TD 2

Fonctions usuelles

LES INCONTOURNABLES

Valeur absolue

Exercice 1 : [solutions] Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

(a) $|x+1| = |2x-3|$; (b) $|x+1| = 2x+1$; (c) $|x^2-3x-3| = x+2$;

(d) $|x| + |x+1| = 2$; (e) $|x^2+5x+3| < x+2$; (f) $2-x < |x+1|$.

Exercice 2 : Montrer que : $\forall x \in [-1;\ 1],\ \forall y \in [-1;\ 1],\ |x^3-y^3| \leq 3|x-y|$.

Fonctions logarithme et exponentielle

Exercice 3 : [corrigé] Résoudre les équations ci-dessous :

(a) $\ln(2x^2+1) - 1 = \ln(2x+1)$; (b) $(\ln x)^2 + 3\ln x - 4 = 0$;

(c) $\ln(x) + \ln(x+3) = 2\ln(2)$; (d) $\ln(x+1) + \ln(x-3) = 2\ln(x-2)$;

(e) $\ln(x) + \ln(x^2-5) = \ln 2 + \ln(x^2-3)$; (f) $e^{2x} + e^x - 2 = 0$;

(g) $2e^x = e^{x^2}$; (h) $e^x - 4e^{-x} = 1$;

Exercice 4 : [corrigé] Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $e^{-2x} \geq \frac{1}{2}$; (b) $e^x < \frac{1}{4}e^{x^2}$;

(c) $\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) \geq 1$; (d) $\dfrac{e^x+1}{e^x-1} \leq 2$;

Fonctions hyperboliques

Exercice 5 : [solutions] Exprimer $\mathrm{ch}(x+y)$ et $\mathrm{sh}(x+y)$ en fonction de $\mathrm{ch}(x)$, $\mathrm{ch}(y)$, $\mathrm{sh}(x)$, $\mathrm{sh}(y)$.

Fonctions puissance

Exercice 6 : [solutions] Résoudre les équations ci-dessous :

(a) $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$; (b) $2^{x^3} = 3^{x^2}$; (c) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2}$;

POUR S'ENTRAÎNER

Valeur absolue

Exercice 7 : [corrigé] Montrer que pour tous réels positifs x et y, $|\sqrt{2+x}-\sqrt{2+y}| \leq \dfrac{|x-y|}{2\sqrt{2}}$.

Exercice 8 : [corrigé] Montrer que pour tous réels x et y, $\sqrt{|x+y|} \leq \sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}$.

Exercice 9 : [indications] Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\sqrt{\dfrac{b}{a}}=\sqrt{5}$. Montrer que : $\left|\sqrt{\dfrac{a}{b}}-\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right|=1$.

Fonctions logarithme et exponentielle

Exercice 10 : [corrigé] Résoudre les équations ci-dessous :

$$\text{(a) } \frac{\ln(x)}{\ln(a)}=\frac{\ln(a)}{\ln(x)},\ a>0\,; \quad \text{(b) } \frac{\ln(x)}{\ln 3}-\frac{\ln(x)}{\ln 2}=1.$$

Exercice 11 : [corrigé] Résoudre les inéquations suivantes :

$$\text{(a) } e^x \geq e^{2x}-1\,; \quad \text{(b) } \ln(e^x-e^{-x})>2.$$

Exercice 12 : [solutions] Résoudre l'équation : $\sqrt{e^{2x}-3e^x+2}=e^x-2$.

Exercice 13 : [indications] Résoudre l'équation de paramètre réel m : $e^x-e^{-x}=2m$.

Fonctions hyperboliques

Exercice 14 : [corrigé] Résoudre les équations d'inconnue x :

(a) $\operatorname{sh}(x)=\lambda$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$

(b) $19\operatorname{sh}x-16\operatorname{ch}x=8$

(c) $(1+m)\operatorname{ch}(x)+(1-m)\operatorname{sh}(x)=-2$, $m\in]-1;\ 1[$

Fonctions puissances

Exercice 15 :

Parmi les relations suivantes, lesquelles sont exactes ? Justifier.

(a) $(a^b)^c=a^{bc}$?

(b) $a^b a^c=a^{bc}$?

(c) $a^{2b}=(a^b)^2$?

(d) $(ab)^c=a^{c/2}b^{c/2}$?

(e) $(a^b)^c=a^{(b^c)}$?

(f) $(a^b)^c=(a^c)^b$?

Exercice 16 : [corrigé] Simplifier a^b pour $a = \exp x^2$ et $b = \frac{1}{x} \ln x^{1/x}$.

Exercice 17 : [solutions] Résoudre l'équation : $4^{x+1} + 2^{2-x} = 18$.

Exercice 18 : [solutions] Résoudre le système : $\left\{ \begin{array}{l} 8^x = 10y \\ 2^x = 5y \end{array} \right.$.

DIVERS

Exercice 19 : [indications] **Le trésor de Rackham ™.** On vient de retrouver un parchemin attribué à Rackham Le Pirate. Sur ce parchemin, figure le plan d'une île avec à côté le message qui suit : « *Sur la ligne qui passe par le cocotier et le mât, un trésor j'ai caché. Deux fois la distance du trésor au mât, plus trois fois la distance du trésor au cocotier est égal à* 65 *pas. De plus,* 30 *pas j'ai compté entre le mât et le cocotier.* »Où se situe exactement le trésor de Rackham le Pirate ?

Exercice 20 : [corrigé] Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{R}$ pour que les courbes d'équations $y = \text{sh}x$ et $y = 2x + a$ aient trois points communs distincts.

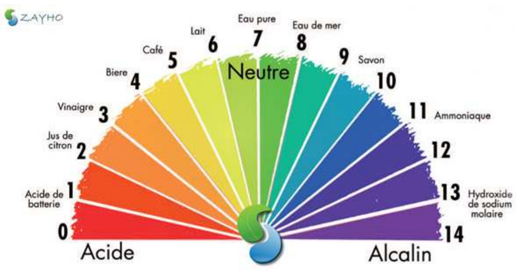
Exercice 21 :
Le pH d'une solution est égal au logarithme décimal de l'inverse de la concentration (notée $[H^+]$)(en mol par litre) en ion H^+ de la solution :

$$pH = \log(\frac{1}{[H^+]})$$

(a) Par exemple, le pH de l'eau pure est égal à 7. Quelle est la concentration en mol / l d'ions H^+ dans l'eau pure ?

(b) Exprimer la concentration en ions H^+ en fonction du pH.

(c) Montrer que si cette concentration est divisée par 10 alors le pH augmente de 1.



Exercice 22 : Pour mesurer le niveau sonore reçu par un individu, on utilise la notion de niveau acoustique, noté L_I et exprimé en décibel (dB) en posant :

$$L_I = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right),$$

où I est l'intensité acoustique du son perçu en ce point, exprimé en Watts (W) et I_0 est une intensité de référence très faible égale à 10^{-12} Watts/metre ^{2}.

Lorsque deux sources produisent deux sons en un point, ce sont les intensités acoustiques qui s'ajoutent.

De combien de décibels augmente le niveau sonore perçu par un individu lorsqu'on l'on place deux sources en un même point qui produisent deux sons de même intensité ?

Indications

Exercice 9 : En élevant au carré, on constate que : $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 3$. On peut alors déterminer précisément : $\left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)$

Exercice 13 : Faire le changement de variable $y = e^x$ afin de se ramener à la résolution d'une équation du second degré.

Exercice 19 : On se place sur la droite réelle, où l'on peut supposer que le cocotier est à l'origine et que le mât a pour abscisse 30. On pose alors x l'abscisse du trésor et on essaie d'obtenir une équation en x. Pour obtenir cette dernière, rappelez vous que si a et b sont deux nombres réels, alors la distance entre a et b est $|b-a|\dots$

Solution de l'exercice 1 :

(a) $S = \left\{\frac{2}{3};\ 4\right\}$, (b) $S = \{0\}$, (c) $S = \{-1;\ 5; 1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}\}$, (d) $S = \{-\frac{3}{2};\ \frac{1}{2}\}$, (e) $S =]-1;\ -2+\sqrt{3}[$, (f) $S = \left]\frac{1}{2};\ +\infty\right[$.

Solution de l'exercice 5 :

$\mathrm{ch}(x+y) = \mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(y)$ et $\mathrm{sh}(x+y) = \mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(y) + \mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(y)$.

Solution de l'exercice 6 :

(a) $S = \{1;\ 4\}$, (b) $S = \left\{0;\ \frac{\ln(3)}{\ln(2)}\right\}$, (c) $S = \left\{\frac{\ln\left(\frac{13}{7}\right)}{\ln(2/3)}\right\}$,

Solution de l'exercice 12 :

$S = \{\ln(2)\}$

Solution de l'exercice 17 :

$S = \left\{1;\ \frac{\ln\left(-1+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)}{\ln(2)}\right\}$.

Solution de l'exercice 18 :

$S = \left\{\left(\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$.

Correction de l'exercice 2 :

On utilise l'identité remarquable : $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$. Puis, par l'inégalité triangulaire, $|x^2+xy+y^2| \leq x^2 + |xy| + y^2 \leq 3$. On en déduit $|x^3-y^3| \leq 3|x-y|$.

Correction de l'exercice 3 :

(a) Les termes de l'équation sont définis si et seulement si : $2x^2+1>0$ et $2x+1>0$. La première inégalité est toujours vérifiée car le carré d'un nombre réel est toujours positif et la seconde est vraie si et seulement si $x > -\frac{1}{2}$.

Ainsi :

$\forall x \in \left]-\frac{1}{2};\ +\infty\right[$,

$$\begin{aligned} & \ln(2x^2+1) - 1 = \ln(2x+1) \\ \Leftrightarrow\ & \ln(2x^2+1) - \ln(e) = \ln(2x+1) \\ \Leftrightarrow\ & \ln\left(\frac{2x^2+1}{e}\right) = \ln(2x+1) \\ \Leftrightarrow\ & 2x^2+1 = 2ex+e \\ \Leftrightarrow\ & 2x^2 - 2ex + 1 - e = 0. \end{aligned}$$

Nous avons alors un trinôme de discriminant : $\Delta = 4e^2+8e-8 = 4(e^2+2e-2)$. D'autre par : $e>2$ donc : $e^2+2e-2>6>0$. On en déduit deux racines réelles distinctes :

$x_1 = \frac{2e - 2\sqrt{e^2+2e-2}}{4} = \frac{e-\sqrt{e^2+2e-2}}{2}$ $x_2 = \frac{e+\sqrt{e^2+2e-2}}{2}$.

Nous avons clairement : $x_2 > 0$ donc $x_2 \in \left]-\frac{1}{2};\ +\infty\right[$.

De plus : $e < 3$ donc : $\sqrt{e^2+2e-2} < \sqrt{13} < \sqrt{16}$, donc : $-\sqrt{e^2+2e-2} > -4$. Par ailleurs : $e>2$, donc : $e - \sqrt{e^2+2e-2} > -2$, ce qui prouve que $x_1 > -1$ donc appartient également à l'intervalle $\left]-\frac{1}{2};\ +\infty\right[$.

Finalement : $\boxed{S = \{x_1;\ x_2\}.}$

(b) Les termes de l'équation sont définis si et seulement si $x>0$. On pose : $X = \ln(x)$ ce qui nous donne le trinôme : $X^2+3X-4=0$. Ce dernier a pour discriminant : $\Delta = 5^2$, d'où : $X^2+3X-4=0 \Leftrightarrow X = -4$ ou $X=1$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} \ln(x)^2 + 3\ln(x) - 4 = 0 \ & \Leftrightarrow \ln(x) = -4 \text{ ou } \ln(x) = 1 \\ & \Leftrightarrow x = e^{-4} \text{ ou } x = e. \end{aligned}$$

Les deux solutions sont bien strictement positives. On en conclue : $\boxed{S = \{e^{-4};\ e\}.}$

(c) Les termes de l'équation sont définis si et seulement si $x+3>0$ et $x>0$ ce qui est équivalent à $x>0$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} & \ln(x) + \ln(x+3) = 2\ln(2) \\ \Leftrightarrow\ & \ln(x^2+3x) = \ln(4) \\ \Leftrightarrow\ & x^2+3x = 4 \\ \Leftrightarrow\ & x^2+3x-4 = 0. \end{aligned}$$

Les racines de ce trinôme sont : 1 et -4. Or $-4 \notin \mathbb{R}_+^*$, donc : $\boxed{S = \{1\}.}$

(d) Les termes de l'équation sont définis si et seulement si $x+1>0$, $x-3>0$ et $x-2>0$ ce qui est équivalent à $x>3$.

$\forall x \in]3;\ +\infty[$,

$$\begin{aligned} & \ln(x+1) + \ln(x-3) = 2\ln(x-2) \\ \Leftrightarrow\ & \ln((x+1)(x-3)) = \ln((x-2)^2) \\ \Leftrightarrow\ & \ln(x^2-2x-3) = \ln(x^2-4x+4) \\ \Leftrightarrow\ & x^2-2x-3 = x^2-4x+4 \\ \Leftrightarrow\ & x = \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

Puisque : $\frac{7}{2} \in]3;\ +\infty[$, on en déduit : $\boxed{S = \left\{\frac{7}{2}\right\}.}$

(e) Les termes de l'équation sont définis si et seulement si : $x > 0$, $x^2-5>0$ et $x^2-3>0$. Or $x^2-5>0 \Leftrightarrow x \in]-\infty;\ -\sqrt{5}[\cup]\sqrt{5};\ +\infty[$ et $x^2-3>0 \Leftrightarrow x \in]-\infty;\ -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3};\ +\infty[$, d'où un domaine de validité qui est : $D =]\sqrt{5};\ +\infty[$.

$\forall x \in D$,

$$\begin{aligned} & \ln(x)+\ln(x^2-5)=\ln(2)+\ln(x^2-3)\ . \\ \Leftrightarrow\ & \ln(x^3-5x)=\ln(2x^2-6) \\ \Leftrightarrow\ & x^3-5x=2x^2-6 \\ \Leftrightarrow\ & x^3-2x^2-5x+6=0 \end{aligned}$$

Le polynôme de degré 3 a 1 pour racine évidente. La division euclidienne par $x-1$ (laissée au lecteur) donne la factorisation :

$x^3-2x^2-5x+6=(x-1)(x^2-x-6)$. Ainsi : $x^3-2x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow x=1$ ou $x^2-x-6=0$.

Or, le trinôme a pour racines : -2 et 3. Il ne nous reste plus qu'à constater que seul $3 \in D$, d'où : $\boxed{S=\{3\}.}$

(f) Les termes de l'équation sont définis sur $\mathbb{R}$. On fait alors le changement de variable : $X=e^x$ pour nous ramener au trinôme : $X^2+X-2=0$. Ce dernier a 1 et -2 pour racines. Ainsi :

$e^{2x}+e^x-2=0 \Leftrightarrow e^x=1$ ou $e^X=-2$. Puisque $\forall x \in \mathbb{R}, e^x>0$, la deuxième équation n'a pas de solutions. De plus : $e^x=1 \Leftrightarrow x=0$. Ainsi : $\boxed{S=\{0\}.}$

(g) $$\forall x \in \mathbb{R},\quad 2e^x=e^{x^2} \begin{aligned} &\Leftrightarrow \ln(2e^x)=\ln(e^{x^2}) \\ &\Leftrightarrow \ln(2)+x=x^2 \\ &\Leftrightarrow x^2-x-\ln(2)=0. \end{aligned}$$

Nous avons donc un trinôme de discriminant : $\Delta = 1+4\ln(2)$. $\Delta>0$ d'où deux solutions réelles distinctes :

$x_1=\dfrac{1-\sqrt{1+4\ln(2)}}{2}$, $x_2=\dfrac{1-\sqrt{1+4\ln(2)}}{2}$.

$\boxed{S=\{x_1;\ x_2\}.}$

(h) Les termes de l'équation sont définis sur $\mathbb{R}$. On pose : $X=e^x$ ce qui nous ramène à l'équation : $X-\dfrac{4}{X}=1 \Leftrightarrow X^2-X-4=0$.

Il s'agit d'un trinôme de discriminant : $\Delta=\sqrt{17}$. Ce dernier étant strictement positif, on en déduit deux solutions réelles distinctes :

$x_1=\dfrac{1-\sqrt{17}}{2}$, $x_2=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$.

Au final, $e^x-4e^{-x}=1 \Leftrightarrow e^x=x_1$ ou $e^x=x_2$.

Puisque $x_1<0$, l'équation $e^x=x_1$ n'a pas de solutions et $e^x=x_2 \Leftrightarrow X=\ln(x_2)$.

Bref : $\boxed{S=\left\{\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}\right)\right\}.}$

Correction de l'exercice 4 :

1. $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} & e^{-2x} \geq \tfrac{1}{2} \\ \Leftrightarrow\ & -2x \geq \ln(1/2) \text{ car } \ln \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^* \\ \Leftrightarrow\ & x \leq -\ln(1/2)/2 \text{ car } -2<0 \\ \Leftrightarrow\ & x \leq \frac{\ln(2)}{2} \text{ car } \ln(1/a)=-\ln(a). \end{aligned}$$

Ainsi : $\boxed{S=\left]-\infty;\ \dfrac{\ln(2)}{2}\right].}$

2. $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} & e^x < \tfrac{1}{4}e^{x^2} \\ \Leftrightarrow\ & x < \ln\left(\tfrac{1}{4}e^{x^2}\right) \text{ car } \ln \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^* \\ \Leftrightarrow\ & x < -\ln(4)+x^2/(\text{propriétés algébriques de } \ln) \\ \Leftrightarrow\ & x^2-x-\ln(4)>0. \end{aligned}$$

Nous sommes donc ramenés à étudier le signe dun trinôme de discriminant $\Delta=1+4\ln(4)$. Puisque $\Delta>0$, le trinôme est positif à l'extérieur des racines : $x_1=\dfrac{1-\sqrt{1+4\ln(4)}}{2}$, $x_2=\dfrac{1+\sqrt{1+4\ln(4)}}{2}$, ce qui prouve que :

$\boxed{S=]-\infty;\ x_1[\cup]x_2;\ +\infty[.}$

3. Les termes de l'inéquation sont définis si et seulement si :

$\dfrac{x-1}{x+1}>0$. On étudie donc le signe de ce quotient à l'aide d'un tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{x-1}{x+1}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

Ainsi l'inéquation n'a de sens que sur $D=]-\infty;\ -1[\cup]1;\ +\infty[$.

$$\begin{aligned} \forall x \in D,\quad & \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \geq 1 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{x-1}{x+1} \geq e \text{ (stricte croissance de } \exp \text{)} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{x-1-e(x+1)}{x+1} \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{(1-e)x-(1+e)}{x+1} \geq 0. \end{aligned}$$

Il ne nous reste plus qu'à étudier le signe de ce quotient à l'aide d'un tableau de signes :

Le signe du numérateur est donné par l'inéquation suivante :

$$\begin{aligned} \forall x \in D,\quad & (1-e)x-(1+e) \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ & (1-e)x \geq 1+e \\ \Leftrightarrow\ & x \leq \frac{1+e}{1-e} \text{ car } 1-e<0. \end{aligned}$$

Le dénominateur change de signe en -1. Pour compléter le tableau de signes, il nous faut donc déterminer le nombre le plus grand entre -1 et $\dfrac{1+e}{1-e}=-\dfrac{e+1}{e-1}$. Pour ceci, nous remarquons que $e+1>e-1$ donc : $\dfrac{e+1}{e-1}>1$, ce qui entraîne : $-\dfrac{e+1}{e-1}<-1$.

Il ne nous reste plus qu'à synthétiser l'ensemble dans le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\dfrac{e+1}{e-1}$		-1		1		$+\infty$
$(1-e)x-(1+e)$		$+$	0	$-$				$-$	
$x+1$		$-$		$+$	0			$+$	
$\dfrac{(1-e)x-(1+e)}{x+1}$		$-$	0	$+$	‖		‖	$-$	

Au final : $\boxed{S=\left[-\dfrac{e+1}{e-1};\ -1\right[.}$

4. Les termes de l'inéquation ont un sens si et seulement si : $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$. De plus,

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad & \frac{e^x+1}{e^x-1} \leq 2 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{e^x+1-2(e^x-1)}{e^x-1} \leq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{-e^x+3}{e^x-1} \leq 0. \end{aligned}$$

Or, $-e^x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \leq 3 \Leftrightarrow x \leq \ln(3)$. De même, $e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$. On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	0		$\ln(3)$		$+\infty$
$-e^x+3$	$+$	$\vert$	$-$	0	$-$	
e^x-1	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$\dfrac{-e^x+3}{e^x-1}$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Au final, $\boxed{S =]-\infty;\ 0[\cup[\ln(3);\ +\infty[.}$

Correction de l'exercice 7 :

On peut penser à utiliser la quantité conjuguée afin d'enlever les racines carrées.

$$\sqrt{2+x}-\sqrt{2+y} = \frac{(2+x)-(2+y)}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2+y}} = \frac{x-y}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2+y}}$$

Puisque les réels x, y sont positifs, on remarque que $\sqrt{2+x}+\sqrt{2+y} \geq 2\sqrt{2}$. Finalement,

$$|\sqrt{2+x}-\sqrt{2+y}| \leq \frac{|x-y|}{2\sqrt{2}}$$

Correction de l'exercice 8 :

Les deux membres de cette inégalité sont positifs. Afin d'enlever la racine carrée, nous pouvons donc utiliser la fonction carrée et raisonner par équivalences.

$$\sqrt{|x+y|} \leq \sqrt{|x|}+\sqrt{|y|} \Leftrightarrow |x+y| \leq |x|+|y|+2\sqrt{|x|}\sqrt{|y|}(*).$$

Par l'inégalité triangulaire, on sait que $|x+y| \leq |x|+|y|$. De plus, $2\sqrt{|x|}\sqrt{|y|} \geq 0$. En additionnant ces deux inégalités, nous obtenons $(*)$ et par équivalence l'inégalité demandée.

Correction de l'exercice 10 :

(a) Les termes de l'équation sont définis si et seulement si $x > 0$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{\ln(x)}{\ln(a)} = \frac{\ln(a)}{\ln(x)} \quad & \Leftrightarrow \ln(x)^2 = \ln(a)^2 \\ & \Leftrightarrow \ln(x) = \ln(a) \text{ ou } \ln(x) = -\mathrm{l} \\ & \Leftrightarrow x = a \text{ ou } x = e^{-\ln(a)} \\ & \Leftrightarrow x = a \text{ ou } x = e^{\ln(1/a)} \\ & \Leftrightarrow x = a \text{ ou } x = \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{\ln(x)}{\ln(3)} - \frac{\ln(x)}{\ln(2)} = 1 \quad & \Leftrightarrow \ln(x)\left(\frac{1}{\ln(3)} - \frac{1}{\ln(2)}\right) = 1 \\ & \Leftrightarrow \ln(x)\frac{\ln(2)-\ln(3)}{\ln(2)\ln(3)} = 1 \\ & \Leftrightarrow \ln(x) = \frac{\ln(2)\ln(3)}{\ln(2)-\ln(3)} \\ & \boxed{x = \exp\left(\frac{\ln(2)\ln(3)}{\ln(2/3)}\right).} \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 11 :

1. Les termes de l'inéquation sont définis si et seulement si $x \in \mathbb{R}$. On pose alors : $X = e^x$ pour nous ramener à l'inéquation : $X \geq X^2 - 1 \Leftrightarrow X^2 - X - 1 \leq 0$. On sait que le trinôme $X^2 - X - 1$ est positif à l'extérieur des racines c'est à dire :
$$\begin{aligned} X^2 - X - 1 \leq 0 \quad X \in & \Leftrightarrow \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] \\ & \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq X \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$
Par conséquent, puisque $X = e^x$,
$$\begin{aligned} & e^x \geq e^{2x} - 1 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq e^x \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{aligned}.$$
Enfin, puisque $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$, on sait que l'inégalité : $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \leq e^x$ est toujours vérifiée. Par ailleurs, par stricte croissance de la fonction $\ln$,
$e^x \leq \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x \leq \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. On en déduit :
$$\boxed{S = \left]-\infty;\ \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right].}$$
2. Les termes de l'inéquation ont un sens si et seulement si :
$$\begin{aligned} & e^x - e^{-x} > 0 \\ \Leftrightarrow \quad & e^x > e^{-x} \\ \Leftrightarrow \quad & x > -x \text{ par stricte croissance de } \exp \\ \Leftrightarrow \quad & 2x > 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x > 0. \end{aligned}$$
Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$,
$$\begin{aligned} & \ln(e^x - e^{-x}) \geq 2 \\ \Leftrightarrow \quad & e^x - e^{-x} \geq e^2 \text{ car } \exp \text{ est stricteme nt croissante sur } \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow \quad & e^x - \frac{1}{e^x} \geq e^2 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{(e^x)^2 - 1 - e^2e^x}{e^x} \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & e^{2x} - e^2e^x - 1 \geq 0 \text{ car } e^x > 0. \end{aligned}$$
On se ramène alors à un trinôme en posant : $X = e^x$. Ensuite :
$$X^2 - e^2X - 1 \geq 0 \Leftrightarrow X \in \left]-\infty;\ \frac{e^2-\sqrt{e^4+4}}{2}\right[\cup\left[\frac{e^2+\sqrt{e^4+4}}{2};\ +\infty\right[.$$
Donc : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$,
$\ln(e^x - e^{-x}) \geq 2 \Leftrightarrow e^x \leq \dfrac{e^2-\sqrt{e^4+4}}{2}$ ou $e^x \geq \dfrac{e^2+\sqrt{e^4+4}}{2}$.
Or, $e^4 + 4 < e^4$ donc : $\sqrt{e^4+4} < e^2$ et donc :

$\dfrac{e^2 - \sqrt{e^4+4}}{2} < 0$. La première inéquation n'a donc pas de solutions. Pour ce qui est de la seconde, puique : $\dfrac{e^2 + \sqrt{e^4+4}}{2} > 0$, on sait que : $e^x \geq \dfrac{e^2 + \sqrt{e^4+4}}{2} \Leftrightarrow x \geq \ln\left(\dfrac{e^2 + \sqrt{e^4+4}}{2}\right)$ par stricte croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}$.

Finalement :

$$\boxed{S = \left]\ln\left(\frac{e^2 + \sqrt{e^4+4}}{2}\right) ; +\infty\right[.}$$

Correction de l'exercice 14 :

(a) **Les termes de l'équation sont définis pour tout réel x.**

$$\begin{aligned} \mathrm{sh}(x) = \lambda &\Leftrightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \lambda \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 2\lambda \\ &\Leftrightarrow (e^x)^2 - 2\lambda e^x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} X & = & e^x \\ X^2 - 2\lambda X - 1 & = & 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Le discriminant est $\Delta = 4\lambda^2 + 4$ et est donc strictement positif pour tout réel λ. Nous avons donc deux solutions :

$$\frac{2\lambda \pm \sqrt{4\lambda^2+4}}{2} = \lambda \pm \sqrt{\lambda^2+1}$$

Et ainsi

$$\boxed{\mathrm{sh}(x) = \lambda \Leftrightarrow e^x = \lambda \pm \sqrt{\lambda^2+1}}$$

On doit donc étudier le signe de ces deux nombres :

Cas 1. **Étude du signe de $\lambda - \sqrt{\lambda^2+1}$.**

On résout l'inéquation :

$$\lambda - \sqrt{\lambda^2+1} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda > \sqrt{\lambda^2+1}$$

i. Si $\lambda \leq 0$, alors λ n'est pas solution de cette inéquation (un négatif serait strictement supérieur à un positif).

ii. Si $\lambda > 0$, alors on peut utiliser la fonction carrée qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

$$\lambda > \sqrt{\lambda^2+1} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 > \lambda^2 + 1$$

Cette dernière inégalité n'est jamais vérifiée.

Finalement, par disjonction des cas, on a montré que :

$$\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda - \sqrt{\lambda^2+1} \leq 0.}$$

Cas 2. **Étude du signe de $\lambda + \sqrt{\lambda^2+1}$.**

On résout l'inéquation :

$$\lambda + \sqrt{\lambda^2+1} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\lambda < \sqrt{\lambda^2+1}$$

i. Si $\lambda > 0$, alors λ est solution de cette inéquation.

ii. Si $\lambda \leq 0$, alors on peut utiliser la fonction carrée qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

$$-\lambda < \sqrt{\lambda^2+1} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 < \lambda^2 + 1$$

Cette dernière inégalité est toujours vérifiée.

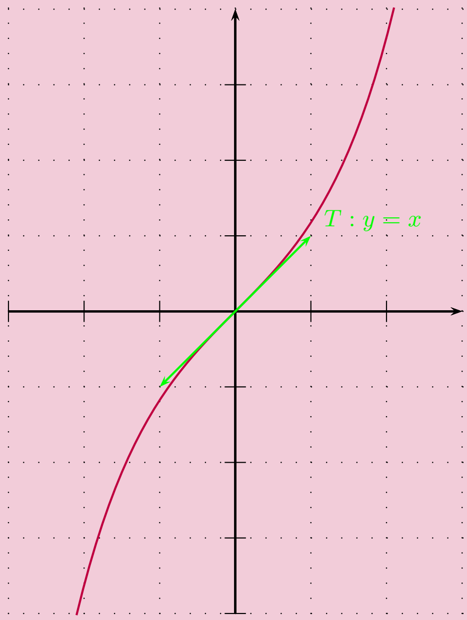
Finalement, par disjonction des cas, on a montré que :

$$\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda + \sqrt{\lambda^2+1} > 0.}$$

En conclusion,

$$\mathrm{sh}(x) = \lambda \Leftrightarrow \boxed{x = \ln\left(\lambda + \sqrt{1+\lambda^2}\right)}$$

C'est normal ?



(b) $\{\ln(7)\}$

(c) Si $m > 0$, $S = \emptyset$, sinon $S = \{\ln(\sqrt{1-m^2}-1)\}$.

Correction de l'exercice 16 :

Par définition,

$$\begin{aligned} & a^b = \exp(b\ln(a)) \\ = \quad & \exp\left(\tfrac{1}{x}\ln(x^{1/x})\ln(\exp(x^2))\right) \\ = \quad & \exp\left(\tfrac{1}{x}\times\tfrac{1}{x}\ln(x)x^2\right) \\ = \quad & \exp\Big(\ln(x)\Big) \\ = \quad & \boxed{x}. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 20 : Posons : $g(x) = \text{sh}(x) - 2x - a$. On cherche les valeurs de a pour lesquelles la courbe représentative de g a au moins trois zéros. Les variations de g s'obtiennent facilement : en effet g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \text{ch}(x) - 2$. On résout alors l'inéquation $\text{ch}(x) - 2 \geq 0$ en posant : $X = e^x$. En effet, l'expression $\text{ch}(x) - 2$ devient : $\dfrac{X + \frac{1}{X}}{2} - 2 = \dfrac{X^2 - 4X + 1}{2}$. Or : $\dfrac{X^2-4X+1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow X \in]-\infty;\ 2-\sqrt{3}] \cup [2+\sqrt{3};\ +\infty[$. Par conséquent : $\text{ch}(x) - 2 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \leq 2 - \sqrt{3}$ ou $e^x \geq 2 + \sqrt{3}$. Par ailleurs, $e^x \leq 2 - \sqrt{3} \Rightarrow x \leq \ln(2-\sqrt{3})$. De même : $e^x \geq 2 + \sqrt{3} \Leftrightarrow x \geq \ln(2+\sqrt{3})$. Nous en déduisons donc le tableau de variations de g :

x	$-\infty$		$\ln(2-\sqrt{3})$		$\ln(2+\sqrt{3})$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g	$-\infty$	↗	$g(\ln(2-\sqrt{3}))$	↘	$g(\ln(2+\sqrt{3}))$	↗	$+\infty$

La courbe représentative de g a donc trois zéros distincts si et seulement si $g(\ln(2-\sqrt{3})) \geq 0$ et $g(\ln(2+\sqrt{3})) \leq 0$.

Or $g(\ln(2-\sqrt{3})) = \text{sh}(\ln(2-\sqrt{3})) - 2\ln(2-\sqrt{3}) - a = \dfrac{2-\sqrt{3}-\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}}{2} - 2\ln(2-\sqrt{3}) - a = -\sqrt{3} - 2\ln(2-\sqrt{3}) - a$. De la même façon, $g(\ln(2+\sqrt{3})) = \sqrt{3} - 2\ln(2+\sqrt{3}) - a$.

En conclusion, les deux courbes représentatives ont trois points communs distincts si et seulement si :

$$\boxed{a \in [2\ln(2-\sqrt{3}) + \sqrt{3};\ 2\ln(2+\sqrt{3}) - \sqrt{3}].}$$

REMARQUE : Nous obtenons les limites de f en l'infini en factorisant par x puis en utilisant les croissances comparées de $\exp(x)$ avec x.