

Équations différentielles linéaires à coefficients constants

LES INCONTOURNABLES

Exercice 1 : [solutions] Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$(a) y' + 3y = e^{3t} + e^{-3t} + \cos(t); \quad (b) y' + y = \cos(2t) + e^{-t}.$$

Exercice 2 : [solutions] Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$(a) y'' + y' - 2y = 1 + e^{2x} + 2e^x; \quad (b) y'' - 4y' + 4y = -e^{2x}; \quad (c) y'' - 4y' + 4y = \cos(2x);$$

$$(d) y'' + 4y = -e^{2x}; \quad (e) y'' + 4y = \cos(2x); \quad (f) y'' + y' + y = \sin(x).$$

Exercice 3 : [corrigé] Pour étudier l'évolution d'une population de poissons au cours du temps, on utilise le modèle suivant. On admet que la fonction N , représentant le nombre de poissons en fonction du temps t (exprimé en années) vérifie les conditions suivantes :

- N est solution de l'équation différentielle (E) : $y' = ry \left(1 - \frac{y}{K}\right)$, où r et K sont des constantes strictement positives;
- $N(0) = N_0$;
- N est définie sur $[0; +\infty[$ et $\forall t \in [0; +\infty[, 0 < N(t) < K$.

On pose, pour $t \in [0; +\infty[, g(t) = \frac{1}{N(t)}$.

1. Démontrer que g est solution de l'équation différentielle (E') : $y' = -ry + \frac{r}{K}$.
2. Résoudre l'équation différentielle (E'), puis déterminer une expression de N .
3. Justifier que le nombre de poissons augmente et que ce dernier tend vers une valeur que l'on précisera.

Exercice 4 : (Une équation d'Euler) On considère l'équation différentielle : (E) $4x^2 y'' + y = 1$ définie pour $x > 0$.

1. Soit f une solution de (E). On pose : $g(t) = f(e^t)$. Montrer que g est solution de l'équation différentielle : (E') $4y'' - 4y' + y = 1$.
2. Résoudre (E'). En déduire que si f est solution de (E), alors f est de la forme $f(x) = (a \ln(x) + b)\sqrt{x} + 1$ avec $(a; b) \in \mathbb{R}^2$.
3. Étudier la réciproque.

Exercice 5 : [indications] Trouver toutes les fonctions deux fois dérivables, définies sur $\mathbb{R}$ et telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(-x) = e^x.$$

POUR S'ENTRAÎNER

Exercice 6 : [solutions] Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$(b) y' - 4y = e^t \cos(t); \quad (d) y' - iy = 1.$$

Exercice 7 : [solutions] Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$(a) y'' + y = \cos(x) + \sin(x); \quad (b) y'' - 2y' + y = e^x \sin(x); \quad (c) y'' + 2y' + 2y = \cos(x) \operatorname{ch}(x).$$

Exercice 8 : [corrigé] On considère le système différentiel suivant : (E) $\begin{cases} x'(t) = x(t) + 4y(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) \end{cases}$.

1. Si x et y sont solutions de (E), montrer que : $z(t) = x(t) - 2y(t)$ est solution d'une équation différentielle linéaire ($\tilde{E}$) du premier ordre à coefficients constants que l'on déterminera.
2. Résoudre ($\tilde{E}$) puis en déduire les solutions S de (E).

Exercice 9 : [indications] Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $(1 + e^x)y'' + 2e^xy' + (2e^x + 1)y = e^x$ en posant $z(x) = (1 + e^x)y(x)$.

Exercice 10 : [indications] Déterminer les fonctions f trois fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que : $f^{(3)}(x) - f(x) = 0$ (on pourra poser $g(x) = f'(x) - f(x)$ et montrer que g est solution d'une équation différentielle d'ordre deux).

Exercice 11 : [indications] [corrigé] Résoudre : $y^{(3)} + y'' - y' - y = 0$ avec $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ et $y''(0) = -1$ (on pourra poser $g(x) = f'(x) + f(x)$ et montrer que g est solution d'une équation différentielle d'ordre deux à coefficients constants).

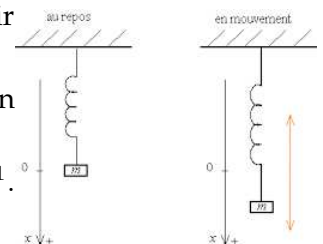
Exercice 12 : [corrigé] Montrer qu'il existe une infinité de solutions $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de l'équation : $y'' + y = 0$ telles que $y(0) = 0$ et $y(\pi) = 0$. Déterminer ces solutions.

DIVERS

Exercice 13 : [corrigé]

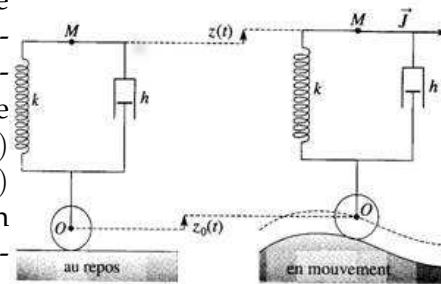
L'équation différentielle $my''(t) + hy'(t) + ky(t) = 0$ permet de décrire le mouvement en fonction du temps t d'un objet suspendu à un ressort, de masse m . Les constantes h et k sont strictement positives et sont liées respectivement aux frottements de l'air et à la raideur du ressort.

1. Si k et m sont données, quelle condition doit vérifier h afin qu'aucune fonction trigonométrique n'apparaisse dans l'expression de la solution y ?
2. Dans toute la suite, $m = 10^{-1}$, $h = 2 \times 10^{-2}$; $k = 10^{-3}$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 10^{-1}$. Résoudre ce problème de Cauchy.
3. Étudier alors la fonction obtenue et la représenter graphiquement. Interpréter la limite de y en $+\infty$, le maximum de y .



Exercice 14 :

Un véhicule automobile est sommairement modélisé par une masse M reposant sur une roue de centre O , par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k mis en parallèle sur un amortisseur de coefficient de frottement h . En toutes circonstances, l'axe (OM) reste vertical. On se propose d'examiner le comportement du véhicule lorsqu'il a une vitesse v sur une route dont le profil impose une élongation $z_0(t) = a \cos(\Omega t)$ ($a > 0$). On repère le mouvement de la masse par son élongation $z(t)$ par rapport à sa position d'équilibre lorsque le véhicule est au repos. On rappelle qu'un amortisseur placé en O exerce sur M une force de frottement fluide proportionnelle à la vitesse relative de M par rapport à O : $f_r = -h(z'(t) - z'_0(t))$.



En utilisant les lois de la mécanique classique, nous obtenons l'équation différentielle satisfaite par z :

$$(E) \quad m z''(t) + h z'(t) + k z(t) = k a \cos(\Omega t) - h a \Omega \sin(\Omega t).$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Montrer que la fonction : $x \mapsto \frac{k^2 + h^2 x}{(k - m x)^2 + h^2 x}$, définie pour $x \geq 0$, admet un maximum. En déduire l'expression de Ω_r pour laquelle l'amplitude du mouvement, en régime stationnaire, est maximale. On appelle la fréquence associée la fréquence de résonance.

Indications

Exercice 5 : Phase d'analyse : dériver la relation donnée, puis en utilisant l'équation de l'énoncé, en déduire une équation différentielle linéaire d'ordre deux à coefficients constants vérifiée par f .  Penser à étudier la réciproque (la synthèse).

Exercice 9 : z est solution de l'équation différentielle : $z'' + z = e^x$.

Exercice 10 : g est solution de l'équation différentielle : $g'' + g' + g = 0$.

Exercice 11 : g est solution de l'équation différentielle : $g'' - g = 0$.

Solution de l'exercice 1 :

$$\begin{cases} (a) S = \{t \mapsto Ce^{-3t} + \frac{1}{6}e^{3t} + te^{-3t} + \frac{3}{10}\cos(t) + \frac{1}{10}\sin(t), \\ (b) S = \{t \mapsto (C+t)e^{-t} + \frac{1}{5}\cos(2t) + \frac{2}{5}\sin(2t), C \in \mathbb{R}\}. \end{cases}$$

Solution de l'exercice 2 :

$$\begin{cases} (a) S = \{x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-2x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{2}{3}xe^x, (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2\}, \\ (b) S = \{x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{2x} - \frac{1}{2}x^2e^x, (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2\}, \\ (c) S = \{x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{2x} - \frac{1}{8}\sin(2x), (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2\}, \\ (d) S = \{x \mapsto \lambda \cos(2x) + \mu + \sin(2x) - \frac{e^{2x}}{8}, (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2\}, \\ (e) S = \{x \mapsto \lambda \cos(2x) + \mu + \sin(2x) + \frac{1}{4}x \sin(2x), (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2\}, \\ (f) S = \{x \mapsto \left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)e^{-x/2} - \cos(x), (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2\}, \end{cases}$$

Solution de l'exercice 6 :

$$\begin{cases} (a) S = \{t \mapsto Ce^{4t} + \frac{1}{10}(-3\cos(t) + \sin(t))e^t, C \in \mathbb{R}\}, \\ (b) S = \{t \mapsto Ce^{it} + i, C \in \mathbb{R}\}. \end{cases}$$

Solution de l'exercice 7 :

$$\begin{cases} (a) S = \{x \mapsto \lambda \cos(x) + \mu \sin(x) - \frac{x}{2} \cos(x) + \frac{x}{2} \sin(x), (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2\}, \\ (b) S = \{x \mapsto (\lambda + \mu x)e^x - e^x \sin(x), (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2\}, \\ (c) S = \{x \mapsto (\lambda \cos(x) + \mu \sin(x))e^{-x} + \frac{1}{16}e^x(\sin(x) + \cos(x)) + \frac{1}{4}x \sin(x)e^{-x}, (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2\}. \end{cases}$$

Correction de l'exercice 3 :

$$\begin{aligned} 1. g'(t) &= -\frac{N'(t)}{N^2(t)}. \text{ Or : } N'(t) = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) = \\ &= rN(t) - \frac{r}{K}N^2(t), \text{ donc : } g'(t) = -\frac{N'(t)}{N^2(t)} = -\frac{rN(t) - \frac{r}{K}N^2(t)}{N^2(t)} = \\ &= -r\frac{1}{N(t)} + \frac{r}{K} = -rg(t) + \frac{r}{K}. \text{ Ceci prouve bien que} \end{aligned}$$

$$g \text{ est solution de } y' = -ry + \frac{r}{K} \Leftrightarrow y' + ry = \frac{r}{K}.$$

- (E_H) : $y' + ry = 0$: $S_H = \{Ce^{-rt}, C \in \mathbb{R}\}$.
- On cherche une solution particulière constante : $y_P(t) = a$, ce qui donne, puisque $y'_P(t) = 0$: $ra = \frac{r}{K} \Leftrightarrow a = \frac{1}{K}$.

$$\text{Au final : } S = \left\{Ce^{-rt} + \frac{1}{K}, C \in \mathbb{R}\right\}.$$

$$\text{Ainsi : } \frac{1}{N(t)} = Ce^{-rt} + \frac{1}{K} \text{ donc : } N(t) = \frac{1}{Ce^{-rt} + \frac{1}{K}} =$$

$$\frac{K}{KCe^{-rt} + 1}. \text{ Enfin : } N(0) = N_0 \text{ donc : } \frac{K}{KC + 1} = N_0 \Leftrightarrow KC + 1 = \frac{K}{N_0} \Leftrightarrow KC = \frac{K}{N_0} - 1. \text{ Ainsi :}$$

$$N(t) = \frac{K}{\left(\frac{K}{N_0} - 1\right)e^{-rt} + 1} = \frac{KN_0}{(K - N_0)e^{-rt} + N_0}.$$

- 3. • Puisque $N'(t) = \frac{re^{rt}}{\left(\left(\frac{K}{N_0} - 1\right)e^{-rt} + 1\right)^2}$, nous voyons que $N'(t) > 0$ ce qui justifie que le nombre de poissons augmente.

- Puisque $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-rt} = 0$ car $r > 0$; on en déduit

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = \frac{KN_0}{N_0} = K.$$

Correction de l'exercice 8 :

1. La fonction z est dérivable en tant que différence de fonctions qu'ils le sont. $\forall t \in \mathbb{R}, z'(t) = x'(t) - 2y'(t) = x(t) + 4y(t) - 2(x(t) + y(t)) = -x(t) + 2y(t) = -z(t)$. La fonction z est alors solution de l'équation $z' + z = 0$ ($\tilde{E}$).
2. Par théorème, l'ensemble des solutions de cette équation est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & Ce^{-t} ; C \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

Les fonctions x et y sont solutions de (E) si et seulement si il existe un réel C tel que

$$(E) \quad \begin{cases} x(t) = 2y(t) + Ce^{-t} \\ y'(t) = 2y(t) + Ce^{-t} + y(t)(*) \end{cases}.$$

Réolvons (*). L'ensemble des solutions de l'équation linéaire $y' - 3y = 0$ est l'ensemble des fonctions $y : t \mapsto C_1 e^{3t}$ avec $C_1 \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière de $y' - 3y = Ce^{-t}$. Puisque (-1) n'est pas solution de l'équation caractéristique $r - 3 = 0$, on cherche une solution sous la forme $\forall t \in \mathbb{R}, y_P(t) = \lambda e^{-t}$. On dérive et on injecte. La fonction y_P est solution si et seulement si

$$\forall t \in \mathbb{R}, -\lambda e^{-t} - 3(\lambda e^{-t}) = Ce^{-t} \Leftrightarrow -4\lambda = C \Leftrightarrow \lambda = \frac{-C}{4}.$$

L'ensemble des solutions de l'équation (*) est

$$\{y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{-C}{4}e^{-t} + \lambda e^{-t} ; \lambda \in \mathbb{R}. \end{array}\}$$

Finalement, l'ensemble des solutions du système différentielle est :

$$\begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ y : t & \mapsto & \frac{-C}{4}e^{-t} + \lambda e^{-t} \\ x : t & \mapsto & 2\left(\frac{-C}{4}e^{-t} + \lambda e^{-t}\right) + Ce^{-t} \end{cases} ; \lambda, C \in \mathbb{R}.$$

Correction de l'exercice 11 :

On pose $g = f' + f$.

1. Si f est solution de $y^{(3)} + y'' - y' - y = 0$ alors g est solution de $g'' - g = 0$ avec $g(0) = 1 + 1 = 2$ et $g'(0) = -1 + 1 = 0$. Résolvons ce problème de Cauchy.

- L'ensemble des solutions de l'équation $g'' - g = 0$ est :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^x + \mu e^{-x} \end{array} ; (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Puis, en considérant les conditions initiales, g est solution de ce problème si et seulement si

$$\begin{aligned} \exists (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, g(x) &= \lambda e^x + \mu e^{-x} \\ g(0) &= 2 \\ g'(0) &= 0 \end{aligned}$$

On obtient : $\lambda + \mu = 2$, puis en dérivant, $\lambda - \mu = 0$. Ainsi, $\lambda = \mu = 1$ et la solution de ce problème

$$\text{est : } \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x + e^{-x} \end{array}.$$

- Puis, la fonction f doit vérifier l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} f' + f &= g(x) = e^x + e^{-x} \\ f(0) &= 1 \\ f'(0) &= 1 \end{aligned}$$

- **Équation homogène.** L'équation caractéristique est $r + 1 = 0 \Leftrightarrow r = -1$. Par propriété,

$$S_H = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{-x} \end{array} ; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

- **Solutions particulières :**

► $f' + f = e^x$. On en cherche une de la même forme que le second membre, soit de la forme $x \mapsto Ce^x$. On obtient $C = 1/2$. Une solution particulière est $y_1 : x \mapsto \frac{e^x}{2}$.

► $f' + f = e^{-x}$. Étant donné que $x \mapsto e^{-x}$ est solution de l'équation homogène, on sait que l'on doit trouver une solution particulière sous la forme $y_2 : x \mapsto Cxe^{-x}$. Ainsi, y_2 est une solution particulière si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}, Ce^{-x}(1-x) + Cxe^{-x} = e^{-x} \Leftrightarrow C = 1.$$

Une solution particulière est $y_2 : x \mapsto xe^{-x}$.

Par le principe de superposition, une solution particulière de $f' + f = e^x + e^{-x}$ est

$$y_1 + y_2 : x \mapsto e^x + xe^{-x}$$

- **Conclusion.** L'ensemble des solutions de l'équation $f' + f = e^x + e^{-x}$ est

$$S = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{-x} + e^x + xe^{-x} \end{array} ; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

- Traitons alors le problème de Cauchy. La fonction f est la solution si et seulement si $f(0) = 1$ et $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda e^{-x} + e^x + xe^{-x}$. On obtient $\lambda + 1 + 0 = 1 \Leftrightarrow \lambda = 0$. Ainsi, la solution de ce problème est $f : x \mapsto e^x + xe^{-x}$.
- 2. Traitons la réciproque. On cherche à savoir si la fonction précédente est solution du problème initial. En effet, sa résolution a commencé par "Si f est solution alors $f : x \mapsto e^x + xe^{-x}$ ". Soit donc $f : x \mapsto e^x + xe^{-x}$.

- (a) f est dérivable en tant que somme de fonctions qui le sont.

$$f'(x) = e^x + e^{-x} - xe^{-x} = e^x + e^{-x}(1-x)$$

- (b) f' est dérivable en tant que somme de fonctions qui le sont.

$$f''(x) = e^x - (1-x)e^{-x} - e^{-x} = e^x + e^{-x}(x-2)$$

- (c) f'' est dérivable en tant que somme de fonctions qui le sont.

$$f^{(3)}(x) = e^x + e^{-x} - (x-2)e^{-x} = e^x + (3-x)e^{-x}$$

Ainsi,

$$f^{(3)} + f'' - f' - f = e^x + (3-x)e^{-x} + e^x + (x-2)e^{-x} - (e^x + e^{-x}(1-x))$$

$$= e^x(1+1-1-1) + e^{-x}(3-x+x-2-(1-x)-x) = 0$$

De plus, $f(0) = 1, f'(0) = 2, f''(0) = -1$. La fonction f est donc la solution de ce problème.

$$S = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x + xe^{-x} \end{array} \right\}$$

Correction de l'exercice 12 : L'équation caractéristique est $r^2 + 1 = 0$ et ses solutions sont i et $-i$. Par théorème, l'ensemble des solutions de $y'' + y = 0$ est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda \cos(x) + \mu \sin(x) \end{array} ; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

On cherche donc $y : x \mapsto \lambda \cos(x) + \mu \sin(x)$ telle que $y(0) = 0 = y(\pi)$. Alors $0 = \lambda = -\lambda$.

Finalement, y est solution de ce problème (non de Cauchy) si et seulement si il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que

$$y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mu \sin(x) \end{array}.$$

Correction de l'exercice 13 :

1. Afin qu'aucune fonction trigonométrique n'apparaisse dans l'expression de la solution y , il faut et il suffit que le discriminant de l'équation caractéristique soit positif ou nul, ce qui équivaut à :

$$h^2 - 4mk \geq 0 \Leftrightarrow |h| \geq 2\sqrt{mk}.$$

2. On doit résoudre l'équation différentielle :

$$10^{-1}y'' + 2 \times 10^{-2}y' + 10^{-3}y = 0 \Leftrightarrow y'' + 2 \times 10^{-1}y' + 10^{-2}y = 0$$

Le discriminant de l'équation caractéristique est égale à $[2 \times 10^{-1}]^2 - 4[10^{-2}] = 0$. L'équation a alors une unique solution, -10^{-1} . Par théorème, l'ensemble des solutions de l'équation homogène est :

$$S = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto (\lambda + \mu t)e^{-t/10} \end{array} / \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Soit alors y la solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' + 2 \times 10^{-1}y' + 10^{-2}y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 10^{-1} \end{cases} \quad . \text{ Par ce qui}$$

précède, $\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = (\lambda + \mu t)e^{-t/10}$. On obtient donc $\lambda = 0$. Puis, $\forall t \in \mathbb{R}, y'(t) = \mu(1 - t/10)e^{-t/10}$. Ainsi, $\mu = 10^{-1}$.

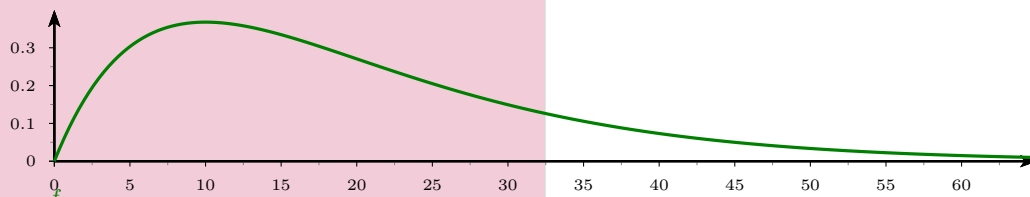
Finalement, l'unique solution de ce problème est :

$$y : \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{t}{10}e^{-t/10} \end{array}$$

3. Par ce qui précède : $\forall t \in \mathbb{R}, y'(t) = 10^{-1}(1 - t/10)e^{-t/10}$.

On en déduit le tableau de variations de y :

t	0	10	$+\infty$
$y'(t)$	+	0	-
$y(t)$	0	e^{-1}	0



La position maximale de l'objet est e^{-1} .

Par croissance comparée, $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$. Ainsi, l'objet revient à sa position initiale.



¹Jacopo Francesco Riccati (28 mai 1676 à Venise - 15 avril 1754 à Trévise) est un physicien et mathématicien italien, père de Vincenzo et de Giordano Riccati.

Ses travaux en hydraulique (canaux de Venise) et en acoustique le conduisent à résoudre des équations différentielles du second ordre en les réduisant au 1er ordre et plus généralement à rechercher des méthodes de séparation des variables afin d'obtenir les solutions par simples quadratures.

Ses travaux furent publiés après sa mort par ses fils à partir de 1764 sous le titre Opere del conte Jacopo Riccati. À la demande de Riccati, Maria Gaetana Agnesi a incorporé dans le livre sur le calcul intégral de ses Institutions analytiques du travail fait par lui sur les polynômes.

Il est en particulier connu pour l'équation différentielle de Riccati.

