TD 16

Géométrie plane

LES INCONTOURNABLES

Exercice 1 : Pour quelles valeurs de m les vecteurs $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} m+3 \\ m+1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ m-1 \end{pmatrix}$ constituent-t-ils :

(Q 1) une base du plan ? (Q 2) une base orthogonale du plan ?

Exercice 2 : [corrigé] On donne $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$. Déterminer l'angle orienté entre les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

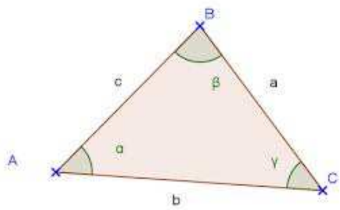
Exercice 3 : [corrigé] Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls. Démontrer que : $||2\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}|| = ||2\overrightarrow{u} - 3\overrightarrow{v}||$ si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.

Exercice 4 : Soit ABC un triangle quelconque. On note a, b, c les longueurs respectives de BC, AC, AB et p son demi-périmètre.

(Q A)

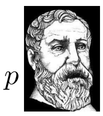
(Q 1) Développer $(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}).(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$.

(Q 2) En déduire que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{BAC})$. (*formule d'Al Kashi*)



(Q B)

(Q 1) Montrer que $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]^2 + \left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2 = b^2c^2$.



(Q 2) On note S l'aire du triangle ABC. En déduire que $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$ où p est le demi-périmètre du triangle. (*formule de Héron*)

Exercice 5 : Soient $A(1;1); B(3;7); C(-1;3)$.

(Q 1) (Q a) Déterminer les équations cartésiennes de deux médianes de ABC.

(Q b) Quelles sont les coordonnées du centre de gravité G de ABC ?

(Q 2) (Q a) Déterminer les équations cartésiennes de deux médiatrices de ABC.

(Q b) Quelles sont les coordonnées du centre Ω du cercle circonscrit à ABC ?

(Q 3) (Q a) Déterminer les équations cartésiennes de deux hauteurs de ABC.

(Q b) Quelles sont les coordonnées de l'orthocentre H de ABC ?

(Q 4) Vérifier que $H; G; \Omega$ sont alignés.

Exercice 6 : [corrigé] Donner les coordonnées du projeté orthogonal du point $M(a;b)$ sur la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x - 2y = 0$.

Exercice 7 : [corrigé] On note $A(3;\ 1)$ et $\mathcal{D}$ la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + 3t \end{cases}$

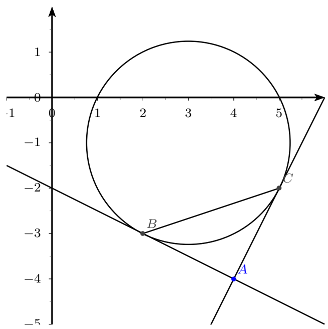
(Q 1) Donner une équation cartésienne de $\mathcal{D}$.

(Q 2) Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}'$, droite perpendiculaire à $\mathcal{D}$ et passant par A.

(Q 3) On note H le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$. Déterminer les coordonnées de H.

(Q 4) On note A' le symétrique de A par rapport à $\mathcal{D}$. Déterminer les coordonnées de A'.

Exercice 8 : Soient $\mathcal{C}$ le cercle d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$, et $A(4; -4)$. On peut mener par le point A deux tangentes au cercle $\mathcal{C}$. Calculer les coordonnées des deux points d'intersection puis la distance entre les points d'intersection de ces tangentes avec le cercle $\mathcal{C}$.



Exercice 9 : Lignes de niveau

On note $\mathcal{D}$ la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$. Si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, on note $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{u}$.

Les trois questions suivantes sont indépendantes.

1. On note B un point de $\mathcal{D}$ tel que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u} = 2$.
   (a) Expliquer pourquoi il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{u}$ puis exprimer λ en fonction de $\overrightarrow{u}$.
   (b) Montrer que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u} = 2 \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{u} = 0$. En déduire l'ensemble des points M tels que : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u} = 2$
2. On note (Δ) la droite orthogonale à $\mathcal{D}$ passant par A et C un point de (Δ) tel que $\left[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{u}\right] = 1$.
   (a) Expliquer pourquoi il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que : $\overrightarrow{AC} = \mu\overrightarrow{n}$ puis exprimer μ en fonction de $\overrightarrow{u}$.
   (b) Montrer que $\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}\right] = 1 \Leftrightarrow \left[\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{u}\right] = 0$. En déduire l'ensemble des points M tels que : $\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}\right] = 1$.
3. Soit G un point de (AB) tel que : $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.On note $\ell = AB$.
   (a) Montrer que : $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} = -\dfrac{2}{9}\ell^2$ et $GA^2 + GB^2 = \dfrac{5}{9}\ell^2$.
   (b) On note I le milieu de $[AB]$. Montrer que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = IM^2 - \dfrac{1}{4}\ell^2$ et $MA^2 + MB^2 = 2IM^2 + \dfrac{1}{2}\ell^2$.
   (c) En déduire l'ensemble des points M tels que :
   $$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = -\frac{2}{9}\ell^2 \quad (1)$$
   $$MA^2 + MB^2 = \frac{5}{9}\ell^2 \quad (2)$$
   (d) Faire une figure avec A, B, G et I placés puis tracer les deux ensembles de points obtenus en question précédente.

POUR S'ENTRAÎNER

Exercice 10 : Soit ABC un triangle quelconque. On note a, b, c les longueurs respectives de BC, AC, AB. Montrer la relation des sinus : $\dfrac{a}{\sin(\widehat{BAC})} = \dfrac{b}{\sin(\widehat{ABC})} = \dfrac{c}{\sin(\widehat{ACB})}$

Exercice 11 : Déterminer pour quelle(s) valeur(s) du paramètre réel m les droites suivantes sont orthogonales. $D_m : m^2x + y + 36 = 0$ et $D'_m : (2m+4)x + (5m+3)y - m^2 = 0$.

Exercice 12 :

1. Soit $\mathcal{D}$ dont une représentation paramétrique est $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3-\lambda \\ y & = & -1+2\lambda \end{array}\right.$ $\lambda \in \mathbb{R}$. Donner une équation cartésienne de $\mathcal{D}$.
2. On considère la famille de droites Δ_m d'équations cartésiennes $mx + (m-1)y + 2 = 0$. Donner la valeur de m telle que Δ_m est parallèle à $\mathcal{D}$.

Exercice 13 : [corrigé] Calculer la distance de la droite $\mathcal{D}$ au point A dans les cas suivants :

(Q 1) $A = (4; -1)$ et $\mathcal{D}$ a pour équation cartésienne : $x + 2y + 3 = 0$.

(Q 2) $A = (0; 0)$ et $\mathcal{D} = B(5; 3) + \text{Vect}(\overrightarrow{u})$ avec $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(Q 3) $A = (1; -1)$ et $\mathcal{D}$ la droite passant par $B(2; 2)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 14 : On considère un triangle ABC. On note $\mathcal{A}_{ABC}$ son aire et G le centre de gravité du triangle ABC. On pourra utiliser le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$.

(Q 1) Montrer que : $\overrightarrow{AG} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3}$.

(Q 2) En déduire $\mathcal{A}_{ABG} = \frac{1}{3}\mathcal{A}_{ABC}$.

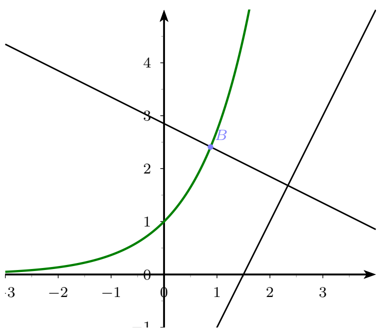
(Q 3) Soient $A(1;\ 2)$; $B(3;\ 5)$, $C(-1;\ 4)$ et G le centre de gravité du triangle ABC. Calculer l'aire du triangle GAB.

Exercice 15 : [indications] Soit $\mathcal{D} : 3x - 4y + 4 = 0$ et $\mathcal{D}' : 12x + 5y - 5 = 0$. Calculer une équation de chacune des bissectrices des deux droites.

Exercice 16 : [corrigé] On note C la courbe représentative de la fonction exponentielle, et D la droite d'équation réduite : $y = 2x - 3$.

(Q 1) Montrer qu'il existe un point $M(x_0;\ y_0)$ de C tel que la distance de M à D soit minimale, puis déterminer cette distance.

(Q 2) Que peut-on dire de la tangente à C en x_0 par rapport à D ?



Cercles

Exercice 17 : [corrigé] (Lignes de niveau). Soient A, B, M trois points.

1. Montrer que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$ avec I le milieu de $[AB]$.
2. En déduire l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k$ avec k une constante réelle.
3. De même, simplifier $MA^2 + MB^2$ en faisant intervenir le milieu I. En déduire l'ensemble des points M tels que $MA^2 + MB^2 = k$ avec k une constante réelle.

Exercice 18 : [corrigé] Former l'équation du cercle $(\mathcal{C})$ qui passe par les points $A(0; -2)$ et $B(4; 0)$ et a son centre appartenant à la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $x + 2y = 0$.

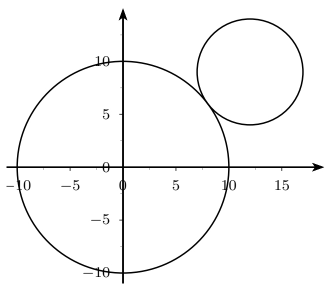
Exercice 19 : Soient $A(2; 3); B(-2; -1); C(1; -1)$. Former l'équation du cercle circonscrit au triangle ABC et déterminer le centre et le rayon de ce cercle.

Exercice 20 : Dans un repère orthonormal direct, on définit la droite $\mathcal{D}$ par l'équation $x + y + 1 = 0$ et pour tout réel λ, on note C_λ l'ensemble des points $M(x; y)$ dont les coordonnées vérifient l'équation $x^2 + y^2 + 2\lambda x + 2y + 2 = 0$.

(Q 1) Montrer que si $|\lambda| > 1$ alors C_λ est un cercle, si $|\lambda| = 1$ alors C_λ est réduit à un point et si $|\lambda| < 1$ alors C_λ est vide.

(Q 2) Soit alors $|\lambda| \geq 1$. Étudier l'intersection de $\mathcal{D}$ et de C_λ.

Exercice 21 : [corrigé] Soient $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ deux cercles d'équations respectives $x^2 + y^2 = 100$ et $x^2 + y^2 - 24x - 18y + 200 = 0$. Montrer qu'ils sont tangents et former une équation de la tangente au point commun.



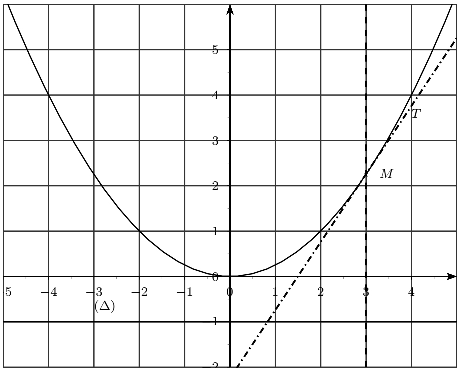
Exercice 22 : [corrigé] On considère l'équation :

$$x^2 + y^2 - 4kx - 2y + 4k = 0 \;\; (\mathcal{C}_k)$$

avec $k \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout réel k, cette équation est celle d'un cercle dont on précisera les caractéristiques.
2. Quel est l'ensemble des centres de ces cercles ?
3. Montrer que tous les cercles sont tangents en un point fixe.

Exercice 23 : [corrigé]



On considère la parabole d'équation $y = \frac{x^2}{4}$, la droite (Δ) d'équation $y = -1$.
Fixons un point $M(a; a^2/4)$, avec $a \neq 0$, appartenant à cette parabole. On note H son projeté orthogonal sur (Δ).

(Q 1) Donner une équation cartésienne de la tangente (T) en M à la parabole.

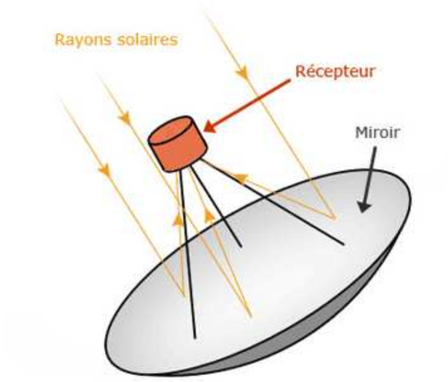
(Q 2) Montrer qu'une équation cartésienne de la droite (T') perpendiculaire à (T) et passant par H est $x + \frac{a}{2}y - \frac{a}{2} = 0$.

(Q 3) On note F le point appartenant à (T') et d'abscisse nulle. Donner son ordonnée. Quelle remarque peut-on faire sur cette dernière ?

(Q 4) Montrer que $MF = MH$.

(Q 5) En déduire que (T) est la médiatrice du segment $[FH]$ puis que (T) est une bissectrice des droites (MF) et (MH). Faites un schéma pour y voir plus clair...

À quoi cela sert-il ? Prenons une antenne parabolique. Cette dernière est orientée de telle sorte que les rayons incidents d'un satellite soient parallèles à l'axe de symétrie de la parabole. Par les lois de l'optique, le rayon réfléchi est le symétrique du rayon incident par rapport à la tangente au point d'intersection. Alors tous les rayons réfléchis passent par le même point F. Le capteur d'une antenne parabolique est alors placé au foyer, et cela permet de condenser les rayons au niveau du capteur.



Indications

Exercice 15 : Un point appartient à une bissectrice si et seulement si il est à égale distance des deux droites.

Correction de l'exercice 2 :

On utilise le produit scalaire, il nous donnera une information sur le cosinus de cet angle, puis le produit mixte, il nous donnera une information sur le sinus.

$\vec{u}.\vec{v} = -6 = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos((\vec{u},\vec{v})) = \sqrt{2}\times\sqrt{26}\cos((\vec{u},\vec{v})) = 2\sqrt{13}\cos((\vec{u},\vec{v}))$. Ainsi, $\cos((\vec{u},\vec{v})) = \frac{-3}{\sqrt{13}}$.

$[\vec{u};\vec{v}] = 4 = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin((\vec{u},\vec{v})) = \sqrt{2}\times\sqrt{26}\sin((\vec{u},\vec{v}))$. Ainsi, $\sin((\vec{u},\vec{v})) = \frac{2}{\sqrt{13}}$.

Finalement, les signes du cosinus et du sinus permettent de conclure que la mesure principale de l'angle $(\vec{u},\vec{v})$ appartient à $]\pi/2;\pi[$. De plus, $\tan((\vec{u},\vec{v})) = \frac{-2}{3}$. Ainsi, $(\vec{u},\vec{v}) = \arctan(-2/3)+\pi[2\pi]$, soit 146.31 degré.

Correction de l'exercice 3 :

Cet exercice utilise le lien entre la norme d'un vecteur et le produit scalaire, ainsi que les propriétés BILINEARITE et SYMETRIE) de ce dernier.

$$\begin{array}{ll} & \|2\vec{u}+3\vec{v}\| = \|2\vec{u}-3\vec{v}\| \\ \Leftrightarrow & (2\vec{u}+3\vec{v}).(2\vec{u}+3\vec{v}) = (2\vec{u}-3\vec{v}).(2\vec{u}-3\vec{v}) \\ \Leftrightarrow & \|\vec{u}\|^2+12\vec{u}.\vec{v}+9\|vev\|^2 = 4\|\vec{u}\|^2-12\vec{u}.\vec{v}+9\|\vec{v}\|^2 \\ \Leftrightarrow & \vec{u}.\vec{v}=0 \end{array}$$

ce qui équivaut à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Correction de l'exercice 6 :

On cherche $H(x;y)\in\mathcal{D}$ tel que (HM) et $\mathcal{D}$ sont orthogonales. On utilise donc le produit scalaire qui permet de caractériser l'orthogonalité. Pour cela, un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

$$(HM)\perp\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}a-x\\b-y\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow 2(a-x)+(b-y)=0$$

Finalement, $H(x;y)\in\mathcal{D}$ et (HM) et $\mathcal{D}$ sont orthogonales est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-2y &=& 0\\ 2(a-x)+(b-y) &=& 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2y=\frac{4a+2b}{5}\\ y &=& \frac{2a+b}{5}\end{array}\right.$$

Finalement, les coordonnées du point H sont : $\boxed{(\frac{4a+2b}{5},\frac{2a+b}{5})}$.

Correction de l'exercice 7 :

(Q 1) Une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ est $\boxed{y=1+3x/2 \Leftrightarrow 3x/2-y-1=0}$.

(Q 2) La droite $\mathcal{D}'$ est perpendiculaire à $\mathcal{D}$, donc un vecteur directeur est un vecteur normal à $\mathcal{D}$, à savoir $\vec{n} := \begin{pmatrix}3/2\\-1\end{pmatrix}$

Le point $M(x,y)$ appartient à $\mathcal{D}'$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires ce qui équivaut à $\left[\begin{pmatrix}x-3\\y-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3/2\\-1\end{pmatrix}\right]=0 \Leftrightarrow (-1)(x-3)-(3/2)(y-1)=0 \Leftrightarrow \boxed{2x+3y-9=0.}$

(Q 3) Ce point $H(x,y)$ appartient donc à l'intersection des deux droites. On doit résoudre un système :

$$\begin{array}{ll} & \left\{\begin{array}{rcl}2x+3y &=& 9\\ 3x-2y &=& -2\end{array}\right. \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix}2&3\\3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\-2\end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{-13}\begin{pmatrix}-2&-3\\-3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9\\-2\end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{-13}\begin{pmatrix}-13\\-31\end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12/13\\31/13\end{pmatrix}\end{array}$$

Les coordonnées de ce projeté orthogonal sont : $\boxed{(12/13;31/13).}$

(Q 4) Ce symétrique $A'(x,y)$ vérifie :

$$\begin{array}{ll} & \overrightarrow{AA'}=2\overrightarrow{AH} \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix}x-3\\y-1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}12/13-3\\31/13-1\end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(24-39)/13\\(62-13)/13\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}-15/13\\49/13\end{pmatrix}}\end{array}.$$

Correction de l'exercice 13 :

(Q 1) $A=(4;-1)$ et $\mathcal{D}$ a pour équation cartésienne : $x+2y+3=0$. On applique directement la formule :

$$d(A,\mathcal{D})=\frac{|4-2+3|}{\sqrt{1+4}}=\sqrt{5}.$$

(Q 2) $A=(0;0)$ et $\mathcal{D}=B(5;3)+\mathrm{Vect}(\vec{u})$ avec $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

On cherche une équation cartésienne de $\mathcal{D}$. Le point $M(x;y)$ appartient à cette droite si et seulement si $\overrightarrow{BM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires ce qui équivaut à

$$\begin{array}{ll} & [\overrightarrow{BM},\vec{u}]=0 \\ \Leftrightarrow & \left[\begin{pmatrix}x-5\\y-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right]=0 \\ \Leftrightarrow & 2(x-5)-(y-3)=0 \\ \Leftrightarrow & 2x-y-7=0.\end{array}$$

Puis, par propriété :

$$d(A,\mathcal{D})=\frac{|-7|}{\sqrt{4+1}}=\frac{7\sqrt{5}}{5}.$$

(Q 3) $A=(1;-1)$ et $\mathcal{D}$ la droite passant par $B(2;2)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. De même, on cherche une équation cartésienne de $\mathcal{D}$. Le point $M(x;y)$ appartient à cette droite si et seulement si $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont orthogonaux ce qui équivaut à

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{n} = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} x-2 \\ y-2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \\ \Leftrightarrow & (x-2) + 2(y-2) = 0 \\ \Leftrightarrow & x + 2y - 6 = 0. \end{aligned}$$

Puis, par propriété :

$$d(A, \mathcal{D}) = \frac{|1-2-6|}{\sqrt{4+1}} = \frac{7\sqrt{5}}{5}.$$

Correction de l'exercice 16 :

(Q 1) La distance du point M à D est donnée par

$$d(M, D) = \frac{|y_0 - 2x_0 + 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|\exp(x_0) - 2x_0 + 3|}{\sqrt{5}}$$

On étudie donc la fonction $g : x \mapsto e^x - 2x + 3$. Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$, y est dérivable en tant que combinaison linéaire de fonctions qui le sont.

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = e^x - 2$$

Cette fonction g admet un minimum au point d'abscisse $\ln(2)$ et $g(\ln(2)) = 2 - 2\ln(2) + 3 = 5 - \ln(4) = \ln(e^5/4) > 0$. La fonction g est donc également positive. Ainsi, $d(M, D) = \frac{g(x_0)}{\sqrt{5}}$ est minimale en :

$\boxed{M(\ln(2), 2)}$ et cette distance est égale à :

$\boxed{\frac{\ln(e^5/4)}{\sqrt{5}}.}$

(Q 2) La pente de la tangente en $x_0 = \ln(2)$ est égale à $\exp'(\ln(2)) = \exp(\ln(2)) = 2$. **Cette tangente est donc parallèle à la droite** D.

Correction de l'exercice 17 :

1. Par Chasles : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + veIA.\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}$. Puis $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = \left(\frac{1}{2}-\overrightarrow{AB}\right).\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = \frac{-1}{4}AB^2$. Enfin, par symétrie, $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + veIA.\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{MI}.[-\overrightarrow{IB}] = 0$. Nous avons montré :
$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$$
2. On utilise la relation précédente :
$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k \Leftrightarrow MI^2 - \frac{AB^2}{4} = k \Leftrightarrow MI^2 = k + \frac{AB^2}{4}.$$
Trois cas se présentent :
   - Si $k < -AB^2/4$ alors cet ensemble de points est vide.
   - Si $k = -AB^2/4$ alors cet ensemble de points est réduit au point I.
   - Si $k > -AB^2/4$ alors cet ensemble est un cercle de centre I et de rayon $\sqrt{k + \frac{AB^2}{4}}$.

$$\begin{aligned} M3A^2 + MB^2 &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \\ &\quad + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}).(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) \\ &= MI^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + IA^2 + MI^2 \\ &\quad + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + IB^2 \\ &= 2MI^2 + AB^2/2 \end{aligned}$$

puisque $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$.
$MA^2 + MB^2 = k \Leftrightarrow 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = k \Leftrightarrow MI^2 = k/2 - \frac{AB^2}{4}$. Trois cas se présentent :

- Si $k < AB^2/2$ alors cet ensemble de points est vide.
- Si $k = AB^2/2$ alors cet ensemble de points est réduit au point I.
- Si $k > AB^2/2$ alors cet ensemble est un cercle de centre I et de rayon $\sqrt{k/2 - \frac{AB^2}{4}}$.

Correction de l'exercice 18 :

On cherche $\Omega(x, y)$ le centre du cercle. Il appartient à la médiatrice $(d_{(AB)})$ du segment $[AB]$ et $\Omega \in \mathcal{D}$. Notons $I(2;-1)$ le milieu de $[AB]$.

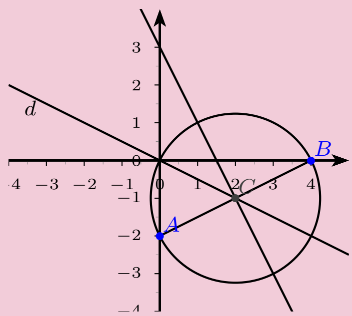
$$\begin{aligned} & M(x,y) \in (d_{AB}) \Leftrightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} x-2 \\ y+1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \\ \Leftrightarrow & 4(x-2) + 2(y+1) = 0 \\ \Leftrightarrow & 2x + y - 3 = 0. \end{aligned}$$

Résolvons alors le système :

$$\begin{cases} 2x + y - 3 &= 0 \\ x + 2y &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= -2y = 2 \\ y &= -1 \end{cases}$$

Le centre du cercle a pour coordonnées $(2;-1)$. Le rayon est égal à $\Omega A = \sqrt{(2-0)^2 + (-1-(-2))^2} = \sqrt{5}$. L'équation de ce cercle est finalement

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5.$$



Correction de l'exercice 19 :

On calcule les équations de deux médiatrices, puis les coordonnées de leur point d'intersection Ω qui nous offre le centre de ce cercle.

La médiatrice de $[BC]$ a pour équation $x = -1/2$. Le point $M(x, y)$ appartient à la médiatrice de $[AB]$ si et seulement si (MI) (I le milieu de $[AB]$) est (AB) sont orthogonales (avec I le milieu de $[AB]$) ce qui équivaut à $\begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + (y-1) = 0$.

On résout donc le système linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -1/2 \\ x+y-1 & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -1/2 \\ y & = & 3/2 \end{array} \right.$$

Le rayon est égal $\Omega A = \sqrt{(2-(-1/2))^2 + (3-3/2)^2} = \sqrt{25/4 + 9/4} = \sqrt{17/2}$. L'équation du cercle circonscrit est

$$(x+1/2)^2 + (y-3/2)^2 = 17/2$$

Correction de l'exercice 21 :

- Centre de $\mathcal{C}$: $O(0,0)$ et de rayon 10. Centre de $\mathcal{C}'$: $O'(12,9)$ et de rayon 5.
- On résout le système (non linéaire) :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^2+y^2 & = & 100 \\ x^2+y^2-24x-18y+200 & = & 0 \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x^2+y^2 & = & 100 \\ -24x-18y+300 & = & 0 \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x^2+y^2 & = & 100 \\ x & = & -\frac{3}{4}y+25/2 \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{9}{16}y^2 - \frac{75}{4}y + 625/4 + y^2 & = & 100 \\ x & = & -\frac{3}{4}y+25/2 \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 25y^2-300y+900 = & & 0 \\ x & = & -\frac{3}{4}y+25/2 \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 6 \\ x & = & 8 \end{array} \right.$$

- Le seul point d'intersection de ces deux cercles est donc le point de coordonnées $(8;6)$.

Correction de l'exercice 22 :

1. $$\begin{array}{rl} & x^2+y^2-4kx-2y+4k=0 \\ \Leftrightarrow & (x-2k)^2-4k^2+(y-1)^2-1+4k=0 \\ & \Leftrightarrow (x-2k)^2+(y-1)^2 = 4k^2-4k+1 = (2k-1)^2. \end{array}$$
Cette équation est celle d'un cercle de centre $\Omega_k(2k,1)$ et de rayon $|2k-1|$.
2. L'ensemble de ces centres correspond à l'ensemble des points de coordonnées
$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 2k \\ y & = & 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$
On reconnait la représentation paramétrique de la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{i}$ et passant par $J(0,1)$.
3. En prenant $k=1/2$, nous obtenons un "cercle point" :
$$(x-1)^2+(y-1)^2 = 0 \Leftrightarrow y=1\,;x=1$$
Ce point appartient aux autres cercles $(\mathcal{C}_k)$: $x^2+y^2-4kx-2y+4k = 1+1-4k-2+4k=0$.
Ainsi, tous ses cercles sont tangents en un point fixe de coordonnées $(1;1)$.

Correction de l'exercice 23 :

(Q 1) On note $f : x \mapsto \frac{x^2}{4}$. Alors une équation cartésienne de la tangente (T) en M à la parabole est
$y = f'(a)(x-a) + f(a) \Leftrightarrow y = \frac{a}{2}(x-a) + \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow$
$\boxed{0 = \dfrac{ax}{2} - y - \dfrac{a^2}{4}}$

(Q 2) Les coordonnées de H sont $(a;-1)$. Un vecteur normal à (T) est $\begin{pmatrix} a/2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ainsi,
$$\begin{array}{rl} M(x,y) \in (T') & \Leftrightarrow [\overrightarrow{HM}, \begin{pmatrix} a/2 \\ -1 \end{pmatrix}] = 0 \\ & \Leftrightarrow [\begin{pmatrix} x-a \\ y+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a/2 \\ -1 \end{pmatrix}] = 0 \end{array}$$
$$\Leftrightarrow \frac{a}{2} \times (y+1) + (x-a) = 0 \Leftrightarrow \boxed{x + \frac{a}{2}y - a/2 = 0}$$

(Q 3) L'abscisse du point F est nulle, par conséquent, $\frac{a}{2}y - a/2 = 0$. Comme $a \neq 0$ alors $y=1$. Les coordonnées du point F sont donc $(0;1)$. Les coordonnées du point F ne dépendent pas du réel a.

(Q 4) On a $\overrightarrow{MF} = \begin{pmatrix} 0-a \\ 1-a^2/4 \end{pmatrix}$ donc :
$MF = \sqrt{a^2+1-a^2/2+a^4/16}$
$= \sqrt{(a^2/4)^2 + 2(a^2/4)+1}$
$= [a^2/4+1]$. De plus, $MH = 1 + a^2/4$. On a montré que $MH = MF$.

(Q 5) La droite (T) est perpendiculaire à la droite (FH). Donc, elle est parallèle à la médiatrice du segment $[FH]$. De plus, le point M est à égal distance des points F et H. Par propriété, il appartient donc à la médiatrice du segment $[FH]$. Cependant, il appartient aussi à la droite (T). Ainsi, la droite (T) et la médiatrice du segment $[FH]$ sont confondues. On note I le milieu du segment $[FH]$. Alors FMI et HMI sont deux triangles semblables. Les angles $\widehat{IMF}$ et $\widehat{IMH}$ sont donc égaux. La droite (T) est alors une bissectrice des droites (FM) et (FH).

⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆