TD 17

Géométrie dans l'espace

LES INCONTOURNABLES

Exercice 1 : Soient $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(Q 1) Montrer que $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base de l'espace. Est-elle directe ?

(Q 2) Soit $\overrightarrow{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ m \end{pmatrix}$ où m est un paramètre réel.

(a) Exprimer les composantes de $\overrightarrow{t}$ dans $\mathcal{B}'$.

(b) Pour quelle(s) valeur(s) de m les vecteurs $\overrightarrow{t}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont-ils coplanaires ?

Exercice 2 : [corrigé] Soient P le plan d'équation cartésienne : $x + 2y - 3z + 4 = 0$ et $A(0;\ 1;\ 2)$, $B(-1;\ 0;\ 1)$, $C(1;\ 1;\ 1)$ trois points de l'espace.

(Q 1) Montrer que A, B et C ne sont pas alignés et déterminer une équation cartésienne du plan P' passant par ces points.

(Q 2) Montrer que P et P' sont sécants selon une droite D.

Exercice 3 : [corrigé] Soit la droite $(\mathcal{D})$ dont un système d'équations cartésiennes est : $\begin{cases} x &= y+1 \\ z &= y \end{cases}$.
Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ orthogonal à $(\mathcal{D})$ et passant par $A(1;1;1)$.

Exercice 4 : [corrigé] Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de $A(1,1,4)$ sur le plan P d'équation cartésienne $x - y + 2z = 2$, puis calculer la distance $d(A, P)$.

Exercice 5 : Calculer la distance du point A à la droite D dans les deux cas suivants :

(Q 1) $A = (4, -3, 2)$ et D passe par $B = (1, 0, -1)$ et dirigée par $\overrightarrow{v} = (2, -1, 3)$.

(Q 2) $A = (2, -1, 1)$ et D est définie par le système d'équations cartésiennes suivant : $\begin{cases} x &= 2z - 1 \\ y &= 3z + 1 \end{cases}$

Exercice 6 : [corrigé]

(Q 1) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par les points $A(-1;1;0)$; $B(2;0;1)$ et parallèle à la droite $(\mathcal{D})$: $\begin{cases} x - y + z + 3 &= 0 \\ 2x + y - z + 1 &= 0 \end{cases}$

(Q 2) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ contenant la droite $(\mathcal{D})$ et parallèle à la droite $(\mathcal{D}')$ avec :

$$(\mathcal{D}) : \begin{cases} x &= 1 + 2\lambda \\ y &= 1 - \lambda \\ z &= 3\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } (\mathcal{D}') : \begin{cases} x - y &= 0 \\ x + y + z &= 0 \end{cases}$$

Exercice 7 : [corrigé] Montrer que les deux droites suivantes sont coplanaires et former un équation cartésienne de leur plan.

$$D : \left\{ \begin{array}{ll} x & = 2z + 1 \\ y & = z - 1 \end{array} \right. \qquad D' : \left\{ \begin{array}{ll} x & = z + 2 \\ y & = 3z - 3 \end{array} \right.$$

Exercice 8 : [corrigé]

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. Pour $m \in \mathbb{R}$, on définit l'ensemble P_m par son équation cartésienne dans $\mathcal{R}$:

$$(4 + m^2)x + (4 - m^2)y - 4mz = m + 8$$

On note le point $\Omega_0 = \left(0, 1, -\frac{1}{4}\right)$ et Δ la droite passant par Ω_0 et dirigée par $\overrightarrow{i}$.

1. Justifier que, pour tout $m \in \mathbb{R}$, P_m est un plan.
2. Soit Ω_x le point de Δ dont la première coordonnée vaut x. Montrer que la distance entre Ω_x et P_m vaut $\dfrac{|x-1|}{\sqrt{2}}$. Qu'y a-t-il de remarquable dans ce résultat ?
3. Déterminer toutes les sphères de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$, dont le centre appartient à Δ et telles que, pour tout $m \in \mathbb{R}$, P_m soit tangent à ces sphères.
   On notera S_1 celle dont le centre a la première coordonnée la plus petite. Déterminer le centre de S_1 et son équation cartésienne.

Exercice 9 :

On considère dans l'espace muni d'un repère usuel $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k})$, le plan $\mathcal{P} : x + 2y - z + 1 = 0$ et $\mathcal{P}'$ le plan de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et tel que le point $A(2; 0; 0) \in \mathcal{P}'$.

(Q 1) Montrer que : $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \mathcal{D}$ est une droite dont on donnera une représentation paramétrique.

(Q 2) Pour tout réel m on note $\mathcal{P}_m$ l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées vérifient l'équation :

$$\left(1 + m\right)x + \left(2 - m\right)y + \left(-1 + 2m\right)z + 1 - 2m = 0$$

- (q a) Justifier que pour tout réel m, l'ensemble $\mathcal{P}_m$ est un plan.
- (q b) Pour $m \in \mathbb{R}$, montrer que $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}_m$.
- (q c) En déduire un vecteur directeur de $\mathcal{P}_m$ puis en déterminer un autre.
- (q d) Existe-t-il un plan $\mathcal{P}_m$ qui soit perpendiculaire à $\mathcal{P}$?

(Q 3) On considère l'ensemble des points $M(x; y; z)$, noté $\mathcal{S}$, vérifiant :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y = 0$$

- (q a) Quel est cet ensemble $\mathcal{S}$?
- (q b) Montrer que $\mathcal{C} = \mathcal{P}_{\frac{1}{2}} \cap \mathcal{S}$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon r.
- (q c) Après avoir vérifié que $O \in \mathcal{C}$, déterminer un système d'équations cartésiennes de *la* droite tangente à $\mathcal{C}$ en O.

POUR S'ENTRAÎNER

Exercice 10 : Calculer le volume du parallélépipède défini par $\vec{u}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{w}=\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$.

Exercice 11 : [corrigé] Soient $A;B;C$ trois points deux à deux distincts. En utilisant les propriétés vérifiées par le produit vectoriel, montrer que, quelque soit le point M :

$$\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$$

Exercice 12 : [corrigé] Soient A, B, C, D quatre points de l'espace deux à deux distincts.

(Q 1) Montrer que (AB) et (CD) sont orthogonales si et seulement si :

$$AC^2+BD^2=AD^2+BC^2$$

(Q 2) Soit $ABCD$ un tétraèdre tel que (AB) est perpendiculaire à (CD) et (BC) est perpendiculaire à (AD). Montrer que (BD) est perpendiculaire à (AC).

Exercice 13 : [corrigé]

(Q 1) Trouver une famille de deux vecteurs directeurs du plan P d'équation cartésienne : $2x-y+3z-1=0$ puis donner un système d'équations paramétriques de ce plan.

(Q 2) Trouver un vecteur directeur, puis une représentation paramétrique, de la droite D dont un système d'équations cartésiennes est : $\begin{cases} 2x+y-4z &= 6\\ x-y+3z &= 2\end{cases}$

Exercice 14 : Soient $A(5;\ -1;\ 4)$ et $B(2;\ 0;\ 1)$. Donner une équation cartésienne de la sphère de diamètre $[AB]$.

Exercice 15 : [corrigé] Soient $\Omega(4;\ 1;\ 2)$ et $A(-1;\ 1;\ 2)$.

(Q 1) Déterminer une équation de la sphère de centre Ω et passant par A puis donner une équation du plan tangent en A à cette sphère.

(Q 2) Montrer que l'ensemble de représentation cartésienne $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-8x-2y-4z=4\\ x+y+z=0\end{cases}$ est un cercle dont on précisera le rayon r et le centre w.

Exercice 16 : On considère l'espace muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soient S la sphère décrite par l'équation cartésienne $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+5=0$ et D la droite passant par O et dirigée par $\vec{k}$.

(Q 1) Déterminer les points d'intersection de S et D et une équation cartésienne du plan tangent à S en chacun de ces points.

(Q 2) Déterminer l'intersection de S avec le plan P d'équation $y-z+1=0$.

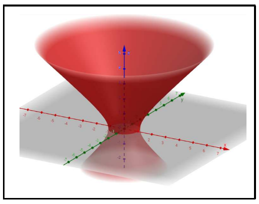
Exercice 17 : Former une équation cartésienne de la sphère S circonscrite au tétraèdre $ABCD$ où $A(0,2,4)$, $B(1,3,2)$, $C(2,1,3)$, $D(-2,-3,-1)$.

Exercice 18 : [corrigé] On note (Σ) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que :

$$(\Sigma) : x^2+y^2-z^2=1$$

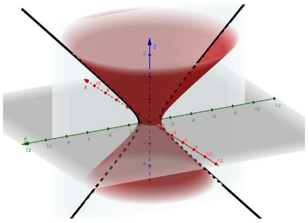
(Q 1) (Q a) Soit le plan Π_h d'équation $z=h$. Justifier que l'intersection $\Pi_h \cap \Sigma$ est un cercle dont on précisera le centre du cercle ainsi que son rayon.

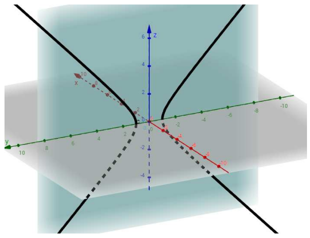
(Q b) On donne une représentation de Σ ci-dessous . Pourquoi observe-t-on le résultat précédent ?



(Q 2) Cet ensemble de points s'appelle "hyperboloïde à une nappe" et a été étudié pour la première fois par Christopher Wren en 1669. L'objectif est donc de justifier son nom.

(Q a) Ci-dessous deux représentations graphiques de $\Sigma \cap \mathcal{P}$ avec $\mathcal{P}$ un plan d'équation $x=0$ (l'une représente les deux objets, l'autre seulement l'intersection). Justifier donc le nom de Σ à l'aide de ces graphiques.





(Q b) Justifier que $M(x,y,z) \in \Sigma \cap \mathcal{P} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y^2-z^2 & = & 1 \end{array} \right.$

(Q c) Une nouvelle base. On pose $\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}}{2}$ et $\overrightarrow{v} = \frac{\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}}{2}$. Montrer que $\left(\overrightarrow{i};\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right)$ est une base de l'espace. Est-elle directe, est-elle orthogonale ? orthonormale ?

(Q d) Soit $M(x,y,z) \in \mathcal{P}$. Donner les coordonnées $(\alpha;\beta)$ de M dans le repère $\left(O;\ \overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right)$ de ce plan.

(Q e) Conclure.

(Q 3) (Q a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On note $\mathcal{D}_\theta$ l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \cos(\theta)x+\sin(\theta)y & = & 1 \\ \sin(\theta)x-\cos(\theta)y-z & = & 0 \end{array} \right.$$

Pourquoi $\mathcal{D}_\theta$ est-elle une droite ? On donnera un vecteur directeur, et on vérifiera que $M(\cos(\theta),\sin(\theta),0) \in \mathcal{D}_\theta$. Puis donner **une représentation paramétrique de cette droite.**

(Q b) Montrer que $\mathcal{D}_\theta \subset \Sigma$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

(Q c) Traitons la réciproque. Pour cela, soit $M(x,y,z) \in \Sigma$. On pose $c = \frac{yz-x}{1+z^2}$; $s = \frac{xz+y}{1+z^2}$. Vérifier que $c^2+s^2=1$. En déduire qu'il existe $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tel que $c=-\cos(\theta_0)$ et $s=\sin(\theta_0)$ et montrer finalement que $M \in \mathcal{D}_{\theta_0}$.

(Q d) Pourquoi observe-t-on la propriété que vous venez de démontrer ci-dessous ? (Tour à Kobé, au Japon). 

Indications

Correction de l'exercice 2 :

(Q 1) On cherche à savoir si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ (par exemple) sont colinéaires. On utilise alors le produit vectoriel :

$$\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Le produit vectoriel est non nul donc les points A, B et C ne sont pas alignés. Pour calculer une équation cartésienne du plan P' passant par ces points, on utilise le produit mixte (par exemple) :

$$M(x;y;z)\in\mathcal{P}'\Leftrightarrow \overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\text{ coplanaires}$$

$$\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x & \text{-1} & 1\\ y-1 & \text{-1} & 0\\ z-2 & \text{-1} & \text{-1}\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow x\times1-(y-1)\times2+(z-2)\times1=$$

$$\Leftrightarrow x-2y+z=0$$

(Q 2) On cherche à savoir si le système suivant a une solution en utilisant GAUSS JORDAN :

$$\begin{cases}x-2y+z&=&0\\x+2y-3z+4&=&0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2y+z&=&0\\4y-4z+4&=&0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-z+2&=&0\\y-z+1&=&0\end{cases}\Leftrightarrow\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right.$$

On a exprimé les inconnues principales, x, y, en fonction du paramètre z. On reconnait la représentation paramétrique d'une droite passant par $D(-2;-1;0)$ et de vecteur directeur $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 3 :

Un vecteur directeur est $\overrightarrow{u}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Le point $M(x;y;z)$ appartient à ce plan $\mathcal{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont orthogonaux (faites un schéma) ce qui est équivalent à

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u}=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=0\Leftrightarrow\boxed{x+y+z-3=0}$$

Correction de l'exercice 4 :

Un vecteur normal au plan est $\overrightarrow{n}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$.

Puisque $\overrightarrow{AH}$ est un vecteur orthogonal au plan, ce-dernier est colinéaire à $\overrightarrow{n}$. Il existe donc $t\in\mathbb{R}$ tel que : $\overrightarrow{AH}=t\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$. Notant (x,y,z) les coordonnées de H, on en déduit les relations : $x=1+t, y=1-t, z=4+2t$. Par ailleurs H appartient au plan, donc :
$x-y+2z=2\Leftrightarrow t=-1$. On en déduit : $H(0,2,2)$. Ainsi :

$$AH=\sqrt{(-1)^2+1^1+(-2)^2}=\sqrt{6}.$$

Appliquons également la formule

$$d(A;P)=\frac{|x-y+2z-2|}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}}=\frac{|1-1+2\times4-2|}{\sqrt{6}}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}.$$

Correction de l'exercice 6 :

(Q 1) Un vecteur directeur de $(\mathcal{D})$ est $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix}$. Deux vecteurs directeurs du plan recherché sont donc : $\overrightarrow{u}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$.
Ainsi, $\mathcal{P}$ correspond à l'ensemble des points $M(x;\ y;\ z)$ tels que :

$$\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right]=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x+1&0&3\\y-1&1&-1\\z&1&1\end{vmatrix}=0.\text{ Or :}$$

$$\begin{vmatrix}x+1&0&3\\y-1&1&-1\\z&1&1\end{vmatrix}=2x+3y-3z-1.$$ Ainsi, une équation cartésienne est :
$\underline{2x+3y-3z-1=0.}$

(Q 2) Nous obtenons directement un vecteur directeur de $(\mathcal{D})$: $\overrightarrow{u}=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$. Un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$ est : $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$. On prend $\overrightarrow{v}=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$. Il nous reste à déterminer un point du plan recherché, donc par exemple un point appartenant à $(\mathcal{D})$ au regard des hypothèses. On prend $A(1;\ 1;\ 0)$. Ainsi, $\mathcal{P}$ correspond à l'ensemble des points $M(x;\ y;\ z)$ tels que :

$$\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right]=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x-1&2&1\\y-1&-1&1\\z&3&-2\end{vmatrix}=0.\text{ Or :}$$

$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 1 \\ y-1 & -1 & 1 \\ z & 3 & -2 \end{vmatrix} = -x+7y+3z-6$. Ainsi, une équation du plan recherché est :
$\underline{-x+7y+3z-6=0}$.

Correction de l'exercice 7 :

$A(1;\ -1;\ 0) \in D$. Un vecteur directeur est : $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (il s'agit au final d'une paramétrisation de D par z). Puis $A'(2;\ -3;\ 0) \in D'$. Un vecteur directeur est : $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Equation du plan P contenant D et A' :

$$M(x,y,z) \in P \Leftrightarrow [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AA'}, \vec{u}] = 0 \Leftrightarrow -2x-y+5z+1=0$$

Puis, étudions si $D' \subset P$. Soit $M(x,y,z) \in D$. Alors il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} x &= 2+t \\ y &= -3+3t \\ z &= t \end{cases}$$

On teste finalement si $M(x,y,z) \in P$:

$$-2(2+t)-(3t-3)+5t+1 = -4-2t-3t+3+5t+1 = 0$$

Ainsi, $M(x,y,z) \in P$. Ceci étant vrai pour tous les points de D', on a donc montré que $D' \subset P$. Ainsi les droites sont coplanaires.

Correction de l'exercice 8 :

1. Pour tout $m \in \mathbb{R}$, $4+m^2 \neq 0$ d'où $(4+m^2, 4-m^2, -4m) \neq (0,0,0)$ et donc $(4+m^2)x+(4-m^2)y-4mz = m+8$ est bien l'équation d'un plan.
$\boxed{\text{Pour tout } m \in \mathbb{R}, P_m \text{ est un plan}}$
2. La distance entre Ω_x et $\mathcal{P}_m$ vaut
$$\boxed{d(\Omega_x, P_m)} = \frac{|(4+m^2)x+(4-m^2)+m-m-8|}{\sqrt{2}(m^2+4)} =$$
Il est remarquable que cette distance ne dépende pas de m.
3. Soit une sphère S qui convient. Comme son centre doit appartenir à Δ, il doit être de la forme $\Omega_x = (x, 1, -\frac{1}{4})$ avec un certain $x \in \mathbb{R}$. Et alors P_m est tangent à S si et seulement si la distance du centre à P_m est égale au rayon de la sphère, i.e. :
$$\begin{aligned} d(\Omega_x, P_m) = \frac{1}{\sqrt{2}} &\iff \frac{|x-1|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &\iff |x-1| = 1 \\ &\iff x=2 \text{ ou } x=0 \end{aligned}$$
$\boxed{\text{Il y a donc deux sphères qui conviennent de centres } \Omega_0}$

S_1 est la sphère de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et de centre Ω_0. Son équation cartésienne est donc

$$\boxed{x^2+(y-1)^2+\left(z+\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{2}}$$

Correction de l'exercice 11 :

$\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}\wedge(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{AB}$.
Or $\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MA} = \vec{0}$, donc : $\boxed{\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{AB}.}$

De la même façon : $\overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MC} = \boxed{-\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{AC}.}$

Enfin : $\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{MC} = (\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB})\wedge(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

En sommant les trois relations, et car $\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{MA}$, on en déduit :
$$\boxed{\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}.}$$

Correction de l'exercice 12 :

(Q 1) On part de $AC^2+BD^2 = AD^2+BC^2$ que l'on écrit plutôt : $AC^2-AD^2 = BC^2-BD^2$. Or :
$$\begin{aligned} AC^2-AD^2 &= \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\overrightarrow{AD} \\ &= (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}).(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}).(\overrightarrow{AB} \\ &= AB^2+2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+BC^2-(AB^2+2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD} \\ &= 2\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BD})+BC^2-BD^2 \end{aligned}$$
On en déduit : $AC^2-AD^2-(BC^2-BD^2) = 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}$.
Par conséquent :
$$\begin{aligned} AC^2-AD^2 = BC^2-BD^2 &\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow (AB) \text{ et } (DC) \text{ orthogonales} \end{aligned}$$

(Q 2) On traduit les hypothèses à l'aide de la question précédente :
(AB) orthogonales à (CD) donc : $AC^2+BD^2 = AD^2+BC^2$
(BC) orthogonale à (AD) donc : $BA^2+CD^2 = BD^2+CA^2$
On en déduit : $BA^2+CD^2 = AD^2+BC^2$ ce qui, encore d'après la question précédente, entraîne : (BD) et (AC) orthogonales.

Correction de l'exercice 13 :

On utilise les propriétés établies sur les systèmes linéaires pour traiter ces questions.

1. C'est un système d'une équation, trois inconnues. L'inconnue x est principale et y, z sont les paramètres.
$$M(x;y;z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow (x;y;z) = (\frac{y}{2}-\frac{3z}{2}+\frac{1}{2};y;z) = (\frac{1}{2};0;0)+y(1/2$$
Une famille de vecteurs directeurs est $\{(1/2;1;0);\ (-3/2;0;1)\}$.
Un système d'équations paramétriques de ce plan

est :
$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& (1/2)+y/2-3z/2 \\ y &=& y \\ z &=& z \end{array}\right.$$

2. C'est un système de deux équations, trois inconnues.

On utilise l'algorithme de Gauss-Jordan pour le résoudre.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & | & 6 \\ 1 & -1 & 3 & | & 2 \end{pmatrix} \sim_{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & | & 2 \\ 2 & 1 & -4 & | & 6 \end{pmatrix}$$
$$\sim_{L_2 \leftarrow (L_2-2L_1)/3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 & - \end{pmatrix}$$
$$\sim_{L_1 \leftarrow L_1+L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & -10/3 \end{pmatrix}$$

Le système est donc équivalent à :
$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& z/3+8/3 \\ y &=& 10z/3+2/3 \end{array}\right.$$

On a donc un système de rang 2, les inconnues principales sont x, y, que l'on exprime à l'aide de z le paramètre. Ainsi,

$M(x;y;z) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow (x;y;z) = (z/3+8/3; 10z/3+2/3; z) =$

Finalement, la droite a pour vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1/3 \\ 10/3 \\ 1 \end{pmatrix}$,

ou encore $\begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}$. Une représentation paramétrique est
$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 8/3+z/3 \\ y &=& 2/3+10z/3 \\ z &=& z \end{array}\right.$$

Correction de l'exercice 15 :

(Q 1) On calcule $R = \Omega A = \sqrt{(-1-4)^2+(1-1)^2+(2-2)^2}$ 5. Ainsi : $S: \ (x-4)^2+(y-1)^2+(z-2)^2 = 25 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-8x-2y-4z = 4$.

(Q 2) Il s'agit de l'intersection de S avec un plan P. Puisque : $D(\Omega, P) = \dfrac{|4+1+2|}{\sqrt{3}} = \dfrac{7\sqrt{3}}{3} < 5$, l'intersection est un cercle :

- de rayon : $\boxed{r = \sqrt{R^2 - D(\Omega,P)^2} = \sqrt{\dfrac{26}{3}}.}$
- dont le centre $\omega(x;\ y;\ z)$ appartient, d'une part au plan ce qui assure : $x+y+z=0$ et tel que $\overrightarrow{\Omega\omega}$ est un vecteur normale au plan, ce qui assure d'autre part $\overrightarrow{\Omega\omega}$ colinéaire à $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, soit : $x-4 = t,\ y-1 = t, z-2 = t$, avec $t \in \mathbb{R}$.
  On en déduit : $x+y+z = 3t+7$, donc $x+y+z = 0 \Leftrightarrow t = -\dfrac{7}{3}$, ce qui donne : $\boxed{\omega\left(5/3;\ -\dfrac{4}{3};\ -\dfrac{1}{3}\right).}$

Correction de l'exercice 18 :

(Q 1) (Q a) Le point $M(x;y;z)$ appartient à $\Pi_h \cap \Sigma$ si et seulement si $\left\{\begin{array}{lcl} z &=& h \\ x^2+y^2-z^2 &=& 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} z &=& h \\ x^2+y^2 &=& 1+ \end{array}\right.$

On reconnait l'équation d'un cercle de centre $(0,0,h)$ et de rayon $\sqrt{1+h^2}$.

(Q b) On observe une succession de cercles. Le cercle de plus petit rayon est celui inclus au plan (Oxy). Puis, pour z croissant et positif, alors le rayon augmente, de même si z est décroissant négatif.

(Q 2) (Q a) Il semblerait que les sections par des plans orthogonaux au plan (Oxy) et passant par l'origine soient des hyperboles.

(Q b) $M(x,y,z) \in \Sigma \cap \mathcal{P} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 0 \\ x^2+y^2-z^2 &=& 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 0 \\ y^2-z^2 &=& 1 \end{array}\right.$

(Q c) On calcule le produit mixte :
$$[\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}] = -1/2$$
. Ce dernier est non nul. Cette famille est donc une base de l'espace.

(Q d) Le point $M(x,y,z)$ est un point de ce plan si et seulement si $x=0$ et ses coordonnées sont $(0;y;z)$. On sait donc $\overrightarrow{OM} = y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$. D'autre part, $[y+z]\overrightarrow{u} + [y-z]\overrightarrow{v} = [y+z]\frac{\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}}{2} + [y-z]\frac{\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}}{2} = y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$. Ainsi, $\boxed{\overrightarrow{OM} = [y+z]\overrightarrow{u} + [y-z]\overrightarrow{v}.}$

(Q e) Soit $M \in \mathcal{P}$. Alors $M \in \Sigma \Leftrightarrow y^2-z^2 = 1 \Leftrightarrow (y-z)(y+z) = 1 \Leftrightarrow \alpha\beta = 1$. On reconnait l'équation d'une hyperbole.

(Q 3) (Q a) **Effectuons le produit vectoriel des deux normaux à ces deux plans.**
$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \sin(\theta) \\ -\cos(\theta) \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \\ -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
Ainsi, cet ensemble de points est une droite de vecteur directeur $\begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \\ -1 \end{pmatrix}$ et passant par exemple le point $(\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$. Une représentation paramétrique est donc
$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& \cos(\theta) - t\sin(\theta) \\ y &=& \sin(\theta) + t\cos(\theta) \\ z &=& -t \end{array}\right.$$

(Q b) Soit $M(x,y,x) \in \mathcal{D}_\theta$. Montrons que ce point appartient à Σ.
$$\begin{array}{ll} & x^2+y^2-z^2 \\ = & (\cos(\theta) - t\sin(\theta))^2 + (\sin(\theta)+t\cos(\theta))^2 - (-t)^2 \\ = & \cos^2(\theta) - 2t\cos(\theta)\sin(\theta) + t^2\sin^2(\theta) + \\ & \sin^2(\theta) + t^2\cos^2(\theta) + 2t\cos(\theta)\sin(\theta) - t^2 \\ = & 1 + t^2 - (t^2) = \boxed{1}. \end{array}$$

Par définition, $M \in \Sigma$.

Nous venons de montrer que
$\forall M \in \mathcal{D}_\theta, M \in \Sigma$. Ainsi, $\cup_{\theta\in\mathbb{R}} \subset \Sigma$.

(Q c) On a

$$\begin{aligned} c^2+s^2 &= \left(\frac{(yz)^2-2xyz+x^2}{(1+z^2)^2}\right)+\left(\frac{(xz)^2+2xyz+y^2}{(1+z^2)^2}\right) \\ &= \frac{(x^2+y^2)(z^2+1)}{(1+z^2)^2} = 1 \end{aligned}$$

car $M(x, y, z) \in \Sigma$. Ainsi, le point de coordonnées (c, s) appartient au cercle unité. Par conséquent, il existe $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tel que $c = -\cos(\theta_0)$ et $s = \sin(\theta_0)$.

On reprend la représentation cartésienne de $(\mathcal{D}_{\theta_0})$.
D'une part

$$\begin{aligned} \cos(\theta_0)x+\sin(\theta_0)y &= \frac{-(yz-x)}{1+z^2}x+\frac{xz+y}{1+z^2}y \\ &= \frac{-yzx+x^2}{1+z^2}+\frac{xzy+y^2}{1+z^2} \\ &= \frac{y^2+x^2}{1+z^2} \\ &= \frac{z^2+1}{1+z^2}=1 \end{aligned}$$

puisque $M(x, y, z) \in \Sigma$. D'autre part,

$$\begin{aligned} \sin(\theta_0)x-\cos(\theta_0)y-z &= \frac{xz+y}{1+z^2}x+\frac{yz-x}{1+z^2}y-z \\ &= \frac{x^2z+yx}{1+z^2}+\frac{y^2z-xy}{1+z^2}-z \\ &= \frac{[x^2+y^2]z}{1+z^2}-z \\ &= z-z=0 \end{aligned}$$

Ainsi, $M(x, y, z) \in \Sigma$.

Nous venons de montrer que
$\forall M \in \Sigma, \exists \theta_0 \in \mathbb{R}, M \in \mathcal{D}_{\theta_0}$. Ainsi,
$\Sigma \subset \cup_{\theta\in\mathbb{R}}\mathcal{D}_\theta$.

Nous avons donc montré que $\cup_{\theta\in\mathbb{R}}\mathcal{D}_\theta = \Sigma$ par double inclusion.

Cet ensemble de points est donc la réunion d'un ensemble de droites. On observe les droites sur cette tour et du fait de sa propriété d'être une réunion de droites, l'hyperboloïde à une nappe est très utilisée en architecture.

⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆