TD 5

Études de fonctions réelles

LES INCONTOURNABLES

Applications entre ensembles

Exercice 1 : [corrigé] Soient A, B deux parties de E et $f \in \mathcal{F}(E, F)$. Montrer que $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$.

Généralités sur les fonctions

Exercice 2 : Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Si f et g sont impaires, que peut-on dire des fonctions $fg, f \circ g$?. Justifier.

Exercice 3 : [solutions] [corrigé] Justifier que les fonctions, dont une expression algébrique est donnée ci-dessous, sont dérivables sur un ensemble à préciser, puis calculer les dérivées :

$$\text{(a)}\ (2x^2 - x - 1)^6;\quad \text{(b)}\ 2x + 1 - \frac{3}{(x-2)^3};\quad \text{(c)}\ \frac{x^5 + x^4 - 2x^2 + 1}{(x^2-1)^2};\quad \text{(d)}\ \sqrt{1 - \ln(x)};\quad \text{(e)}\ \sqrt[3]{(x^2-1)^2};$$

Exercice 4 : [solutions] [corrigé] Déterminer les limites suivantes :

(a) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (\ln(x+1) - \ln(2x-3))$; (b) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$; (c) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x\sqrt{x}\left(e^{-x}\right)^3$;

(d) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (e^x - 3x^2 - 1)$; (e) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (\ln(x) - x^2)$; (f) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x}$;

Exercice 5 : [solutions] [corrigé] Calculer les limites suivantes aux points proposés :

(a) $\dfrac{x^3 + x^2 + x - 14}{x^2 - 4}$ en 2 ; (b) $\dfrac{\sqrt{2x+1} - 1}{x}$ en 0 ; (c) $\dfrac{\sqrt{x+5} - 3}{x - 4}$ en 4.

Études de fonctions

Exercice 6 : On considère la fonction d'expression $f(x) = x \ln\left(\dfrac{x-1}{1+x}\right)$.

1. Justifier qu'il est possible de restreindre le domaine d'étude à $D =]1;\ +\infty[$.
2. (a) Calculer $\displaystyle\lim_{x \to 1} f(x)$.

   (b) Vérifier que $f(x) = -\dfrac{2x}{x+1} \dfrac{\ln\left(1 - \frac{2}{x+1}\right)}{-\frac{2}{x+1}}$. En déduire que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote en l'infini dont on donnera une équation.
3. (a) Montrer que : $\forall x \in D$, $\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) + \dfrac{2x}{x^2-1} \geq 0$.

   (b) Dresser le tableau de variations de f sur D en précisant les limites au bords. En déduire l'allure de sa courbe représentative.

Exercice 7 : [corrigé] On note th la fonction d'expression $\mathrm{th}(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$ et on pose : $g(x) = x\mathrm{th}(x)$.

1. Déterminer le domaine de définition de th et vérifier qu'il suffit d'étudier g sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{th}(x) < 1$ et $\mathrm{th}'(x) = 1 - \mathrm{th}^2(x)$.
3. Déterminer les variations de g sur $\mathbb{R}_+$.
4. (a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{th}(x)$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

   (b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} (g(x) - x) = 0$. Qu'en déduit-on pour $\mathcal{C}_g$?

Exercice 8 : [indications] Établir les inégalités suivantes :

(Q 1) $\forall x \in \,]-1, +\infty[\,, \frac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$

(Q 2) $\forall x \in \mathbb{R}^+, x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$. Quelles inégalités peut-on obtenir si $x < 0$?

POUR S'ENTRAÎNER

Applications entre ensembles

Exercice 9 : [corrigé] Soient A, B deux parties de E et $f \in \mathcal{F}(E,F)$.

1. Montrer que : (a) $f\big(A \cup B\big) = f\big(A\big) \cup f\big(B\big)$; (b) $f\big(A \cap B\big) \subset f\big(A\big) \cap f\big(B\big)$.
2. A-t-on $f\big(A\big) \cap f\big(B\big) \subset f\big(A \cap B\big)$?

Exercice 10 : [corrigé] Soit l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^2 + 2z + 1 \end{array}$.

1. Déterminer $f(\mathbb{R})$ puis $f^{-1}(\mathbb{R})$.
2. Quelle est l'image réciproque de l'ensemble des nombres complexes de module 1 ?

Généralités sur les fonctions

Exercice 11 : Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Écrire la définition à l'aide de quantificateurs de "f est croissante", ainsi que sa négation. La négation de "f est croissante" est-elle "f est décroissante" ? Justifier.

Exercice 12 : [corrigé] Après avoir donné l'ensemble de définition, étudier la parité ou la périodicité de la fonction f puis indiquer l'intervalle sur lequel il suffit d'étudier les fonctions.

(a) $f(x) = \sin(\omega x)$ avec $\omega > 0$; (b) $f(x) = \ln(|x|)$; (c) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+\mathrm{sh}(x)}{1-\mathrm{sh}(x)}\right)$;
(d) $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} + x)$; (e) $f(x) = 3\sin(x) + 2\sin(2x) + \sin(3x)$.

Exercice 13 : Tracer les courbes représentatives des fonctions suivantes sans étudier les fonctions :

(a) $x \mapsto 1 + \sin x$; (b) $x \mapsto \cos(x) + \sin(x)$; (c) $x \mapsto \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;
(d) $x \mapsto 2 - |x^2 - 1|$; (e) $x \mapsto \ln(2x)$; (f) $x \mapsto \tan(2x)$.

Exercice 14 : [solutions] [corrigé] Justifier que les fonctions, dont une expression algébrique est donnée ci-dessous, sont dérivables sur un ensemble à préciser, puis calculer les dérivées :

(a) $(x-2)(x-4)^5(x-8)^7$; (b) $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$; (c) $\sqrt{x^3-3x+2}$; (d) $\ln(x^2+3x)$; (e) $x\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$; (f) $(\mathrm{ch}x)^x$;

Exercice 15 : [solutions] [corrigé] Déterminer les limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x \to -\infty} x e^{-x^2}$; (b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^3+2x^2}{x^2+1} e^{\frac{1}{x}}$; (c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{e^x}$.

Exercice 16 : [corrigé] On considère la fonction f définie sur $]0;\ +\infty[$ par : $f(x) = x\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right) + \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{2}$.

1. (a) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

   (b) En posant $x = \frac{2}{u}$, montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} x\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right) = 2$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - \left(\dfrac{x}{4} + \dfrac{5}{2}\right)\right)$.
   Qu'en déduit-on pour la courbe représentative de f ?

(c) Déterminer : $\lim_{x \to 0^+} f(x)$.

2. (a) Justifier que f est dérivable sur $]0;\ +\infty[$, et calculer $f'(x)$ sur cet ensemble.

   (b) Pour $x > 0$, on pose : $g(x) = \ln(x+2) - \ln(x) - \dfrac{2}{x+2} + \dfrac{1}{4}$. Étudier les variations de g en précisant les limites en $+\infty$ et 0^+.

   (c) Vérifier que pour tout $x > 0$, $g(x) > 0$. En déduire les variations de f.

   (d) Dresser le tableau de variations de f et tracer sa courbe représentative le plus précisément possible.

Exercice 17 : On note f la fonction définie sur $]-1;\ +\infty[-\{0\}$ par : $f(x) = (1+x)^{1/x}$.

1. Calculer $\lim_{x \to 0} f(x)$.
2. Justifier que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote en $+\infty$ dont on donnera une équation.
3. Montrer que : $\forall x \in]-1;\ +\infty[,\ \ln\left(1 - \dfrac{x}{x+1}\right) + \dfrac{x}{1+x} \leq 0$.
4. Dresser le tableau de variations de f en précisant les limites au bord du domaine de définition.

Exercice 18 : On note f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{\cos(x) + \sin(x)}$.

(Q 1) Soit $x \in \mathbb{R}$. Factoriser l'expression $\cos(x) + \sin(x)$.

(Q 2) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f et expliquer pourquoi il est possible de restreindre l'étude de f à l'intervalle $[0;\ 2\pi] \cap \mathcal{D}$.

(Q 3) Étudier la dérivabilité de f sur $\mathcal{D}$ et déterminer l'expression de sa dérivée.

(Q 4) Déterminer le tableau de variations sur $[0;\ 2\pi] \cap \mathcal{D}$ et tracer l'allure de sa courbe représentative.

Exercice 19 : On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x > 0; f_n(x) = x\Big(\ln(x)\Big)^n$$

On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de f_n.

(Q 1) Quelle est la limite de f_n en 0?

(Q 2) Étudier les variations de f_n. **On distinguera deux cas suivant la parité de** n.

(Q 3) Démontrer que toutes les courbes $\mathcal{C}_n$ passent par deux points fixes.

(Q 4) Étudier les positions relatives de $\mathcal{C}_{n+1}$ et $\mathcal{C}_n$ lorsque x décrit $[1;+\infty[$.

(Q 5) Construire $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sur un même graphique.

Applications des études de fonctions

Exercice 20 : [corrigé]

1. On rappelle que $\forall x \in \mathbb{R}^*, e^x > 1 + x$ avec égalité si et seulement si $x = 0$. En déduire : $\forall x < 1,\ e^x < \dfrac{1}{1-x}$, puis : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$.
2. On dit que x est une valeur approchée de e à 10^{-4} près lorsque $|x - e| \leq 10^{-4}$. À l'aide de la question précédente, déterminer une valeur approchée de e à 10^{-4} sachant que $e \leq 3$.

Exercice 21 : Soient a et b deux réels tels que : $0 < a < b$. Montrer que :

$$\forall x > 0, ae^{-bx} - be^{-ax} > a - b.$$

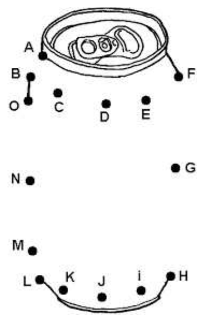
(*on pourra étudier la fonction* $f(x) = ae^{-bx} - be^{-ax} - a + b$...)

Exercice 22 : Montrer que :

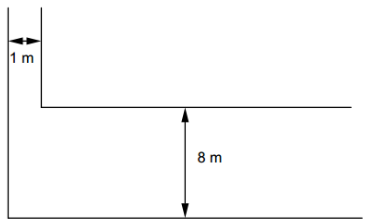
$$\forall a > 0,\ \forall b > 0,\ \frac{\ln(a) + 2\ln(b)}{3} \leq \ln\left(\frac{a+2b}{3}\right).$$

Exercice 23 :

La compagnie kola produit et distribue de la boisson gazeuse. les contenants (canette) ont une forme cylindrique de hauteur h et de rayon r. Afin de réduire les coûts, kola veut minimiser la surface d'aluminium nécessaire à la construction des contenants. Cependant, ils doivent s'assurer qu'un contenant ait un volume de $330cm^3$. Quelles doivent être alors les dimensions de la canette ?



Exercice 24 :
Un couloir de 8 mètres (de large) est prolongé à angle droit par un couloir de 1 mètres. Quelle est la longueur de la plus longue tige rigide (non flexible) qui puisse être transportée horizontalement d'un couloir à l'autre ? (Négligez l'épaisseur de la tige !)



DIVERS

Exercice 25 : Pour $a \in \mathbb{R}$, donner le tableau de variations de la fonction définie par $f(x) = \mathrm{sh}(x) - 2x - a$. Pour quelles valeurs de a la fonction f admet-elle un maximum strictement positif ?

Indications

Exercice 8 : Rappelez-vous qu'il est possible d'obtenir des inégalités en passant par l'étude de la fonction associée (voir la démonstration de $\ln(1+x) \leq x$ vue en cours).

Solution de l'exercice 3 :

(a) $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 6(4x-1)(2x^2-x-1)^5$,

(b) $\forall x \in \mathbb{R}-\{2\},\ f'(x) = 2+\dfrac{9}{(x-2)^4}$,

(c) $\forall x \in \mathbb{R}-\{-1;\ 1\},\ f'(x) = \dfrac{x^4(x^2-5)}{(x-1)^3(x+1)^3}$,

(d) $\forall x \in]0;\ e[,\ f'(x) = -\dfrac{1}{2x\sqrt{1-\ln(x)}}$,

(he) $\forall x \in \mathbb{R}-\{-1;1\},\ f'(x) = \dfrac{4x(x^2-1)}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$,

Solution de l'exercice 4 :

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln(x+1)-\ln(2x-3)) = -\ln(2)$,

(b) $\lim\limits_{x\to0^+} \sqrt{x}\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = 0$,

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{x}\left(e^{-x}\right)^3 = 0$,

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x-3x^2-1) = +\infty$,

(e) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln(x)-x^2) = -\infty$,

(f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 0$,

Solution de l'exercice 5 :

(a) $\frac{17}{4}$, (b) 1 (c) $\frac{1}{6}$.

Solution de l'exercice 14 :

(a) $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = (13x^2-104x+168)(x-4)^4(x-8)^6$,

(b) $\forall x \in]-1;\ 1[,\ f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}(x+1)^2}$,

(c) $\forall x \in]-2;+\infty[-\{1\}\ f'(x) = \dfrac{3(x-1)(x+1)}{2\sqrt{x^3-3x+2}}$,

(d) $\forall x \in]-\infty;-3[\cup]0;+\infty[,\ f'(x) = \dfrac{2x+3}{x(x+3)}$,

(e) $\forall x>0,\ f'(x) = -\dfrac{x+\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)^2}$.

(f) $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \left(\ln(\mathrm{ch}(x)) + x\frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}\right)(\mathrm{ch}(x))^x$

Solution de l'exercice 15 :

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x^2} = 0$,

(b) $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x^3+2x^2}{x^2+1}e^{\frac{1}{x}} = +\infty$,

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{e^x} = 0$.

Correction de l'exercice 1 :

On applique la méthode. Supposons que $A \subset B$ et montrons que $f(A) \subset f(B)$. Soit donc $y \in f(A)$. Par définition, il existe $a \in A$ tel que $y = f(a)$. Puisque a est un élément de A, c'est un élément de B. Par conséquent, $y = f(a)$ est un élément de $f(B)$. On a donc montré que si $y \in f(A)$ alors $y \in f(B)$. Ceci étant vrai pour tout élément y, on a donc montré que $f(A) \subset f(B)$. Finalement, nous avons montré que

$$A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B).$$

Correction de l'exercice 3 :

FONCTION (1) La fonction $f : x \mapsto (2x^2-x-1)^6$ est définie sur $\mathbb{R}$ et est du type polynomiale. Par propriété, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 6\times(4x-1)\times(2x^2-x-1)^5.$$

FONCTION (2) On sait que $f(x)$ a un sens si et seulement si $x \neq -2$. De plus,

(a) $x \mapsto 2x+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car de type polynomiale,

(b) $x \mapsto -3(x-2)^{-3}$ est dérivable sur $\mathbb{R}-\{2\}$ en tant que fonction rationnelle.

Par somme, la fonction f est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}-\{2\}$ et $\forall x \neq 2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2-3\times(-3)\times1\times(x-2)^{-4} \\ &= 2+\tfrac{9}{(x-2)^4}. \end{aligned}$$

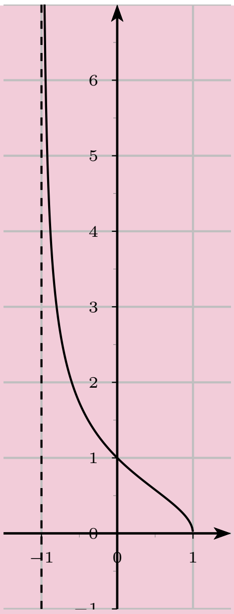
FONCTION (3) On sait que $f(x)$ a un sens si et seulement si $\frac{1-x}{1+x} \geq 0$ et $x \neq -1$. Donc $D_f =]-1;1]$. On sait que :

(a) $u : x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$ est dérivable sur D_f et est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

(b) Mais la fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par le théorème de composition, f est dérivable sur son ensemble de définition privé des réels x tels que $u(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Donc f est dérivable sur $]-1;1[$ et $\forall x \in]-1;1[$,

$$\begin{aligned} \sqrt{u}'(x) &= \tfrac{1}{2}u'(x)u^{1/2-1}(x) \\ &= \tfrac{1}{2}\times\tfrac{-2}{(1+x)^2}\times\tfrac{1}{\sqrt{(1-x)/(1+x)}} \\ &= \tfrac{-1}{(1+x)^{3/2}(1-x)^{1/2}}. \end{aligned}$$



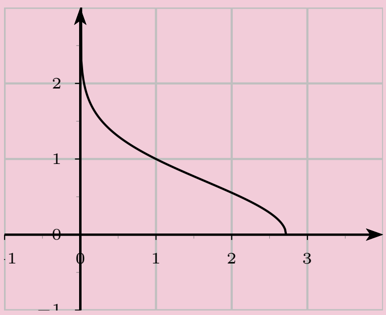
FONCTION (4) On sait que $f(x)$ a un sens si et seulement si $x > 0$ et $1 - \ln(x) \geq 0$. Donc $D_f =]0; e]$. On sait que :

(a) $u : x \mapsto 1 - \ln(x)$ est dérivable sur D_f et est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$

(b) Mais la fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par le théorème de composition, f est dérivable sur l'ensemble de définition de f privé des réels x tels que $u(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$. Donc f est dérivable sur $]0; e[$ et

$$\forall x \in]0; e[, \quad f'(x) \quad = \frac{1}{2} \times \frac{-1}{x}(1 - \ln(x))^{-1/2} = \frac{-1}{2x\sqrt{1-\ln(x)}}.$$



FONCTION (5) La fonction racine cubique est définie sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, f est définie également sur $\mathbb{R}$. On sait que :

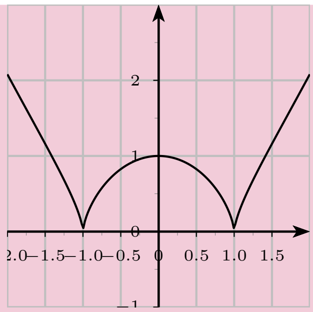
(a) $u : x \mapsto (x^2 - 1)^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

(b) La fonction racine cubique est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

Par composition, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ privée des réels x tels que $u(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

$\forall x \in \mathbb{R} - \{\pm 1\}$,

$$f'(x) = \frac{1}{3} \times 2 \times (2x) \times (x^2 - 1) \times ((x^2 - 1)^2)^{-2/3} = \frac{4x}{3}(x^2 - 1)^{-1/3}.$$



Correction de l'exercice 4 :

(a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln(x+1) - \ln(2x-3))$. On a une FI. On remarque que : $\ln(x+1) - \ln(2x-3) = \ln(\frac{x+1}{2x-3})$ car $\ln(a) - \ln(b) = \ln(a/b)$. Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x+1}{2x-3} = \frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{X \to 1/2} \ln(X) = -\ln(2)$. Par le théorème de composition, nous obtenons

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} (\ln(x+1) - \ln(2x-3)) = -\ln(2)}$$

(b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$. On a une FI. On remarque que :

$$\sqrt{x} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = \sqrt{x}\ln(x) - \sqrt{x}\ln(x+1)$$

Par le théorème des croissances comparées, on sait que $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x}\ln(x) = 0$. Par produit de limites usuelles, on sait que $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x}\ln(x+1) = 0$.
Par différence, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0}.$$

(c) $\lim\limits_{x \to +\infty} x\sqrt{x}\left(e^{-x}\right)^3$. On a une FI. Cependant

$$x\sqrt{x}\left(e^{-x}\right)^3 = \frac{x^{3/2}}{(e^x)^3}$$

Par le théorème des croissances comparées, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} x\sqrt{x}\left(e^{-x}\right)^3 = 0}$$

(d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - 3x^2 - 1)$. On a une FI mais on sait que "l'exponentielle l'emporte sur les puissances". Pour le rédiger proprement, on factorise :

$$e^x - 3x^2 - 1 = e^x\left(1 - \frac{3x^2}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right)$$

Par croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x^2}{e^x} = 0$, puis par limite usuelle, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$. Par somme puis produit de limites usuelles, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} (e^x - 3x^2 - 1) = +\infty}$$

(e) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln(x)-x^2)$; Même technique :

$$\ln(x)-x^2 = x^2\left(\frac{\ln(x)}{x^2}-1\right).$$

Par le théorème des croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x^2} = 0$ puis par somme et produit, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}(\ln(x)-x^2) = -\infty}$$

(f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x}$. On a toujours une FI. Mais par le théorème des croissances comparées, nous allons la lever. On remarque que

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln(x)}{x} + \frac{\ln(1+1/x)}{x}$$

Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ et par quotient de limites usuelles, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+1/x)}{x} = 0$. Par somme,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x} = 0}$$

Correction de l'exercice 5 :

(a) 2 étant racine évidente, par division euclidienne : $x^3+x^2+x-14 = (x-2)(x^2+3x+7)$.Or, par identité remarquable : $x^2-4 = (x-2)(x+2)$ donc : $\dfrac{x^3+x^2+x-14}{x^2-4} = \dfrac{x^2+3x+7}{x+2}$. De plus, par opérations usuelles : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+3x+7}{x+2} = \dfrac{17}{4}$. Au final : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x^2+x-14}{x^2-4} = \dfrac{17}{4}.}$

(b)
$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2x+1}-1}{x} &= \frac{(\sqrt{2x+1}-1)(\sqrt{2x+1}+1)}{x(\sqrt{2x+1}+1)} \\ &= \frac{2x}{x(\sqrt{2x+1}+1)} = \frac{2}{\sqrt{2x+1}+1}\end{aligned}.$$

Or, par opérations usuelles : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2}{\sqrt{2x+1}+1} = 1$ donc finalement : $\boxed{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{x} = 1.}$

(c) On pose : $x = 4+h$. L'expression devient alors : $\dfrac{\sqrt{h+9}-3}{h} = \dfrac{\sqrt{9(1+h/9)}-3}{h} = \frac{1}{3}\dfrac{(1+h/9)^{1/2}-1}{h/9}$.

Or, par limite usuelle : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{1/2}-1}{x} = \dfrac{1}{2}$ donc par composition : $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{(1+h/9)^{1/2}-1}{h/9} = \dfrac{1}{2}$. On en déduit que : $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{3}\dfrac{(1+h/9)^{1/2}-3}{h/9} = \dfrac{1}{6}$ ce qui prouve que : $\boxed{\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x+5}-3}{x-4} = \dfrac{1}{6}.}$

Correction de l'exercice 7 :

(Q 1) On sait que $\forall x\in\mathbb{R}, \mathrm{ch}(x) > 0$. Par conséquent, th est définie sur $\mathbb{R}$. Ainsi, la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$. Étudions sa parité.

- $\forall x\in\mathbb{R}, -x\in\mathbb{R}$.
- Soit $x\in\mathbb{R}$. Alors $g(-x) = (-x)\times\mathrm{th}(-x) = x\times\mathrm{th}(x) = g(x)$.

Ainsi, la fonction g est paire. Il suffit donc de l'étudier sur $[0;+\infty[$.

(Q 2)
- Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\mathrm{th}(x) < 1 &\Leftrightarrow \tfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} < 1\\ &\Leftrightarrow e^x-e^{-x} < e^x+e^{-x}\\ &\Leftrightarrow 0 < 2e^{-x}\end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est vraie pour tout x. Par équivalences successives, nous avons montré que

$$\forall x\in\mathbb{R}, \mathrm{th}(x) < 1.$$

- La fonction th est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions qui le sont. De plus, $\forall x\in\mathbb{R}$:

$$\mathrm{th}'(x) = \frac{\mathrm{ch}^2(x)-\mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} = 1-\mathrm{th}^2(x)$$

(Q 3) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions qui le sont. De plus,$\forall x\in\mathbb{R}$:

$$g'(x) = \mathrm{th}(x) + x\times(1-\mathrm{th}^2(x))$$

Pour $x\geq 0$, on sait que $\mathrm{th}(x)$ est positif et par la question précédente, $1-\mathrm{th}^2(x) > 0$. Ainsi, sur $[0;+\infty[$, $g'(x)\geq 0$.

On en déduit le tableau de variations de g :

x	0 $+\infty$
$g'(x)$	0 $+$
g	0 $\nearrow$

(Q 4) (a) Pour th, on a une forme indéterminée. Pour la lever, on factorise par les termes qui tendent vers $+\infty$:

$$\mathrm{th}(x) = \frac{e^x\left(1-e^{-2x}\right)}{e^x\left(1+e^{-2x}\right)} = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-2x} = 0$. Ainsi, par quotient de limites usuelles, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\mathrm{th}(x) = 1}$$

Par produit de limites usuelles, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}g(x) = +\infty}$$

(b) On calcule la différence :

$$\begin{aligned} g(x)-x &= x\mathrm{th}(x)-x = x(\mathrm{th}(x)-1) \quad \text{on a un} \\ &= x\frac{\mathrm{sh}(x)-\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = x\frac{-e^{-x}}{\frac{e^x+e^{-x}}{2}} \\ &= \frac{-2xe^{-x}}{e^x+e^{-x}} \end{aligned}$$

Finalement, par le théorème des croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$. Par limites usuelles, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x+e^{-x} = +\infty$. Ainsi, par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)-x = 0}$.

Par définition, on en déduit que la droite d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à la courbe représentative de g au voisinage de $+\infty$.

(Q 5)

Correction de l'exercice 9 :

On applique la méthode.

(a) $f(A\cup B) = f(A)\cup f(B)$?

- Soit $y \in f(A\cup B)$. Montrons que $y \in f(A)\cup f(B)$. On sait que il existe $x \in A\cup B$ tel que $y = f(x)$. Si $x \in A$ alors $y \in f(A)$ et si $x \in B$ alors $y \in f(B)$. Finalement, $y \in f(A)\cup f(B)$. Ceci étant vraie pour tout élément y, on a montré que

$$\boxed{f(A\cup B)\subset f(A)\cup f(B)}$$

- Soit $y \in f(A)\cup f(B)$. Montrons que $y \in f(A\cup B)$. On sait que $y \in f(A)$ ou $y \in f(B)$. Si $y \in f(A)$ alors il existe $a \in A$, tel que $y = f(a)$. Or $A \subset A\cup B$ et ainsi $y \in f(A\cup B)$. De même, si $y \in f(B)$ alors il existe $b \in B$ tel que $y = f(b)$ et ainsi $y \in f(A\cup B)$. Finalement, $y \in f(A\cup B)$. Ceci étant vraie pour tout élément y, on a montré que

$$\boxed{f(A)\cup f(B)\subset f(A\cup B)}$$

Par double inclusion, on a donc montré que

$$\boxed{f(A)\cup f(B) = f(A\cup B)}$$

(b) $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$?
Soit $y \in f(A\cap B)$. Montrons que $y \in f(A)\cap f(B)$. On sait qu'il existe $x \in A\cap B$ tel que $y = f(x)$. Puisque $x \in A$, on en déduit que $y \in f(A)$ et de même, $x \in B$, donc $y \in f(B)$. Finalement,$y \in f(A)\cap f(B)$. Ceci étant vraie pour tout élément y, on a montré que

$$\boxed{f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)}$$

(c) A-t-on $f(A)\cap f(B)\subset f(A\cap B)$?
Prenons la fonction carrée par exemple. Posons $A = [-1;0]$ et $B = [0;1]$. Alors $f(A) = [0;1]$ et $f(B) = [0;1]$. Donc $f(A)\cap f(B) = [0;1]$. De plus, $A\cap B = \{0\} \Rightarrow f(A\cap B) = \{0\}$. Donc $f(A)\cap f(B)$ n'est pas un sous ensemble de $f(A\cap B)$. Ce contre-exemple montre que l'inclusion est fausse en général.

Correction de l'exercice 10 :

1. Par définition, l'image directe de $\mathbb{R}$ par f est égale à $\left\{f(x); x\in\mathbb{R}\right\} = \left\{x^2+2x+1; x\in\mathbb{R}\right\} = \left\{(x+1)^2; x\in\mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}_+$. Par définition, l'image réciproque de $\mathbb{R}$ est

$$\{z\in\mathbb{C}; f(z)\in\mathbb{R}\} = \{z\in\mathbb{C}, z^2+2z+1\in\mathbb{R}\}.$$

Cherchons donc les complexes tels que

$$\begin{aligned} z^2+2z+1\in\mathbb{R} &\Leftrightarrow z^2+2z+1 = \overline{z^2+2z+1} \\ &\Leftrightarrow z^2+2z+1 = \overline{z}^2+2\overline{z}+1 \\ &\Leftrightarrow z^2+2z = \overline{z}^2+2\overline{z} \\ &\Leftrightarrow z^2+2z-\overline{z}^2-2\overline{z} = 0 \\ &\Leftrightarrow (z-\overline{z})(z+\overline{z}+2) = 0 \\ &\Leftrightarrow z = \overline{z}\text{ou } z+\overline{z}+2 = 0 \\ &\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}\text{ou } 2Re(z)+2 = 0 \\ &\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}\text{ou } Re(z) = -1 \end{aligned}$$

Finalement,

$$f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}\cup\{z\in\mathbb{C}, Re(z) = -1\}.$$

2. Par définition,

$$\begin{aligned} f^{-1}(\mathbb{U}) &= \{z\in\mathbb{C}; |f(z)| = 1\} \\ &= \{z\in\mathbb{C}; |(z+1)^2| = 1\} \\ &= \{z\in\mathbb{C}; |(z+1)| = 1\}. \end{aligned}$$

Cela correspond donc au cercle de centre d'affixe -1 et de rayon 1.

Correction de l'exercice 12 :

(a) f est définie sur $\mathbb{R}$ et f est π périodique car $\sin(\pi+x) = -\sin(x) \Rightarrow \sin(\pi+x)^2 = \sin(x)^2$ et car $\cos(2(x+\pi)) = \cos(2x+2\pi) = \cos(2x)$. Il suffit donc d'étudier sur $I = \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ puis de compléter par translation du morceau de courbe obtenu sur I.
D'autre part,
$f(-x) = \sin(-x)^2\cos(-2x) = (-\sin(x))^2\cos(2x) = f(x)$ donc f est paire. Il suffit donc de tracer la courbe représentative de f sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ puis de compléter par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées afin d'obtenir le morceau de courbe sur I.

(b) f est définie sur $\mathbb{R}$ et $\frac{2\pi}{w}$ périodique, on restreint donc l'étude à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{w};\frac{\pi}{w}\right]$ puis on complètera par translation du morceau de courbe obtenue. D'autre part, f est impaire. Il suffit donc de restreindre l'étude sur $\left[0;\frac{\pi}{w}\right]$ puis de compléter par symétrie centrale de centre l'origine du repère.

(c) Puisque $\ln$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ donc f est définie si et seulement si $\frac{1-x}{1+x} > 0$. En faisant un tableau de signes, on en déduit que le domaine de définition de f est : $I =]-1;\ 1[$. D'autre part, $\forall x \in I, -x \in I$ et :

$$f(-x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln\left(\frac{1}{\frac{1-x}{1+x}}\right) = -\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) =$$

$-f(x)$. f est donc impaire, il suffit donc d'étudier f sur $[0;\ 1]$ puis de compléter par symétrie centrale de centre l'origine.

(d) Puisque $\ln$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, f est définie si et seulement si $|x| > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^*$. De plus $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(-x) = \ln(|-x|) = \ln(|x|) = f(x)$ donc f est paire. Il suffit donc d'étudier f sur $]0; +\infty[$ puis de compléter par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

(e) f est définie si et seulement si $\frac{1+\operatorname{sh}(x)}{1-\operatorname{sh}(x)} > 0$. Or : $\frac{1+x}{1-x} > 0 \Leftrightarrow x \in]-1;\ 1[$ donc : $\frac{1+\operatorname{sh}(x)}{1-\operatorname{sh}(x)} > 0 \Leftrightarrow \operatorname{sh}(x) \in]-1;\ 1[$. L'inéquation $\operatorname{sh}(x) < 1$ se résout en posant : $X = e^x$, ce qui nous ramène à l'inéquation : $X^2 - 2X - 1 < 0$ d'ensemble de solutions : $]1-\sqrt{2};\ 1+\sqrt{2}[$. Par conséquent : $\operatorname{sh}(x) < 1 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{2} < e^x$ et $e^x = 1+\sqrt{2}$. L'inéquation : $e^x > 1-\sqrt{2}$ est toujours vérifiée car $1-\sqrt{2} < 0$ et $e^x < 1+\sqrt{2} \Leftrightarrow x < \ln(1+\sqrt{2})$. Le domaine de définition est donc au final : $I =]-\infty;\ 1+\sqrt{2}[$. Ce dernier ensemble n'est pas symétrique par rapport à l'origine du repère, aucune propriété de parité ou d'imparité n'est donc réalisable. Par ailleurs, aucune des fonctions présentes dans la définition de f ne présentent de symétrie, donc le domaine d'étude sera ici le domaine de définition, c'est à dire : $\boxed{]1+\sqrt{2};\ +\infty[}$.

(f) f est définie si et seulement si $\sqrt{x^2+1} + x > 0$. Or : $x^2+1 > x^2$ donc, par stricte croissance de la fonction racine, $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2}$, ce qui entraîne que : $\sqrt{x^2+1} + x > |x| + x$. Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x + |x| \geq 0$ donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt{x^2+1} + x > 0$. f est donc définir sur $\mathbb{R}$. pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln(\sqrt{x^2+1} - x) \\ &= \ln\left(\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right) \\ &= -\ln(\sqrt{x^2+1}+x) = -f(x) \end{aligned}$$

. On en déduit que f est impaire. On peut donc restreindre l'étude à $\mathbb{R}_+^*$ puis compléter par symétrie centrale de centre l'origine du repère.

(g) Puisque $x \mapsto \sin(x)$ est 2π périodique, $x \mapsto \sin(2x)$ est π périodique et $x \mapsto \sin(3x)$ est $\frac{2\pi}{3}$ périodique, on en déduit que f est 2π périodique, on peut donc restreindre l'étude à $[-\pi;\ \pi]$. La fonction est par ailleurs clairement impaire, d'où l'étude sur $[0; \pi]$.

Correction de l'exercice 14 :

FONCTION (1)

FONCTION (2)

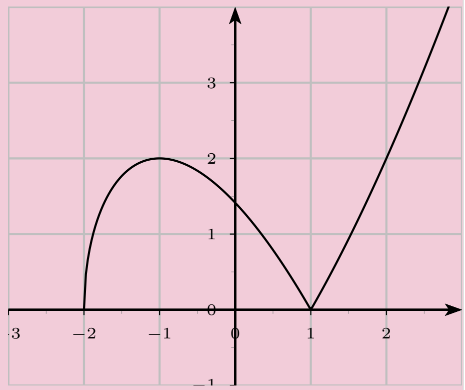
FONCTION (3) On sait que $f(x)$ a un sens si et seulement si $x^3 - 3x + 2 \geq 0$. En effectuant une division euclidienne, nous obtenons $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$. Donc $D_f = [-2; +\infty[$. On sait que :

(a) $u : x \mapsto x^3 - 3x + 2$ est dérivable sur D_f et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$

(b) Mais la fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par le théorème de composition, f est dérivable sur l'ensemble de définition de f privé des réels x tels que $u(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2; 1\}$. Donc f est dérivable sur $]-2; 1[\cup]1; +\infty[$ et
$\forall x \in]-2; 1[\cup]1; +\infty[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \tfrac{1}{2} \times (3x^2 - 3)(x^3 - 3x + 2)^{-1/2} \\ &= \tfrac{3x^2-3}{2\sqrt{x^3-3x+2}}. \end{aligned}$$



FONCTION (4)

FONCTION (5)

FONCTION (6)

Correction de l'exercice 15 :

(a) $\lim_{x\to-\infty} x^4 e^{-x^2}$; On a une FI. On pose $X = x^2$. On obtient $X^2 e^{-X}$. Or $\lim_{x\to-\infty} X = +\infty$ et $\lim_{X\to+\infty} X^2 e^{-X} = 0$ par le théorème des croissances comparées. Par le théorème de composition, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} x^4 e^{-x^2} = 0}$$

(b) $\lim_{x\to0^+} \frac{x+2x^2}{x^2+1} e^{\frac{1}{x}}$.Pour simplifier l'expression, on fait un changement de variables : $X = 1/x$. Ainsi,

$$\frac{x+2x^2}{x^2+1} e^{\frac{1}{x}} = \frac{\frac{1}{X} + 2\frac{1}{X^2}}{\frac{1}{X^2}+1} e^X = \frac{X+2}{X^2+1} e^X = \frac{X+2}{1+\frac{1}{X^2}} \times \frac{e^X}{X^2}$$

On a :

$$\lim_{x\to0_+} X = +\infty$$

et

$$\lim_{X\to+\infty} \frac{X+2}{1+\dfrac{1}{X^2}} = +\infty$$

et

$$\lim_{X\to+\infty}\frac{e^X}{X^2}=+\infty$$

par le théorème des croissances comparées. Par le théorème de composition, on en déduit que :

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+}\frac{x+2x^2}{x^2+1}e^{\frac{1}{x}}=+\infty}$$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{e^x}$. On utilise le théorème des croissances comparées :

$$\frac{\ln(x)}{e^x}=\frac{\ln(x)}{x}\times\frac{x}{e^x}.$$

Par le théorème précédemment cité, on obtient :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{e^x}=0}.$$

Correction de l'exercice 16 :

1. (a) En écrivant : $f(x)=x\left(\frac{1}{4}+\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)\right)+\frac{1}{2}=x\left(\frac{1}{4}+\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)\right)+\frac{1}{2}$, puis en procédant par opérations élémentaires sur les limites, nous en déduisons le résultat.

   (b) En posant $x=\frac{2}{u}\Leftrightarrow u=\frac{2}{x}$, l'expression $x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$ devient : $\frac{2}{u}\ln(1+u)=2\frac{\ln(1+u)}{u}$.
   Puisque $\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$, on regarde alors la limite de cette expression en 0.Or $\lim_{u\to 0}\frac{\ln(1+u)}{u}=1$ (limite usuelle obtenue par taux d'accroissement) donc par opérations usuelles $\lim_{u\to 0}2\frac{\ln(1+u)}{u}=2\Leftrightarrow\boxed{\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)=2.}$
   Par ailleurs, $f(x)-\frac{x}{4}=x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)+\frac{1}{2}$ donc par opérations usuelles, et d'après la limite ci-dessus, on en déduit : $\lim_{x\to+\infty}f(x)-\frac{x}{4}=\frac{5}{2}\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)-\left(\frac{x}{4}-\frac{5}{2}\right)=0$. Par définition, cela entraîne que la courbe représentative de f admet la droite d'équation : $y=\frac{x}{4}+\frac{5}{2}$ comme asymptote oblique.

   (c) En écrivant : $f(x)=x\ln(x+2)-x\ln(x)+\frac{x}{4}+\frac{1}{2}$ et en utilisant la croissance comparée : $\lim_{x\to 0^+}x\ln(x)=0$, on en déduit que

   $$\boxed{\lim_{x\to 0^+}f(x)=\frac{1}{2}.}$$

2. (a) Par opérations usuelles sur les fonctions dérivables, f est dérivable sur son domaine de définition et nous avons :
   $\forall x\in]0;\ +\infty[$,

   $$\begin{aligned}f'(x)&=\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)+x\frac{x-(x+2)}{x^2}\times\frac{x}{x+2}+\frac{1}{4}\\&=\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)-\frac{2}{x+2}+\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

   (b) g est dérivable sur $]0;\ +\infty[$ par opérations usuelles sur les fonctions dérivables et $\forall x\in]0;\ +\infty[$,

   $$\begin{aligned}g'(x)&=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x}+\frac{2}{(x+2)^2}\\&=\frac{x(x+2)-(x+2)^2+2x}{x(x+2)^2}\\&=\frac{-4}{x(x+2)^2}.\end{aligned}$$

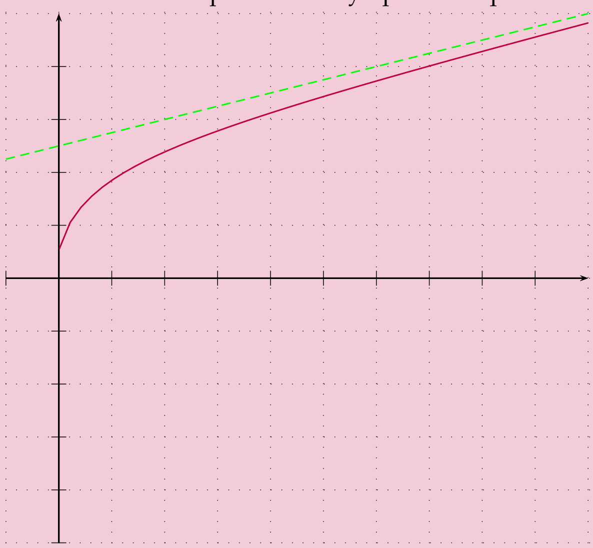
   Cette dernière expression est strictement négative donc :
   g est strictement décroissante sur $]0;\ +\infty[$. De plus, par opérations usuelles, $\lim_{x\to 0^+}g(x)=+\infty$ et en écrivant $g(x)=\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)-\frac{2}{x+2}+\frac{1}{4}$, nous obtenons par opérations usuelles :
   $\lim_{x\to+\infty}g(x)=\frac{1}{4}$.

   (c) Puisque g est strictement décroissante sur $I=]0;\ +\infty[$ et admet une limite strictement positive en $+\infty$, on en déduit que f est strictement positive sur $]0;\ +\infty[$.
   Par ailleurs, $\forall x\in]0;\ +\infty[,\ f'(x)=g(x)$ donc $\forall x\in]0;\ +\infty[,\ f'(x)>0$, ce qui prouve que f est strictement croissante sur $]0;\ +\infty[$.

   (d) Les éléments précédents nous permettent de tracer le tableau de variations de f sur $]0;\ +\infty[$:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
f	$\frac{1}{2}$ $\nearrow$	$+\infty$

   Il ne nous reste plus qu'à tracer la courbe représentative en précisant l'asymptote oblique :



Correction de l'exercice 19 :

(Q 1) Par la propriété des croissances comparées,

$\boxed{\lim_{x\to 0_+} f_n(x) = 0.}$

(Q 2) La fonction f_n est dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur cet ensemble. Par propriété : $\forall x > 0$:

$$f_n'(x) = \Big(\ln(x)\Big)^n + x \times \frac{n}{x}\Big(\ln(x)\Big)^{n-1} = \Big(\ln(x)\Big)^{n-1}\Big(\ln($$

On est obligé de faire une disjonction de cas à cause du facteur $\Big(\ln(x)\Big)^{n-1}$, bien sûr positif sur $[1;+\infty[$, mais dont le signe change en fonction de la parité de n sur $]0;1]$.

(a) Si n est pair, alors $n-1$ est impair et :

x	0		e^{-n}		1		$+\infty$
$\Big(\ln(x)\Big)^{n-1}$	‖	$-$		$-$	0	$+$	
$\ln(x)+n$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$e^{-n}(-n)^n$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

(b) Si n est impair alors :

x	0		e^{-n}		1		$+\infty$
$\Big(\ln(x)\Big)^{n-1}$	‖	$+$		$+$	0	$+$	
$\ln(x)+n$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$e^{-n}(-n)^n$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

(Q 3) Cherchons par exemple si $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ passent par deux points fixes. Pour cela, on cherche $x \in]0;+\infty[$ tel que

$$\begin{aligned} x\ln(x) = x(\ln(x))^2 \quad &\Leftrightarrow x\ln(x)(\ln(x)-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \ln(x) & = & 0 \\ \ln(x) & = & 1 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1 \\ x & = & e \end{array}\right. \end{aligned}$$

Ainsi, les points $(1;0)$ et $(e;e)$ appartiennent à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. On vérifie également qu'ils appartiennent à $\mathcal{C}_n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

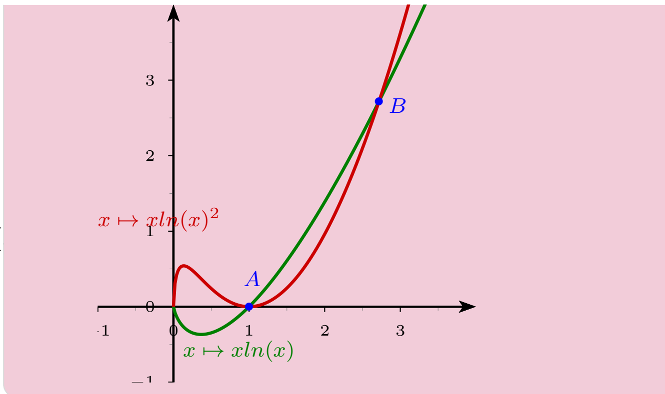
Finalement, $\boxed{\text{les points } (1;0) \text{ et } (e;e) \text{ appartiennent à } \mathcal{C}_n.}$

(Q 4) Soit $x \in [1;+\infty[$. Alors

$$x(\ln(x))^{n+1} \geq x(\ln(x))^n \Leftrightarrow x(\ln(x))^n\Big(\ln(x)-1\Big) \geq 0$$

$\boxed{\text{Ainsi, sur } [1;e], \mathcal{C}_{n+1} \text{ est en dessous de } \mathcal{C}_n \text{ et sur } [e;+\infty[}$

(Q 5)



Correction de l'exercice 20 :

(Q 1) On pose : $g : x \mapsto e^x - 1 - x$ fonction définie sur $\mathbb{R}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que différence de fonctions qui le sont. Puis,

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = e^x - 1.$$

D'où le tableau de variations de cette fonction :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	0	$\nearrow$	

La fonction g est donc strictement positive sur $\mathbb{R}^*$ et elle s'annule seulement en 0. On a donc montré que $\forall x \in \mathbb{R}^*, e^x > 1 + x$ **avec égalité si et seulement si** $x = 0$.

(Q 2) Soit $x < 1$. Alors

$$e^x < \frac{1}{1-x} \Leftrightarrow 1 - x < e^{-x} \ (*) \text{ car} 1 - x > 0$$

D'après la question précédente, en posant $X = -x$, on sait que $1 + X < e^X$. Ainsi, $(*)$ est vraie et par équivalence la première l'est aussi.

(Q 3) Prenons $x = \frac{1}{n}$. On obtient

$$1 + \frac{1}{n} < e^{1/n}$$

Puisque la fonction puissance n, avec $n > 0$, on obtient :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e.$$

(Q 4) De même, puisque $1/n < 1$, en utilisant le résultat de la seconde question, on obtient :

$$e^{1/n} \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} \Leftrightarrow e^{1/n} \leq \frac{1}{\frac{n-1}{n}} \Leftrightarrow e^{1/n} \leq \frac{n}{n-1}$$

Ainsi, $e \leq \left(\frac{n}{n-1}\right)^n$. Puis en remplaçant, n par $n+1$, on obtient :

$$e \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \Leftrightarrow e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

(Q 5) Utilisons l'inégalité précédente :

$$0 \leq e - (1 + \frac{1}{n})^n \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Or

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{n}-1\right) = \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \frac{1}{n}\times e \leq \frac{3}{n}.$$

Donc,

$$0 \leq e - (1 + \frac{1}{n})^n \leq \frac{3}{n}$$

On remarque que si $\frac{3}{n} \leq 10^{-4}$ alors $0 \leq e - (1 + \frac{1}{n})^n \leq 10^{-4}$. Ainsi, si $n \geq 3 \times 10^4$ alors le nombre $(1 + \frac{1}{n})^n$ est une valeur approchée de e à 10^{-4} près.

⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆