TD 19

Espaces vectoriels

LES INCONTOURNABLES

Exercice 1 :

(Q 1) Les ensembles suivants sont-ils des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

(a) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, 2x+3y-2z=0\}$;
(b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+y+z=1\}$;
(c) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x \leq y \leq z\}$;
(d) $\{(x+2y, y, x-3y), (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$;
(e) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2+y^2+z^2=0\}$.

(Q 2) Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

(a) l'ensemble des fonctions paires ;
(b) l'ensemble des fonctions croissantes ;
(c) l'ensemble des fonctions qui s'annulent en 1 ;
(d) l'ensemble des fonctions qui s'annulent ;

(Q 3) Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de l'ensemble des suites réelles ?

(a) l'ensemble des suites convergentes ;
(b) l'ensemble des suites convergeant vers un réel a ;
(c) l'ensemble des suites divergentes ;
(d) l'ensemble des suites arithmétiques puis géométriques ;
(e) $\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} ; \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+2} = nu_{n+1} + u_n\}$.

(Q 4) Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $(n \geq 2)$?

(a) $A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), M \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = 0\}$;

(b) $C = \left\{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \quad / \quad \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad M = \begin{pmatrix} -x-y & y & x \\ x & -x-y & y \\ y & x & -x-y \end{pmatrix} \right\}$.

Exercice 2 : [corrigé]

(Q 1) Déterminer les valeurs de $m \in \mathbb{C}$ pour lesquelles $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ m \end{pmatrix} \in \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right)$.

(Q 2) Pour $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, le vecteur : $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ est-il combinaison linéaire des vecteurs : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$?

Exercice 3 : [corrigé] On définit les vecteurs suivants de $E = \mathbb{R}^4$:

$$u_1 = (1,\, 0,\, 0,\, 0),\quad u_2 = (1,\, 1,\, 0,\, 0),$$
$$v_1 = (1,\, 1,\, 1,\, 0),\quad v_2 = (1,\, 1,\, 1,\, 1).$$

On pose ensuite

$$F = \mathrm{Vect}\Big(u_1,\, u_2\Big) \quad G = \mathrm{Vect}\Big(v_1,\, v_2\Big).$$

Démontrer que $E = F \oplus G$.

Exercice 4 : [corrigé] Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions paires et $\mathcal{I}$ l'ensemble des fonctions impaires.

(Q 1) Montrer que $\mathcal{I}$ et $\mathcal{P}$ sont des sous-espaces vectoriels de E.

(Q 2) Montrer que $\mathcal{I} \cap \mathcal{P} = \{0_E\}$.

(Q 3) Soit $f \in E$. Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}$.

(Q 4) En déduire que $\mathcal{I}$ et $\mathcal{P}$ sont supplémentaires.

Exercice 5 : [corrigé]

Dans chacun des cas suivants, démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

(Q 1) $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $F = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $G = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont les ensembles des matrices respectivement symétriques et antisymétriques de E. **Indication : procéder par Analyse-Synthèse.**

(Q 2) $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, F est l'ensemble des fonctions f telles que $f(0) = 0$ et G est l'ensemble des fonctions constantes.

Exercice 6 : [corrigé] Déterminer si les familles suivantes sont libres ou liées :

(Q 1) Dans $\mathbb{R}^n$

$$\text{(a)}\ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}; \quad \text{(b)}\ \begin{pmatrix}0\\2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\-2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\2\\4\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\4\\1\\3\end{pmatrix}.$$

(Q 2) Dans l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

(a) $(\cos, \sin, x \to x\cos(x), x \to x\sin(x))$

(b) $(1, x \mapsto e^x, x \mapsto e^{2x}, x \mapsto e^{3x})$;

(c) $(x \mapsto x, x \mapsto x+1, x \mapsto x+2)$

Exercice 7 : [corrigé] Donner une famille génératrice des ensembles suivants :

(a) $F = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;/\; 3x - y = 0 \right\}$; (b) $F = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;/\; \left\{ \begin{array}{l} x+y+2z=0 \\ 2x+3y+z=0 \end{array} \right. \right\}$;

(c) $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ -b & -a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R});\ \ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Exercice 8 : [corrigé]

(Q 1) Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' - xy = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\, \mathbb{R})$. En déterminer une famille génératrice.

(Q 2) Faire de même pour l'ensemble des solutions de $y'' + y = 0$.

POUR S'ENTRAÎNER

Exercice 9 : [corrigé]
Démontrer que F et G sont supplémentaires dans l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, avec F l'ensemble des fonctions f de E vérifiant $f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = f(\pi)$ et $G = \mathrm{Vect}\Big(\cos, \sin\Big)$.

Indication : étant donnée $f \in E$, trouver $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f - \alpha\cos - \beta\sin \in F$.

Exercice 10 : Soient $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x - y + 2z = 0 \right\}, G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x + y = 0 \right\}$.

(Q 1) Montrer que F, G sont des espaces vectoriels et en déterminer une famille génératrice.

(Q 2) Déterminer une famille génératrice de $F \cap G$.

(Q 3) Soit $H = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$. Montrer que $F \oplus H = G \oplus H = \mathbb{R}^3$.

Exercice 11 : [corrigé] Donner une famille génératrice des ensembles suivants :

(Q 1) L'ensemble des matrices symétriques.

(Q 2) L'ensemble des fonction affines définies sur $\mathbb{R}$.

(Q 3) L'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant : $u_{n+2} + 4u_{n+1} + 4u_n = 0$.

Exercice 12 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque.Déterminer si les familles suivantes sont libres ou liées :

1. Soit $(x_1, x_2, ..., x_n)$ une famille libre d'éléments de E. On pose $u = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n$ puis $\forall i \in [|1, n|], y_i = x_i + u$. A quelle condition sur la famille des (α_i), $(y_1, y_2, ..., y_n)$ est-elle libre ?
2. Soit $(e_1, ..., e_p)$ une famille libre de E et $a \notin Vect(e_1, ..., e_p)$. Montrez que $(e_1+a, e_2+a, ..., e_p+a)$ est encore libre. Montrez que l'hypothèse $a \notin Vect(e_1, ..., e_p)$ est indispensable.

Exercice 13 : [corrigé] Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$ on considère les sous-espaces vectoriels

$$F = \{ (x, y, z; t) \in E \mid 3x - y - z = 2y + t = 0\}$$

$$G = \mathrm{Vect}\Big(u_1,\ u_2,\ u_3\Big) \text{ où } \begin{aligned} u_1 &= (1; -1; 2; 2), \\ u_2 &= (2; 1; 4; -2), \\ u_3 &= (1; 2; 2; -4). \end{aligned}$$

Donner une base des sous-espaces vectoriels F, G, $F \cap G$, et $F + G$.

Indications

Correction de l'exercice 2 :

1. $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\m\end{pmatrix} \in \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-2\\3\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\-3\\1\\-5\end{pmatrix}\right)$ si et seulement si il existe $x, y, z \in \mathbb{R}$, tels que $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\m\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\\-1\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}-3\\-3\\1\\-5\end{pmatrix}$.
   On est donc amené à étudier un système linéaire avec trois inconnues, quatre équations mais un paramètre. On obtient pour condition $m = 3$ et comme relation
   $$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\m\end{pmatrix} = (-1)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\-2\\3\\-1\end{pmatrix} + (-1)\cdot\begin{pmatrix}-3\\-3\\1\\-5\end{pmatrix}$$
2. A est combinaison linaire de ces trois vecteurs si et seulement si il existe $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $A = x\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$ si et seulement si
   $$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2\\ x+y &=& 3\\ y+z &=& 4\\ z &=& 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2\\ y &=& 1\\ y+z &=& 4\\ z &=& 0\end{array}\right.$$
   Ce système est donc incompatible et A ne s'écrit pas comme une combinaison linéaire de ces trois vecteurs.

Correction de l'exercice 3 :

Par propriété, si (u_1, u_2, v_1, v_2) est une base de $\mathbb{R}^4$, alors : $F = \text{Vect}\left(u_1, u_2\right)$ $G = \text{Vect}\left(v_1, v_2\right)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$ (cf dernier résulat du cours). Pour montrer que cette famille est une base, on montrer que c'est une famille génératrice :

Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. On cherche si il existe $\lambda, \mu, \gamma, \theta \in \mathbb{R}$ tels que
$$(x, y, z, t) = \lambda u_1 + \mu u_2 + \gamma v_1 + \theta v_2$$
ce qui équivaut à résoudre le système linéaire de matrice augmentée associée :
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&1&1&x\\ 0&1&1&1&y\\ 0&0&1&1&z\\ 0&0&0&1&t\end{array}\right) \sim_{\mathcal{L}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&1&0&x-t\\ 0&1&1&0&y-t\\ 0&0&1&0&z-t\\ 0&0&0&1&t\end{array}\right)$$
$$\sim_{\mathcal{L}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&0&0&x-z\\ 0&1&0&0&y-z\\ 0&0&1&0&z-t\\ 0&0&0&1&t\end{array}\right)$$
$$\sim_{\mathcal{L}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&x-y\\ 0&1&0&0&y-z\\ 0&0&1&0&z-t\\ 0&0&0&1&t\end{array}\right)$$
Finalement
$$(x, y, z, t) = (x-y)u_1 + (y-z)u_2 + (z-t)v_1 + tv_2$$
ce qui prouve qu'il s'agit d'une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$. Par unsicité de x, y, z, t, cette famille est de plus libre, c'est donc une base de $\mathbb{R}^4$, ce qui'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 4 :

1. - $\mathcal{I} \subset E$.
   - La fonction nulle est impaire.
   - Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $f, g \in \mathcal{I}$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $(\lambda f + g)(-x) = \lambda f(-x) + g(-x) = -\lambda f(x) - g(x) = -\underline{\Big(\lambda f + g\Big)}(x)$. Ainsi, $\lambda f + g \in \mathcal{I}$.

   Par définition, $\mathcal{I}$ est un sous espace vectoriel de E. On effectue la même démarche pour$\mathcal{P}$.
2. En tant que sous espaces vectoriels de E, $0_E \in \mathcal{I} \cap \mathcal{P}$. Soit $f \in \mathcal{I} \cap \mathcal{P}$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x) = -f(x)$, soit $f(x) = 0$. On a montré que $\mathcal{I} \cap \mathcal{P} \subset \{0_E\}$. Par double inclusion, on a le résultat.
3. C'est un simple calcul.
4. D'après précédemment, nous avons : $\mathcal{I} \cap \mathcal{P} = \{0_E\}$. Il nous reste donc à montrer que $\mathcal{I} + \mathcal{P} = E$.
   - $\mathcal{I} + \mathcal{P} \subset E$ est évident.
   - Montrons que $E \subset \mathcal{I} + \mathcal{P}$. Soit $f \in E$. On cherche l'existence de $f_1 \in \mathcal{I}$ et $f_2 \in \mathcal{P}$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$. En s'aidant de la question précédente, on pose : $f_1(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$ et $f_2(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$. Alors : $\underline{f_2 \in \mathcal{P}}$ car $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_2(-x) = \dfrac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \dfrac{f(-x) + f(x)}{2} = f(x)$. De la même façon, nous obtenons : $\underline{f_1 \in \mathcal{I}}$. Pour finir, l'égalité : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ a été prouvée en question 3, ce qui finit de prouver le résultat.

Correction de l'exercice 5 :

- Montrons que $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont les ensembles des matrices respectivement symétriques et antisymétriques de E. **Trois points doivent être vérifiés : ce sont des sous espaces vectoriels, leur intersection est réduite au vecteur nul, leur somme est égale à l'espace vectoriel.**

(a) Montrons que ce sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

VERIF (1) Ils sont inclus dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

VERIF (2) La matrice nulle est symétrique et antisymétrique

VERIF (3) Ils sont stables par combinaison linéaire ($\forall A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, (\lambda A+\mu B)^t = \lambda A^t+\mu B^t$, par propriété de la transposée, ce qui est égal à $\lambda A + \mu B$; on fait de même pour $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.)

(b) Montrons que leur intersection est réduite à la matrice nulle.

VERIF (1) En tant que sous-espaces vectoriels, la matrice nulle appartient à ces sous-espaces, $\{0_{nn}\} \subset \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

VERIF (2) Montrons l'inclusion réciproque, soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Alors $A^t = A$ et $A^t = -A$. Donc $A = 0_{nn}$. Cela montre que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset \{0_{nn}\}$.

Ainsi, $\boxed{\{0_{nn}\} = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R})}$.

(c) Montrons que leur somme est égale à l'espace vectoriel.

VERIF (1) Immédiatement $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})+\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$.

VERIF (2) Inclusion réciproque faite par analyse-synthèse. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

A. ANALYSE. On cherche $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = S+A$. Passons à la transposée pour obtenir $M^t = S - A$. C'est équivalent à $S = \frac{M+M^t}{2}$ et $A = \frac{M-M^t}{2}$.

B. SYNTHÈSE. On pose $S = \frac{M+M^t}{2} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $A = \frac{M-M^t}{2} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Et on a $S + A = M$. On a donc montré que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}_n(\mathbb{R})+\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. L'inclusion réciproque est immédiate.

Correction de l'exercice 6 :

(Q 1) Dans $\mathbb{R}^3$. $\mathcal{F} = \Big((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\Big)$;

Soit $\lambda, \mu, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda(1,1,1)+\mu(1,1,0)+\gamma(1,0,0) = (0,0,0)$. Ceci est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda+\mu+\gamma &=& 0 \\ \lambda+\mu &=& 0 \\ \lambda &=& 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \lambda=\mu=\gamma=0$$

La famille est libre par définition.

(Q 2) Dans $\mathcal{M}_{41}(\mathbb{R})$. $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix}0\\2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\-2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\2\\4\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\4\\1\\3\end{pmatrix} \right)$.

Soit $\lambda, \mu, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda \begin{pmatrix}0\\2\\1\\0\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}4\\-2\\1\\1\end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix}7\\2\\4\\2\end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix}5\\4\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

La matrice augmentée associée à ce système est :

$$\begin{pmatrix}0&4&7&5\\2&-2&2&4\\1&1&4&3\\0&1&2&3\end{pmatrix} \sim_{\mathcal{L}} \begin{pmatrix}1&1&4&1\\1&-1&1&2\\0&1&2&3\\0&4&7&5\end{pmatrix}$$
$$\sim_{\mathcal{L}} \begin{pmatrix}1&1&4&1\\0&-2&-3&1\\0&1&2&3\\0&4&7&5\end{pmatrix}$$
$$\sim_{\mathcal{L}} \begin{pmatrix}1&1&4&1\\0&1&2&3\\0&-2&-3&1\\0&4&7&5\end{pmatrix}$$
$$\sim_{\mathcal{L}} \begin{pmatrix}1&1&4&1\\0&1&2&3\\0&0&1&7\\0&0&-1&-7\end{pmatrix}$$
$$\sim_{\mathcal{L}} \begin{pmatrix}1&1&4&1\\0&1&2&3\\0&0&1&7\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Le système est donc équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} \lambda & +\mu & +4\gamma & +\delta & =0 \\ & \mu & +2\gamma & +3\delta & =0 \\ & & \gamma & +7\delta & =0 \end{array}\right.$$

Or ce système admet une infinité de solutions. En particulier en prenant $\delta = 1$, nous obtenons : $\gamma = -7$, $\mu = 11$ et $\lambda = 16$ ce qui donne la relation de liaison :

$$16 \begin{pmatrix}0\\2\\1\\0\end{pmatrix} + 11 \begin{pmatrix}4\\-2\\1\\1\end{pmatrix} - 7 \begin{pmatrix}7\\2\\4\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\4\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

La famille est donc liée.

(Q 3) Dans l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

(a) $(\cos, \sin, x \to x\cos(x), x \to x\sin(x))$. Soit $\lambda, \alpha, \mu, \gamma \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lambda\cos(x)+\alpha\sin(x)+\mu x\cos(x)+\gamma x\sin(x) = 0$$

C'est vrai pour tous les réels x, donc pour $x \in \{0; \pi/2; \pi; \pi/4\}$ (Pourquoi 4 valeurs, car on a 4 inconnues). Ces valeurs injectées donnent :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda &=& 0 \\ \alpha+\gamma\pi/2 &=& 0 \\ -\lambda-\pi\mu &=& 0 \\ \lambda\sqrt{2}/2+\alpha\sqrt{2}/2+\mu(\pi/8)+\gamma(\pi/8) &=& 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda &=& 0 \\ \mu &=& 0 \\ \alpha+\gamma\pi/2 &=& 0 \\ \alpha\sqrt{2}/2+\gamma(\pi/4)\times\sqrt{2}/2 &=& 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \alpha=\beta=\gamma=0$$

La famille est donc libre par définition.

(b) $\left(1, x \mapsto e^x, x \mapsto e^{2x}, x \mapsto e^{3x}\right)$;
Soit $\lambda; \mu; \gamma; \delta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lambda + \mu e^x + \gamma e^{2x} + \delta e^{3x} = 0$$

Un premier passage à la limite lorsque $x \to -\infty$ offre $\lambda = 0$. La condition devient $\forall x \in \mathbb{R}, \mu e^x + \gamma e^{2x} + \delta e^{3x} = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \mu + \gamma e^x + \delta e^{2x} = 0$ Un second passage à la limite lorsque $x \to -\infty$ offre $\mu = 0$. De même, nous obtenons $\gamma = \delta = 0$ et la famille est libre.

(c) $(x \mapsto x, x \mapsto x+1, x \mapsto x+2)$ Cette famille est liée. On cherche $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \alpha x + \beta(x+1) + \gamma(x+2) = 0.$$

Deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients le sont aussi. Par conséquent

$$\alpha + \beta + \gamma = 0;\ \beta + 2\gamma = 0 \Leftrightarrow \beta = -2\gamma; \alpha = \gamma.$$

Nous prenons, par exemple, $\gamma = 1$ et nous observons la relation de liaison suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (1).x + (-2).(x+1) + (1).(x+2) = 0.$$

Correction de l'exercice 7 :

1. Soit $(x, y, z) \in F$. Ici, le système est de rang 1, x inconnue principale, y, z secondaires.

$$(x, y, z) = (y/3; y; z) = y(1/3, 1, 0) + z(0, 0, 1).$$

Par définition, une famille génératrice de F est $\Big((1/3; 1; 0$

2. Soit $(x, y, z) \in F$.

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + 2z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + y + 2z = 0 \\ y - 3z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = - \\ y = 3z \end{array}\right.$$

Ici, le système est de rang 2, x, y inconnues principales, z secondaire.

$$(x, y, z) = z(-5, 3, 1)$$

Par définition, une famille génératrice de F est $\Big((-5, 3, 1)$

3. Soit $\begin{pmatrix} a & 2a+b \\ -b & -a \end{pmatrix} \in F$. Alors

$$\begin{pmatrix} a & 2a+b \\ -b & -a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ sont clairement des éléments de F. Ainsi, par définition, ces deux matrices forment une famille génératrice de F.

4. De même,

$$F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right.$$

Correction de l'exercice 8 :

(Q 1) Par propriété, l'ensemble des solutions de l'équation $y' - xy = 0$ est

$$\mathcal{S} = \{x \mapsto \lambda e^{-\int(-x\,dx)}; \lambda \in \mathbb{R}\} = \{x \mapsto \lambda e^{x^2/2}; \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Montrons que c'est un sous espace vectoriel :

VERIF (1) $\mathcal{S}$ est un sous ensemble de fonctions.

VERIF (2) La fonction nulle appartient à cet ensemble.

VERIF (3) Soit deux fonctions $f_1 : x \mapsto \lambda_1 e^{x^2/2}$; $f_2 : x \mapsto \lambda_2 e^{x^2/2}$ et $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\lambda f_1 + \mu f_2)(x) = \Big(\lambda\lambda_1 + \mu\lambda_2\Big)e^{x^2/2}$$

Ainsi, $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \in \mathcal{S}$.

Enfin par définition, $\Big(x \mapsto e^{x^2/2}\Big)$ est une famille génératrice.

(Q 2) L'ensemble des solutions de $y'' + y = 0$ est

$$\{x \mapsto \lambda\cos(x) + \mu\sin(x); \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\Big(\cos; \sin\Big).$$

C'est donc un sous espace vectoriel de l'ensemble des fonctions, et une famille génératrice est $(\cos, \sin)$.

Correction de l'exercice 9 :

(de Q2)

E est l'ensemble des fonctions continues de $[0; \pi]$ dans $\mathbb{R}$ et F est l'ensemble des fonctions f de E vérifiant $f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = f(\pi)$, $G = \mathrm{Vect}\Big(\cos, \sin\Big)$.

1. ***Montrons que ces ensembles munis des lois de E sont sous espaces vectoriels.*** Par propriété, G est un sous espace vectoriel. De plus :

VERIF (1) La fonction nulle vérifie $f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = f(\pi)$.

VERIF (2) Soient $f, g \in F, \lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\Big(\lambda f + g\Big)(0) = \lambda f(0) + g(0) = \lambda f(\frac{\pi}{2}) + g(\frac{\pi}{2}) = \Big(\lambda f + g\Big)(\frac{\pi}{2})$ et de même, $\Big(\lambda f + g\Big)(0) = \lambda f(\frac{\pi}{2}) + g(\frac{\pi}{2}) = \lambda f(\pi) + g(\pi) = \Big(\lambda f + g\Big)(\pi)$. Ainsi, $\lambda f + g \in F$.

2. ***Montrons que leur intersection est réduit au vecteur nul.***

VERIF (1) En tant que sous-espaces vectoriels, la fonction nulle appartient à ces sous-espaces, $\{0_E\} \subset F \cap G$.

VERIF (2) Soit $f \in F \cap G$. On écrit ce que cela signifie : $f \in F \Leftrightarrow (0) = f(\frac{\pi}{2}) = f(\pi)$ et $f \in G \Leftrightarrow f = \lambda\cos + \mu\sin$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Cela donne : $f(0) = \lambda, f(\frac{\pi}{2}) = \mu$ et $f(\pi) = -\lambda$. Ainsi, $\lambda = 0$, soit $f(0) = 0$ et $\mu = f(\frac{\pi}{2}) = f(0) = 0$. Finalement,

$f = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$.

On a montré $\boxed{F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}\}}$.

3. ***Montrons que leur somme est égale à*** E.

VERIF (1) En tant que sous-espaces vectoriels, $F + G \subset E$.

VERIF (2) Soit $h \in E$.

i. ANALYSE. On cherche $f \in F, \lambda \cos + \mu \sin \in G$ telles que $h = f + \lambda \cos + \mu \sin$. En utilisant les conditions qui définissent F, nous avons :

$$\begin{array}{rrcl} & h(0) & = & f(0) + \lambda \\ & h(\frac{\pi}{2}) & = & f(\frac{\pi}{2}) + \mu = f(0) + \mu \\ & h(\pi) & = & f(\pi) - \lambda = f(0) - \lambda \\ & \lambda & = & \frac{h(0)-h(\pi)}{2} \\ \Leftrightarrow & f(0) & = & \frac{h(0)+h(\pi)}{2} \\ & \mu & = & h(\frac{\pi}{2}) - \frac{h(0)+h(\pi)}{2} = \frac{2h(\frac{\pi}{2})-h(0)-h(\pi)}{2} \end{array}$$

ii. SYNTHÈSE. On pose :

$$h = \underbrace{\left(h - \frac{h(0)-h(\pi)}{2}\cos - \frac{2h(\frac{\pi}{2})-h(0)-h(\pi)}{2}\sin\right)}_{=f} + \underbrace{\left(\frac{h(0)-h(\pi)}{2}\cos - \frac{2h(\frac{\pi}{2})-h(0)-h(\pi)}{2}\sin\right)}_{g}$$

Clairement, $g \in G$. On calcule :

$$f(0) = h(0) - \frac{h(0)-h(\pi)}{2} = \frac{h(0)+h(\pi)}{2}$$
$$f(\frac{\pi}{2}) = h(\frac{\pi}{2}) - \frac{2h(\frac{\pi}{2})-h(0)-h(\pi)}{2} = \frac{h(0)+h(\pi)}{2}$$
$$f(\pi) = h(\pi) + \frac{h(0)-h(\pi)}{2} = \frac{h(0)+h(\pi)}{2}$$

Cela démontre que $f \in F$.
En conclusion, toute fonction de E est la somme d'une fonction de F avec une fonction de G, ce qui s'écrit encore : $E \subset F + G$. L'autre inclusion étant évidente, on en déduit : $E = F + G$.

iii. Par le théorème de caractérisation des espaces supplémentaires, on a montré : $E = F \oplus G$.

Correction de l'exercice 11 :

(Q 1) $\left(E_{ij} + E_{ji}\right)_{1 \leq i < j \leq n} \cup \left(E_{ii}\right)_{1 \leq i \leq n}$

(Q 2) L'ensemble des fonction affines définies sur $\mathbb{R}$: $\text{Vect}\Big(x \mapsto 1; x \mapsto x\Big)$.

(Q 3) L'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant : $u_{n+2} + 4u_{n+1} + 4u_n = 0$ Équation caractéristique : $r^2 + 4r + 4 = 0 \Leftrightarrow (r+2)^2 = 0$. Par propriété, $\forall n \geq 0, u_n = \lambda(-2)^n + \mu n(-2)^n$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Par définition, une famille génératrice est : $\Big(((-2)^n)_{n\geq 0}; (n(-2)^n)_{n\geq 0}\Big)$.

Correction de l'exercice 13 :

- On cherche une famille génératrice de F.

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x - y - z = 0 \\ 2y + t = 0 \end{array} \right. \text{. Or :}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -0 & -1/3 & 1/6 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{3}z - \frac{1}{6}t \\ y = -t/2 \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}z - \frac{1}{6}t \\ -\frac{1}{2}t \\ z \\ t \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{u} = z\begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1/6 \\ -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{u} \in \text{Vect}(e_1, e_2),\ e_1 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} -1/6 \\ -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

D'où : $F = \text{Vect}(e_1, e_2) \Leftrightarrow (e_1, e_2)$ est une famille génératrice de F. De plus, cette famille est libre car : $ae_1 + be_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1/3a - b/6 = 0 \\ -b/2 = 0 \\ a = 0 \\ b = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \end{array} \right.$

Ainsi, $\underline{(e_1, e_2) \text{ est une base de } F.}$

- Puisque : $G = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$, $(u_1, u_2$ et u_3 est une famille génératrice de G. On étudie donc la liberté de cette famille de vecteurs.

$$au_1 + bu_2 + cu_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a + 2b + c = 0 \\ -a + b + 2c = 0 \\ 2a + 4b + 2c = 0 \\ 2a - 2b - 4c = 0 \end{array} \right.$$

Or :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc,

$$au_1 + bu_2 + cu_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = c \\ b = -c \end{array} \right.$$ Il y a une infinité de solutions donc la famille est liée. De plus, pour $c = 1$, nous obtenons : $a = 1$ et $b = -1$, ce qui donne :

$$u_1 - u_2 + u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow u_3 = u_2 - u_1.$$

Par conséquent : $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3) = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$ car $u_3 \in \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$. D'où : $G = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$. (u_1, u_2) est donc encore une famille génératrice de G ! L'étude de sa liberté correspond à la résolution du système précédent avec $c = 0$, ce qui donne : $a = c = 0$ et $b = -c = 0$. Donc, la famille est libre ! Au final, $\underline{(u_1, u_2) \text{ est une base de } G}$.

- $$\begin{aligned}
\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in F \cap G \quad & \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y - z = 0 \\ 2y + t = 0 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} 3(a+2b) - (-a+b) - (2a+4b) = 0 \\ 2(-a+b) + (2a-2b) = 0 \\ x = a + 2b \\ y = -a + b \\ z = 2a + 4b \\ t = 2a - 2b \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 0 \\ x = a + 2b \\ y = -a + b \\ z = 2a + 4b \\ t = 2a - 2b \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a \\ x = -3a \\ y = -3a \\ z = -6a \\ t = 6a \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = a \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \overrightarrow{u} \in \mathrm{Vect}(e)
\end{aligned}$$

  avec $e = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$.

  On en déduit que $F \cap G = \mathrm{Vect}(e)$ donc que (e) est une famille génératrice de $F \cap G$. Toute famille constituée d'un seul vecteur non nul est bien évidemment libre. $\underline{(e) \text{ est donc une base de } F \cap G.}$

- Par propriété : $F + G = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, u_1, u_2)$. (e_1, e_2, u_1, u_2) est donc une famille génératrice de $F + G$. On remarque que $u_1 - 2e_2 = 6e_2 - 6e_1$ donc : $u_2 = \frac{1}{2}u_1 + 3e_1 - 3e_2 \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2, u_1)$ ce qui assure que : $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, u_1, u_2) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, u_1)$, et donc : $F + G = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, u_1)$. Nous avons donc une (e_1, e_2, u_1) qui est une famille génératrice de $F + G$. Le calcul est laissé au lecteur mais cette famille est libre. Au final : $\underline{(e_1, e_2, u_1) \text{ est une base de } F + G.}$

⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆