

(Q 2) Étudier la parité de F .

(Q 3) (Q a) Montrer que pour tout réel x :

$$F(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} dt.$$

(Q b) En déduire que F est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$ pour tout réel x .

(Q 4) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$.

(Q 5) (Q a) Donner le $DL_3(0)$ de G et en déduire le $DL_3(0)$ de F .

(Q b) En déduire une équation cartésienne de la tangente en 0 ainsi que la position relative de cette dernière par rapport à la courbe représentative de F .

(Q 6) Montrer que :

$$\forall x > 0, x e^{-4x^2} \leq F(x) \leq x e^{-x^2}$$

(Q 7) Tracer l'allure du graphe de la fonction F sur un intervalle centré en 0.

POUR S'ENTRAÎNER

Exercice 7 : Soit Ψ l'application définie par

$$\Psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (a; b) & \mapsto & \int_0^1 \frac{ax+b}{(x+1)(x-2)} dx \end{array} .$$

(Q 1) Démontrer que Ψ est linéaire.

(Q 2) On pose $u = (1; 1)$ et $v = (1; -2)$. Démontrer que $(u; v)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$ et donc une base de cet espace vectoriel.

(Q 3) Calculer $\Psi(u)$ et $\Psi(v)$.

(Q 4) Expliciter alors la valeur de $\Psi(a; b)$ pour tout $(a; b) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 8 : [corrigé] Soit $n \in \mathbb{N}$.

(Q 1) Calculer : $\int_0^1 t^k dt$ avec $k \in \{0; \dots; n\}$.

(Q 2) Donner sous la forme d'une puissance : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k$.

(Q 3) En déduire que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{k+1} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$.

Exercice 9 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $u_n = \int_0^\pi \frac{\sin(x)}{x+n} dx$. Déterminer la limite de (u_n) puis un équivalent. Pour ce dernier, on pourra effectuer une intégration par parties et afin d'obtenir une expression du type $u_n = v_n + o(v_n)$.

Exercice 10 : [corrigé] (**Intégrales de Wallis**) Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt$.

(Q 1) Calculer I_0 et I_1 .

(Q 2) Montrer que la suite (I_n) est décroissante et est strictement positive.

(Q 3) Soit $n \in \mathbb{N}$. En remarquant que $\sin^n(t) - \sin^{n+2}(t) = \cos(t) \times \cos(t) \sin^n(t)$ et en effectuant une intégration par parties, montrer que

$$I_n - I_{n+2} = \frac{1}{n+1} I_{n+2}$$

(Q 4) En déduire que la suite de terme général : $v_n = (n+1)I_n I_{n+1}$ est constante égale à $\frac{\pi}{2}$.

(Q 5) En utilisant les variations de la suite (I_n) , montrer que pour tout entier n :

$$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$$

(Q 6) En déduire que $I_n \sim I_{n+1}$.

(Q 7) Montrer alors que $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

(Q 8) Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}, I_{2p} = \frac{(2p)!}{4^p (p!)^2} \frac{\pi}{2}$ et en déduire : $\frac{1}{\sqrt{p}} \frac{4^p (p!)^2}{(2p)!} \sim \sqrt{\pi}$.

Exercice 11 : Calculer les limites des suites de terme général :

(Q 1) $\sum_{k=0}^n \frac{k}{k^2 + n^2}.$

(Q 3) $\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3 + k^3}$

(Q 2) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}$

(Q 4) $\sum_{k=0}^{2n} \frac{k}{k^2 + n^2}.$  Le dernier terme de la somme est d'indice $2n$.

Exercice 12 : [corrigé] Soit $f : [0, 1] \rightarrow \boxed{[0, 1]}$ continue et non nulle telle que

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 f^2(x) dx \quad \text{où } f^2 = f \times f.$$

Montrer que $f = 1$.

Exercice 13 : [corrigé] En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $t \mapsto \ln(1 + t)$ à l'ordre 2 et 3, en $x_0 = 0$ montrer que

$$\forall x \geq 0; x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

Exercice 14 : On considère la fonction F définie par : $F(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + 1}}.$

(Q 1) Déterminer le domaine de définition D de F et montrer que F est de classe C^1 sur D .

(Q 2) Calculer $F'(x)$ et en déduire les variations de F .

(Q 3) Montrer que F est impaire et pour tout $x > 0$, $0 \leq F(x) \leq \frac{1}{2x}$. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$.

Exercice 15 : [corrigé] On considère la fonction F définie par : $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln^2(t)}.$

(Q 1) Montrer que F est définie et de classe C^1 sur $I =]1; +\infty[$.

(Q 2) Calculer $F'(x)$ et en déduire les variations de F .

(Q 3) À l'aide d'encadrements, montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$.

(Q 4) Montrer que : $\forall t \geq 1, 0 \leq \ln(t) \leq t - 1$. En déduire $\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x)$.

Problème. [corrigé]

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ et $v_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)}$.

(a) Étudier la monotonie de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ puis montrer que pour tout $n \geq 2$, $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq v_n$.

(b) Déterminer deux réels a et b pour lesquels : $\forall x \in \mathbb{R} - \{0; 1\}$, $\frac{1}{x(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1}$ puis donner une expression simple de v_n .

(c) Montrer que (u_n) converge vers un réel que l'on notera ℓ et que l'on ne cherchera pas à expliciter.

2. On pose pour tout réel t , $h(t) = \frac{t^2}{2\pi} - t$ et on note φ la fonction définie sur $[0; \pi]$ par

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{h(t)}{2 \sin(\frac{t}{2})} & \text{si } t \in]0; \pi[\\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

(a) Montrer que φ est continue sur $[0; \pi]$.

(b) En calculant la limite d'un taux d'accroissement, montrer que φ est dérivable en 0 et calculer $\varphi'(0)$.

(c) Justifier que φ est de classe C^1 sur $]0; \pi[$ et calculer $\varphi'(t)$ pour $t \in]0; \pi[$.

(d) Prouver que φ' est continue en 0.

(e) En déduire que φ est de classe C^1 sur $[0; \pi]$.

3. (a) Montrer, à l'aide d'intégrations par parties, que pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^\pi h(t) \cos(kt) dt = \frac{1}{k^2}.$$

(b) Soit $t \in]0; \pi]$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n e^{ikt} = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} e^{int/2}$. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2},$$

On rappelle : $\sin(a) \cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$.

(c) Justifier l'existence de $\int_0^\pi \varphi(t) \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right) dt$ et démontrer, en vous aidant des questions précédentes, que :

$$\int_0^\pi \varphi(t) \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right) dt = \frac{1}{2} \int_0^\pi h(t) dt + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}.$$

4. (a) Montrer que :

$$\int_0^\pi \varphi(t) \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right) dt = \frac{-1}{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \int_0^\pi \varphi'(t) \cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right) dt.$$

(b) On note $M = \max_{t \in [0; \pi]} |\varphi'(t)|$. Justifier l'existence de M et montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| \int_0^\pi \varphi'(t) \cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right) dt \right| \leq M\pi.$$

(c) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \varphi(t) \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right) dt = 0$ puis que la suite (u_n) converge vers $\frac{\pi^2}{6}$.

Indications

Correction de l'exercice 2 :

(Q 1) On a $\forall t \in [0; 1], 0 \leq t^n e^{-t} \leq t^n$. Par croissance de l'intégrale,

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

Par le théorème de l'encadrement, on en déduit que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

(Q 2) $I_0 = \int_0^1 e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^1 = \boxed{1 - 1/e}$.

(Q 3) Par intégration par parties,

$$I_{n+1} = [t^{n+1}(-e^{-t})]_0^1 + (n+1) \int_0^1 t^n e^{-t} dt$$

Donc :

$$\boxed{I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n}$$

(Q 4) On pose $W_n = \frac{I_n}{n!}$ pour tout entier n .

(a)

$$\begin{aligned} W_k - W_{k-1} &= \frac{I_k}{(k)!} - \frac{I_{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \frac{-\frac{1}{e} + kI_{k-1}}{k!} - \frac{I_{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \frac{-1}{e \times k!}. \end{aligned}$$

(b) Sommons :

$$\sum_{k=1}^n W_k - W_{k-1} = \sum_{k=1}^n \frac{-1}{e \times k!}$$

On reconnaît une somme télescopique.

$$W_n - W_0 = \sum_{k=1}^n \frac{-1}{e \times k!}$$

Or $W_0 = I_0 = 1 - 1/e$. Ainsi,

$$W_n = 1 - 1/e + \sum_{k=1}^n \frac{-1}{e \times k!} = \boxed{1 - (1/e) \times \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}}$$

(c) La suite (I_n) converge vers 0, donc la suite (W_n) aussi. Ainsi,

$$1 - (1/e) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e \times 1$$

Correction de l'exercice 3 :

Par le théorème d'intégration par parties, pour $n \geq 1$,

$$\int_a^b f(t) \sin(nt) dt = \left[f(t) \times \frac{-\cos(nt)}{n} \right]_a^b - \int_a^b f'(t) \times \frac{-\cos(nt)}{n} dt$$

$$= \frac{f(a) \cos(na) - f(b) \cos(nb)}{n} + \int_a^b f'(t) \times \frac{\cos(nt)}{n} dt$$

Par l'inégalité triangulaire,

$$\left| \frac{f(a) \cos(na) - f(b) \cos(nb)}{n} \right| \leq \frac{1}{n} \times (|f(a)| + |f(b)|)$$

Par le théorème de l'encadrement, la suite de terme général $\frac{f(a) \cos(na) - f(b) \cos(nb)}{n}$ converge vers 0.

Par l'inégalité triangulaire,

$$\left| \int_a^b f'(t) \times \frac{\cos(nt)}{n} dt \right| \leq \int_a^b |f'(t)| \times \left| \frac{\cos(nt)}{n} \right| dt$$

Enfin, la fonction f' est continue puisque f est de classe C^1 . Donc par le théorème de Weierstrass, elle est bornée et atteint ses bornes. On note M un majorant. Finalement,

$$\forall t \in [a; b], |f'(t)| \times \left| \frac{\cos(nt)}{n} \right| \leq \frac{M}{n}$$

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$\left| \int_a^b f'(t) \times \frac{\cos(nt)}{n} dt \right| \leq \int_a^b \frac{M}{n} dt \leq \frac{M(b-a)}{n}$$

Par le théorème de l'encadrement, la suite de terme général $\int_a^b f'(t) \times \frac{\cos(nt)}{n} dt$ converge vers 0.

Finalement, par le théorème de l'encadrement, on a montré que la suite de terme général $\int_a^b f(t) \sin(nt) dt$ converge vers 0.

Correction de l'exercice 4 :

(Q 1) Une intégration par parties s'impose dans ce genre de cas.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln(1+x) dx &= \left[x \ln(1+x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx \\ &= \ln(2) - \int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1} dx = \ln(2) - \int_0^1 1 - \frac{1}{x+1} dx \\ &= \ln(2) - [1 - \ln(2)] = 2 \ln(2) - 1. \end{aligned}$$

(Q 2) On tente de reconnaître une série de Riemann. Pour cela, utilisons la fonction $\ln$ qui transforme un produit en une somme. $\ln(v_n) = \frac{1}{n} \times \sum_{k=1}^n \ln(1 + \frac{k}{n})$. Puisque la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est continue sur $[a; b]$, on en déduit que $\ln(v_n) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \ln(1+x) dx = 2 \ln(2) - 1$. Puisque $\exp$ est continue, on en déduit que $v_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} e^{2 \ln(2) - 1} = \boxed{4/e}$.

Correction de l'exercice 5 :

(Q 1) La fonction $t \mapsto \ln(1+t)$ est de classe C^∞ sur $] -1; +\infty[$. On a :

$$f'(t) = \frac{1}{1+t}; f''(t) = \frac{-1}{(1+t)^2};$$

$$f'''(t) = \frac{2}{(1+t)^3}; f^{(4)}(t) = \frac{-6}{(1+t)^4}$$

Par une rapide récurrence, on a donc $\forall n \geq 1; f^{(n)}(t) = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(1+t)^n}$. Par la formule de Taylor avec reste in-

tégréal,

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (x-0)^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{(1+0)^k \times (k!)} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \times \frac{(-1)^n}{(1+t)^{n+1}} dt$$

(Q 2) Finalement en $x = 1$, on obtient :

$$\ln(2) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \int_0^1 (-1)^n \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt$$

Par glissement d'indice,

$$\ln(2) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} + \int_0^1 (-1)^n \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt$$

On a donc montré que :

$$\ln(2) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} + (-1)^n \int_0^1 \left(\frac{1-t}{1+t} \right)^n \frac{dt}{1+t}.$$

(Q 3) On pose, pour tout entier n , $I_n = \int_0^1 \left(\frac{1-t}{1+t} \right)^n \frac{dt}{1+t}$.

Montrer, à l'aide du changement de variable $u = \frac{1-t}{1+t}$ que :

$$I_n = \int_0^1 \frac{u^n}{1+u} du.$$

On a :

- $u = \frac{1-t}{1+t} = \varphi(t)$, fonction définie sur $[0; 1]$
- Cette fonction est de classe C^1 .
- Si $t = 0$ alors $u = 1$ et si $t = 1$ alors $u = 0$.
- $u = \frac{1-t}{1+t} \Leftrightarrow (1+t)u = 1-t$ car $t+1 \neq 0 \Leftrightarrow t(u+1) = 1-u \Leftrightarrow t = \frac{1-u}{1+u}$ car $1+u > 0$.
- $\frac{dt}{du} = \frac{-2}{(1+u)^2}$

Par le théorème de changement de variables, on a :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_1^0 u^n \frac{-2}{(1+u)^2} \times \frac{1}{1+\frac{1-u}{1+u}} du \\ &= 2 \int_0^1 u^n \frac{1}{(1+u)[1+u+1-u]} du \\ &= \boxed{\int_0^1 \frac{u^n}{1+u} du}. \end{aligned}$$

(Q 4) On a :

$$\forall u \in [0; 1], 0 \leq \frac{u^n}{1+u} \leq u^n$$

Par croissance de l'intégrale,

$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 u^n du \Leftrightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

Par le théorème d'encadrements, on en déduit que

$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$. Ainsi la suite $\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} \right)_{n \geq 1}$ converge vers $\ln(2)$.

Correction de l'exercice 6 : On pose pour tout réel x , $F(x) = x \int_1^2 e^{-x^2 t^2} dt$ et $G(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$.

(Q 1) (Q a) Montrer que G est de classe C^1 et donner G' .

La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Par le théorème fondamental de l'analyse, on en déduit que G est de classe C^1 et que $\forall x \in \mathbb{R}, G'(x) = e^{-x^2}$.

(Q b) En déduire la monotonie de G . En déduire les deux comportements possibles pour G en $+\infty$.

Puisque G' est positive, on en déduit que G est croissante sur $\mathbb{R}$. Or d'après le théorème de la limite monotone, la fonction G admet une limite en $+\infty$ qui est soit finie (la fonction G est bornée au voisinage de $+\infty$), soit égale à $+\infty$.

(Q c) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}^+, G(x) \leq \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$ ainsi que $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) \in \mathbb{R}$. On ne demande pas de calculer cette limite.

On effectue donc un changement de variables dans l'inégalité précédente et on pose $t = T^2$. Alors

$$1+T^2 \leq e^{T^2} \Leftrightarrow \text{quantités strictement positives } e^{-T^2} \leq \frac{1}{1+T^2}$$

Par croissance de l'intégrale, et en remarquant que $x > 0$, on en déduit que

$$\int_0^x e^{-t^2} dt \leq \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \text{Arctan}(x)$$

Puisque la fonction Arctan est majorée par $\frac{\pi}{2}$, on en déduit que G l'est aussi par transitivité de la relation $\leq$. Finalement, la limite de G est donc un réel, ce qu'il fallait démontrer.

(Q 2) Étudier la parité de F .

D'une part, pour tout réel x , on sait que $-x$ reste dans l'ensemble de définition de la fonction F . D'autre part,

$$F(-x) = -x \int_1^2 e^{-[-x]^2 t^2} dt = -F(x)$$

Ainsi, la fonction F est impaire.

(Q 3) (Q a) Montrer que pour tout réel x : $F(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} dt$.



Pour $x = 0$, le résultat est immédiat.



Supposons que $x \neq 0$. Alors effectuons le changement de variables $T = xt \Leftrightarrow t = \frac{T}{x} = \varphi(T)$. Alors

□ φ est de classe C^1 et $t \mapsto e^{-x^2 t^2}$ est continue sur $[1; 2]$.

□ Bornes. Pour $t = 1$ alors $T = x$ et pour $t = 2$ alors $T = 2x$.

□ Enfin $\frac{dt}{dT} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow dt = \frac{dT}{x}$.

Finalement $F(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} dt = \int_x^{2x} e^{-t^2} dt$

(Q b) On remarque alors que pour tout réel x , $F(x) = G(2x) - G(x)$. En effet,

$$G(2x) - G(x) = \int_0^{2x} e^{-t^2} dt - \int_0^x e^{-t^2} dt = \int_x^{2x} e^{-t^2} dt$$

La fonction F est donc une différence de fonctions de classe C^1 puisque G l'est et que $x \mapsto 2x$ également.

Par ailleurs, en utilisant 3b, et notamment la formule $(G \circ u)' = u' \times G' \circ u$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2}.$$

(Q 4) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$

Puisque G tend vers une limite finie, notons la ℓ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(2x) = \ell$ par le théorème de composition des limites. Par opérations usuelles, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$.

(Q 5) (Q a)

$$e^{-t^2} = 1 - t^2 + o(t^3)$$

Par le théorème de primitivation d'un développement limité, on en déduit que G admet un $DL_{2n+1}(0)$:

$$G(x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

(Q b) Donc par 3b :

$$\begin{aligned} F(x) = G(2x) - G(x) &= \left(2x - \frac{8x^3}{3} + o(x^3)\right) - \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) \\ &= x - \frac{7x^3}{3} + o(x^3) \end{aligned}$$

Par théorème, une équation cartésienne de la tangente en 0 est $y = x$. De plus,

$$F(x) - x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{7x^3}{3}$$

Donc au voisinage de 0^+ , $\mathcal{C}_F$ est en dessous de sa tangente, au dessus au voisinage de 0^- .

(Q 6) Citer le théorème de croissance de l'intégrale et montrer que $\forall x > 0, xe^{-4x^2} \leq F(x) \leq xe^{-x^2}$. Soit (f, g) un couple de fonctions continues sur $[a; b]$ tel que $f \leq g$. Alors $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$. Ici, nous observons que $\forall t \in [1; 2]$:

$$e^{-4x^2} \leq e^{-x^2 t^2} \leq e^{-x^2} \Rightarrow x \text{ est positif } xe^{-4x^2} \leq xe^{-x^2 t^2} \leq xe^{-x^2}$$

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$\int_1^2 xe^{-4x^2} dt \leq \int_1^2 xe^{-x^2 t^2} dt \leq \int_1^2 xe^{-x^2} dt \Leftrightarrow xe^{-4x^2}$$

(Q 7) On détermine le tableau de variations en étudiant le signe de la dérivée.

$$\begin{aligned} F'(x) \leq 0 &\Leftrightarrow 2e^{-4x^2} \leq e^{-x^2} \\ &\Leftrightarrow e^a / e^b = e^{a-b} \quad 2 = e^{3x^2} \Leftrightarrow \ln(2) \leq 3x^2 \\ &\Leftrightarrow x \geq \sqrt{\ln(2)/3} \text{ ou } x \leq -\sqrt{\ln(2)/3} \end{aligned}$$

(Q 8) Donner alors le tableau de variations de F sur $\mathbb{R}^+$.

D'après ce qui précède :

x	0	$\sqrt{\ln(2)/3}$	$+\infty$
$F'(x)$	+	0	-
F	0		0

Grâce à l'encadrement précédent, on peut obtenir une approximation de $F(\sqrt{\ln(2)/3})$.

$$\sqrt{\frac{\ln(2)}{3}} \times \frac{1}{2^{4/3}} \leq F(\sqrt{\ln(2)/3}) \leq \sqrt{\frac{\ln(2)}{3}} \times \frac{1}{2^{1/3}}$$

Sortons notre Pascaline pour obtenir :

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\ln(2)}{3}} \times \frac{1}{2^{4/3}} &\approx 0,19 \\ \sqrt{\frac{\ln(2)}{3}} \times \frac{1}{2^{1/3}} &\approx 0,38 \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 8 :

(Q 1) $\int_0^1 t^k dt = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_0^1 = \frac{1}{k+1}$.

(Q 2) On reconnaît la formule du binôme de Newton :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k = (1+t)^n.$$

(Q 3)

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \int_0^1 t^k dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k dt$$

par linéarité de l'intégrale. Puis,

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k dt = \int_0^1 (1+t)^n dt = \left[\frac{(1+t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1.$$

$$\text{Ainsi, } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{k+1} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}.$$

Correction de l'exercice 9 :

On a $\forall x \in [0; \pi], 0 \leq \frac{\sin(x)}{x+n} \leq \frac{1}{n}$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que $0 \leq u_n \leq \pi/n$. Par le théorème de l'encadrement, la suite (u_n) converge donc vers 0. Pour trouver un équivalent, tentons par exemple une intégration par parties.

$$\begin{aligned} u_n &= \left[\frac{-\cos(x)}{x+n} \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\cos(x)}{(x+n)^2} dx \\ &= \frac{1}{n} + \frac{1}{\pi+n} - \int_0^\pi \frac{\cos(x)}{(x+n)^2} dx \\ &= \frac{\pi+2n}{n(\pi+n)} - \int_0^\pi \frac{\cos(x)}{(x+n)^2} dx. \end{aligned}$$

On remarque que $\frac{\pi+2n}{n(\pi+n)} \sim \frac{2n}{n^2} \sim \frac{2}{n}$.

Étudions si $\int_0^\pi \frac{\cos(x)}{(x+n)^2} dx = o(1/n)$. Pour cela, par l'inégalité triangulaire puis la croissance de l'intégrale, on a :

$$\left| \int_0^\pi \frac{\cos(x)}{(x+n)^2} dx \right| \leq \int_0^\pi \frac{1}{n^2} dt \leq \pi/n^2.$$

Ainsi, $\int_0^\pi \frac{\cos(x)}{(x+n)^2} dx = o(1/n)$ et finalement,

$$u_n = \frac{2}{n} + o(1/n) \Rightarrow \boxed{u_n \sim \frac{2}{n}}$$

Correction de l'exercice 10 :

(Q 1) Par linéarité, $I_n - I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)(1 - \sin(t)) dt$.

Or $\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin^n(t)(1 - \sin(t)) \geq 0$ donc par positivité : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)(1 - \sin(t)) dt \geq 0$. Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n - I_{n+1} \geq 0$ ce qui prouve la décroissance de (I_n) .

Si par l'absurde : $I_n = 0$, alors $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt = 0$. Or $t \mapsto \sin^n(t)$ est positive et continue sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Par propriété, nous devrions avoir que $\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin^n(t) = 0$, ce qui est absurde. D'où $I_n > 0$.

(Q 2) • Par définition, $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \boxed{\frac{\pi}{2}}$.

• $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt = [\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{1}$.

(Q 3) Par linéarité et puisque : $\cos^2 + \sin^2 = 1$ on en déduit : $I_n - I_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \cos^2(t) \sin^n(t) dt$

On cherche donc à exprimer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) \cos^2(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos(t)}_{u(t)} \underbrace{(\cos(t) \sin^n(t))}_{v'(t)} dt$ à l'aide d'une intégration par parties.

Posons : $u(t) = \cos(t)$ et $v(t) = \frac{1}{n+1} \sin(t)^{n+1}$.

Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et $\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $u'(t) = -\sin(t)$, $v'(t) = \cos(t) \sin^n(t)$.

Par intégration par parties, on en déduit :

$$\begin{aligned} &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) \cos^2(t) dt \\ &= \left[\frac{\cos(t) \sin^{n+1}(t)}{n+1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin(t)) \frac{\sin^{n+1}(t)}{n+1} dt \\ &= 0 + \frac{1}{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(t) dt \\ &= \frac{I_{n+2}}{n+1} \end{aligned}$$

On en déduit : $I_n - I_{n+2} = \frac{I_{n+2}}{n+1} \Leftrightarrow I_{n+2} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = I_n$. Or : $1 + \frac{1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$ donc on en déduit :

$$\boxed{(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n.}$$

(Q 4) $v_{n+1} = (n+2)I_{n+2}I_{n+1} = (n+2) = (n+1)I_nI_{n+1} = v_n$. Ainsi, la suite (v_n) est constante donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 = I_1I_0 = \frac{\pi}{2}$.

(Q 5) Par décroissance de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$, nous avons : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$. Par hypothèse, nous en déduisons l'encadrement : $\frac{n+1}{n+2}I_n \leq I_{n+1} \leq I_n$. Par ailleurs, en divisant par I_n (non nul d'après Q2.) l'encadrement précédent, nous obtenons alors : $\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$.

(Q 6) Comme $\frac{n+1}{n+2} \sim 1$ le terme de gauche de l'encadrement converge vers 1. De même pour le terme de droite. Par théorème d'encadrement, dit des gendarmes, la suite de terme général $\frac{I_{n+1}}{I_n}$ converge vers 1. Ainsi, par définition, $\boxed{I_{n+1} \sim I_n}$.

(Q 7) Puisque $I_n \sim I_{n+1}$, par produit : $I_n^2 \sim I_nI_{n+1} \sim \frac{v_n}{n+1} \frac{\pi}{2n}$. Puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n > 0$, $I_n = \sqrt{I_n^2} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

(Q 8) Par récurrence :

Initialisation : Pour $p = 0$ nous avons $\frac{(2p)!}{4^p(p!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ ce qui correspond bien à I_0 .

Hérédité : On suppose la propriété vraie pour un certain entier p fixé, c'est à dire : $I_{2p} = \frac{(2p)!}{4^p(p!)^2} \frac{\pi}{2}$ et on veut montrer la propriété au rang $p+1$ à savoir : $I_{2p+2} = \frac{(2p+2)!}{4^{p+1}((p+1)!)^2} \frac{\pi}{2}$.

Or, d'après (Q3) $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n$. Ainsi : $I_{2p+2} = \frac{2p+1}{2p+2}I_{2p}$. Par hypothèse de récurrence on en déduit : $I_{2p+2} = \frac{2p+1}{2(p+1)} \frac{(2p)!}{4^p(p!)^2} \frac{\pi}{2}$. En multipliant par $2p+2$ au numérateur et au dénominateur on en déduit :

$$\begin{aligned} I_{2p+2} &= \frac{(2p+2)(2p+1)}{2(p+1)(2p+2)} \frac{(2p)!}{4^p(p!)^2} \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2p+2)!}{4^p(p!)^2(2p+2)2(p+1)} \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{aligned} 4^p(p!)^2(2p+2)2(p+1) &= 4^p \times 4 \times (p+1)p! \times (p+1)p! \\ &= 4^{p+1}(p+1)!(p+1)! \\ &= 4^{p+1}((p+1)!)^2 \end{aligned}$$

ce qui prouve au final que :

$I_{2p+2} = \frac{(2p+2)!}{4^{p+1}((p+1)!)^2} \frac{\pi}{2}$, ce qu'il fallait démontrer.

Or, $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ donc $I_{2p} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4p}} \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{p}}$. Nous avons donc :

$\frac{(2p)!}{4^p(p!)^2} \frac{\pi}{2} \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{p}} \Leftrightarrow \frac{(2p)!}{4^p(p!)^2} \pi \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}}$. Par passage à l'inverse (valable pour les équivalents!) on en déduit : $\frac{4^p(p!)^2}{(2p)! \pi} \sim \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{\pi}}$ ce qui donne par multiplication par $\frac{\pi}{\sqrt{p}}$:

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{p}} \frac{4^p(p!)^2}{(2p)!} \sim \sqrt{\pi}.$$

Correction de l'exercice 12 :

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 f^2(x) dx \Leftrightarrow \int_0^1 f^2(t) - f(t) dt \\ &\Leftrightarrow \int_0^1 f(t) \times (f(t) - 1) dt \end{aligned}$$

Or la fonction $f \times (f - 1)$ est négative puisque f est à valeurs dans $[0; 1]$. De plus, elle est continue. Par propriété de l'intégrale, on en déduit que $f \times (f - 1)$ est nulle. Ainsi, $f([0; 1]) \subset \{0; 1\}$. Cependant, par le théorème des valeurs intermédiaires, on sait que $f([0; 1])$ est un intervalle. Les seuls intervalles contenus dans $\{0; 1\}$ sont $\{0\}$ ou $\{1\}$. Donc $f([0; 1]) = \{0\}$ ou $f([0; 1]) = \{1\}$. Or la fonction f n'est pas la fonction nulle. Par conséquent, $f([0; 1]) = \{1\}$, autrement dit $\forall x \in [0; 1], f(x) = 1$.

Correction de l'exercice 13 :

Soit $x \geq 0$. On pose $f : t \mapsto \ln(1 + t)$. Cette fonction est de classe C^∞ sur $] -1; +\infty[$. Dérivons la !

$$f'(t) = \frac{1}{1+t}; f''(t) = \frac{-1}{(1+t)^2}; f'''(t) = \frac{2}{(1+t)^3}; f^{(4)}(t) = \frac{-6}{(1+t)^4}$$

Appliquons donc la formule de Taylor avec reste intégral :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0)^1 + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!} f^{(3)}(t) dt.$$

$$\ln(1+x) = 0 + x - \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!} \frac{2}{(1+t)^3} dt.$$

On remarque que la fonction qui est intégrée est positive sur $[0; x]$. Donc par positivité de l'intégrale, on en déduit

$$\text{que son intégrale l'est aussi. Ainsi, } \boxed{\forall x \geq 0; \ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}}$$

. On fait de même pour l'autre inégalité.

Correction de l'exercice 15 :

(Q 1) On sait que $t \mapsto \frac{1}{\ln^2(t)}$ est continue sur $]1; +\infty[$. Or, si $x > 1$, alors $x^2 > x > 1$ et donc $:[x; x^2] \subset]1; +\infty[$. On en déduit que $t \mapsto \frac{1}{\ln^2(t)}$ est continue sur $[x; x^2]$, ce qui justifie l'existence de $\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln^2(t)} = F(x)$ pour tout $x > 1$.

Notons G une primitive de $t \mapsto \frac{1}{\ln^2(t)}$ sur $]1; +\infty[$

(G existe par continuité de $t \mapsto \frac{1}{\ln^2(t)}$ sur cet intervalle d'après le théorème fondamental de l'analyse).

Alors : $\forall t \in]1; +\infty[, G'(t) = \frac{1}{\ln^2(t)}$. Ainsi, G' est

continue sur $]1; +\infty[$ et donc G est de classe C^1 sur :

$]1; +\infty[$. Par ailleurs : $\forall x > 1, F(x) = G(x^2) - G(x)$.

Par composition de fonctions de classe C^1 puis somme de fonctions de classe C^1 , on en déduit que F est de classe C^1 sur $]1; +\infty[$.

(Q 2) Les formules de dérivation usuelles nous donnent donc : $F'(x) = 2xG(x^2) - G'(x) = \frac{2x}{\ln^2(x^2)} - \frac{1}{\ln^2(x)} =$

$$\boxed{\frac{x-2}{2\ln^2(x)}}. \text{ Ainsi, si } x > 2, F'(x) > 0 \text{ et donc } F \text{ est}$$

strictement croissante, et F est strictement décroissante sinon.

(Q 3) Soit $x > 1$. Alors : $\forall t \in [x; x^2], 0 \leq \ln(x) \leq \ln(t) \leq \ln(x^2)$. Par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$ $\Rightarrow 2x \ln(x)$

on en déduit : $\forall t \in [x; x^2], 0 < \ln^2(x) \leq \ln^2(t) \leq 4\ln^2(x)$. Par stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit : $\forall t \in [x; x^2], \frac{1}{4\ln^2(x)} \leq$

$\frac{1}{\ln^2(t)} \leq \frac{1}{\ln^2(x)}$. Par croissance de l'intégrale, on en

déduit : $\int_x^{x^2} \frac{1}{4\ln^2(x)} dt \leq F(x) \leq \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln^2(x)} dt$

Or : $\int_x^{x^2} \frac{1}{4\ln^2(x)} dt = \frac{x^2 - x}{4\ln^2(x)}$. De même :

$\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln^2(x)} dt = \frac{x^2 - x}{\ln^2(x)}$. Ainsi :

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln^2(x)} dt = \frac{x^2 - x}{\ln^2(x)}. \text{ Ainsi :}$$

$$\forall x > 1, \frac{x^2 - x}{4\ln^2(x)} \leq F(x).$$

Or, $\frac{x^2 - x}{4\ln^2(x)} \sim_{+\infty} \frac{x^2}{4\ln^2(x)}$ et par croissances com-

parées : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{4\ln^2(x)} = +\infty$, d'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x}{4\ln^2(x)} =$

$+\infty$. Par encadrement, $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty}$.

(Q 4) L'inégalité : $\forall t \geq 1, 0 \leq \ln(t)$ est évidente et l'autre

inégalité est en fait l'inégalité fondamentale du logarithme (cf. cours pour la démonstration par études

de fonctions). Par décroissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$ puis stricte décroissance de la fonction inverse

sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit de la même façon :

$\forall t > 1, \frac{1}{\ln^2(t)} \geq \frac{1}{(t-1)^2}$. Par croissance de l'inté-

grale, on en déduit : $\forall x > 1, F(x) \geq \int_x^{x^2} \frac{dt}{(t-1)^2}$.

Une primitive de $\frac{1}{(t-1)^2}$ étant $-\frac{1}{t-1}$ sur $]1; +\infty[$,

on en déduit : $\int_x^{x^2} \frac{dt}{(t-1)^2} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x^2-1)} =$

$\frac{x}{(x-1)(x+1)}$. Ainsi, $\forall x > 1, F(x) \geq \frac{x}{(x-1)(x+1)}$

et $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{(x-1)(x+1)} = +\infty$ (par opérations usuelles)

d'où : $\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = +\infty$ par encadrement.

Correction de l'exercice 1 :

1. (a) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0$. On en déduit que la suite (u_n) est croissante.

$\forall k \in \llbracket 2; n \rrbracket$, $k^2 = k \times k \geq k \times (k-1)$ d'où le résultat en sommant cette inégalité.

- (b) En mettant au même dénominateur, nous obtenons $a = -1$ et $b = 1$. Par télescopie,

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = 1 - \frac{1}{n}.$$

- (c) On en déduit pour tout $n \geq 2$, $u_n - 1 = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq$

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = 1 - \frac{1}{n} \leq 1. \text{ Donc, } \forall n \geq 2, u_n \leq$$

2. De plus, $u_1 = 1 \leq 2$. Par conséquent : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq 2$. La suite étant croissante et majorée, elle converge.

2. (a) Tout d'abord, φ est continue sur $]0; \pi]$ (en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas). Il reste donc à étudier la continuité en 0. On a :

$$\frac{t^2}{2\pi} - t \sim_0 -t \text{ et } 2t \sin\left(\frac{t}{2}\right) \sim_0 t$$

Par conséquent,

$$\varphi(t) \sim_{0^+} t - \frac{t}{2} \text{ c'est à dire } \varphi(t) \sim_{0^+} -\frac{t}{2}$$

$$\text{soit encore } \lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(t) = -1 = \varphi(0).$$

Ainsi, φ est continue sur $]0; \pi]$ et $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) = \varphi(0)$: φ est donc également continue en 0.

D'où φ est continue sur $[0; \pi]$.

- (b) Calculons le taux d'accroissement de φ en 0 :

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t - 0} = \frac{\varphi(t) + 1}{t} = \frac{\frac{t^2}{2\pi} - t + 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)}{2t \sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

Essayons d'obtenir un équivalent de ce quotient pour avoir sa limite. Pour ce faire, à cause du t en plus au dénominateur on va utiliser nos formules à l'ordre 2.

$$\sin\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{t}{2} - \frac{t^3}{12} + o(t^3) = \frac{t}{2} + o_0(t^2)$$

Alors, pour le numérateur :

$$\frac{t^2}{2\pi} - t + 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{t^2}{2\pi} - t + t + o_0(t^2) = \frac{t^2}{2\pi} + o_0(t^2)$$

Et pour le dénominateur :

$$2t \sin\left(\frac{t}{2}\right) = t^2 + o_0(t^2)$$

On traduit cela en équivalents pour passer plus facilement au quotient :

$$\frac{t^2}{2\pi} - t + 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \sim_0 \frac{t^2}{2\pi} \text{ et } 2t \sin\left(\frac{t}{2}\right) \sim_0 t^2$$

D'où

$$\frac{\varphi(t) + 1}{t} \sim_0 \frac{1}{2\pi} \text{ et donc } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t) + 1}{t} = \frac{1}{2\pi}.$$

Finalement φ est dérivable en 0 et $\varphi'(0) = \frac{1}{2\pi}$.

- (c) La fonction φ est de classe C^1 sur $]0; \pi]$ en tant que quotient de fonctions de classe C^1 sur cet intervalle et dont le dénominateur ne s'annule pas (sur cet intervalle). De plus,

$$\forall t \in]0; \pi], \varphi'(t) = \frac{\left(\frac{t}{\pi} - 1\right) 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) - \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right)}{4 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

- (d) On détermine la limite de φ' lorsque t tend vers 0 par valeurs supérieures. En utilisant les développements limités des fonctions usuelles, on a :

$$4 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \sim_0 t^2$$

On va donc déterminer le développement limité à l'ordre 2 du numérateur de φ' :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{t}{\pi} - 1\right) 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) - \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right) \\ &= \left(\frac{t}{\pi} - 1\right) (t + o_0(t^2)) - \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) (1 + o_0(t)) \\ &= -t + \frac{t^2}{\pi} + o_0(t^2) + t - \frac{t^2}{2\pi} + o_0(t^2) \\ &= \frac{1}{2\pi} t^2 + o_0(t^2) \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } \left(\frac{t}{\pi} - 1\right) 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) - \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right) \sim_0 \frac{1}{2\pi} t^2 \text{ et } 4 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \sim_0 t^2.$$

$$\text{Par conséquent, } \varphi'(t) \sim_0 \frac{1}{2\pi}, \text{ donc : } \lim_{t \rightarrow 0} \varphi'(t) = \frac{1}{2\pi} = \varphi'(0). \text{ } \varphi' \text{ est donc bien continue en 0.}$$

- (e) On vient de prouver que φ est de classe C^1 sur $]0; \pi]$ et que φ' est continue en 0. Il s'ensuit que φ' est continue sur $[0; \pi]$, ou encore :

φ est de classe C^1 sur $[0; \pi]$.

3. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour calculer l'intégrale proposée, on procède à deux intégrations par parties successives (licite puisque toutes les fonctions considérées sont de classe C^∞ sur $[0; \pi]$).

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^\pi h(t) \cos(kt) dt \\
 &= \left[\left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \times \frac{\sin(kt)}{k} \right]_0^\pi - \int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1 \right) \times \frac{\sin(kt)}{k} dt \\
 &= \underbrace{\left(\frac{\pi}{2} - \pi \right) \times \frac{\sin(k\pi)}{k}}_{=0} - \frac{1}{k} \int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1 \right) \sin(kt) dt \\
 &= -\frac{1}{k} \left(\left[\left(\frac{t}{\pi} - 1 \right) \times \frac{-\cos(kt)}{k} \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{\pi} \times \frac{-\cos(kt)}{k} dt \right) \\
 &= -\frac{1}{k} \left((1-1) \times \frac{-\cos(k\pi)}{k} - (0-1) \times \frac{-\cos(0)}{k} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{k\pi} \int_0^\pi \cos(kt) dt \right) \\
 &= \frac{1}{k^2} - \frac{1}{\pi k^2} \left[\frac{\sin(kt)}{k} \right]_0^\pi \\
 &= \frac{1}{k^2}
 \end{aligned}$$

Ce qui prouve que pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^\pi h(t) \cos(kt) dt = \frac{1}{k^2}.$$

- (b) En utilisant les sommes de termes d'une suite géométrique, nous obtenons $e^{it} \neq 1$ car $t \neq$

$$0 : \sum_{k=0}^n e^{ikt} = \frac{e^{i(n+1)t} - 1}{e^{it} - 1}.$$

Or, par factorisations par l'angle moitié : $e^{i(n+1)t} - 1 = 2i \sin((n+1)t/2) e^{it(n+1)/2}$ et $e^{it} - 1 = 2i \sin(t/2) e^{it/2}$. En passant à la partie réelle, nous obtenons :

$$\sum_{k=0}^n e^{ikt} = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)t}{2}\right) \cos\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

En utilisant la formule de trigonométrie proposée dans l'indication, nous obtenons :

$$\sin\left(\frac{(n+1)t}{2}\right) \cos\left(\frac{nt}{2}\right) = \frac{1}{2}(\sin((n+1/2)t) + \sin(t/2)), \text{ ce qui donne :}$$

$$\sum_{k=0}^n \cos(kt) = \frac{\sin((n+1/2)t)}{2 \sin(t/2)} + \frac{1}{2}.$$

En remarquant que : $\sum_{k=1}^n \cos(kt) = \sum_{k=0}^n \cos(kt) - 1$, nous obtenons finalement :

$$\sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{\sin((n+1/2)t)}{2 \sin(t/2)} - \frac{1}{2}.$$

- (c) $t \mapsto \varphi(t) \sin((n+1/2)t)$ est continue sur $[0; \pi]$, donc l'intégrale existe bien. Par ailleurs, d'après précédemment :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} &= \sum_{k=1}^n \int_0^\pi h(t) \cos(kt) dt \\
 &= \int_0^\pi h(t) \left(\sum_{k=1}^n \cos(kt) \right) dt \\
 &= \int_0^\pi \left(\frac{h(t)}{2 \sin(t/2)} \sin((n+1/2)t) - \frac{h(t)}{2} \right) dt
 \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \int_0^\pi \varphi(t) \sin\left((n+1/2)t\right) dt -$$

$$\frac{1}{2} \int_0^\pi h(t) dt. \text{ ou encore :}$$

$$\int_0^\pi \varphi(t) \sin\left((n+1/2)t\right) dt = \frac{1}{2} \int_0^\pi h(t) dt + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}.$$

4. (a) L'application φ est une fonction de classe C^1 sur $[0; \pi]$. On a alors en intégrant par parties (licite puisque $t \mapsto -\frac{\cos((n+1/2)t)}{n+1/2}$ et $t \mapsto \varphi(t)$ sont de classe C^1 sur $[0; \pi]$) :

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi \varphi(t) \sin\left((n+1/2)t\right) dt &= \left[-\frac{\cos((n+1/2)t)}{n+1/2} \varphi(t) \right]_0^\pi \\
 &= \frac{\varphi(0) - \cos((n+1/2)\pi) \varphi(\pi)}{n+1/2}
 \end{aligned}$$

Puisque $\varphi(0) = -1$ et $\varphi(\pi) = -\frac{\pi}{2}$, nous en déduisons :

$$\int_0^\pi \varphi(t) \sin\left((n+1/2)t\right) dt = \frac{-1}{n+1/2} + \frac{1}{n+1/2} \int_0^\pi \varphi'(t) dt$$

- (b) Toute fonction continue sur un intervalle fermé borné est bornée. Puisque $t \mapsto \varphi(t)$ est de classe C^1 sur $[0; \pi]$, on en déduit que $t \mapsto |\varphi'(t)|$ est continue sur $[0; \pi]$, ce qui justifie l'existence de son élément maximal M .

En appliquant l'inégalité triangulaire, on en déduit :

$$\left| \int_0^\pi \varphi'(t) \cos\left((n+1/2)t\right) dt \right| \leq \int_0^\pi |\varphi'(t) \cos((n+1/2)t)| dt \leq \int_0^\pi |\varphi'(t)| dt \leq M\pi.$$

- (c) Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \frac{1}{n+1/2} \int_0^\pi \varphi'(t) \cos\left((n+1/2)t\right) dt \right| \leq \frac{M\pi}{n+1/2}.$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{M\pi}{n+1/2} = 0$, donc par théorème d'encadrement, on en déduit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1/2} \int_0^\pi \varphi'(t) \cos\left((n+1/2)t\right) dt = 0.$$

Par somme, nous obtenons : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \varphi(t) \sin\left((n+1/2)t\right) dt = 0$

- (d) Soit $n \geq 2$ un entier. D'après la question précédente :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \varphi(t) \sin\left((n+1/2)t\right) dt = 0.$$

D'autre part :

$$\int_0^\pi h(t) dt = \left[\frac{t^3}{6\pi} - \frac{t^2}{2} \right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{2} = -\frac{\pi^2}{3}$$

Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - \frac{\pi^2}{6} = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{\pi^2}{6}.$$

