TD 20

Dimension d'un espace vectoriel

LES INCONTOURNABLES

Exercice 1 : [corrigé] Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ deux fois dérivables.

(Q 1) Démontrer que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$y'' + 2y' + y = 0$$

est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie et donner sa dimension.

(Q 2) Soit λ un réel non-nul, et F_λ l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$y'' + \lambda^2 y = 0.$$

Démontrer que F_λ est de dimension finie et donner sa dimension.

Exercice 2 : [corrigé]

(Q 1) Montrer que l'ensemble E formé de l'ensemble des matrices : $\begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a+c & b+c \\ c & b & a+c \end{pmatrix}$ avec $(a;b;c) \in \mathbb{R}^3$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(Q 2) Donner une base puis la dimension de ce sous-espace vectoriel.

Exercice 3 :

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, on pose : $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et $C(K) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \ /MK = KM\}$.

1. Montrer que $C(K)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. En donner une base ainsi que sa dimension.
2. Soit $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que : $X^2 = K$.
   (a) Montrer que $X \in C(K)$.
   (b) Résoudre alors dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ l'équation $X^2 = K$.

Exercice 4 : [corrigé] Calculer le rang de la famille : $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$.

Exercice 5 : [corrigé] Dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_k(x) = \sin kx \ \text{ et } \ g_k(x) = \cos kx.$$

Déterminer le rang des familles

(Q 1) $\mathcal{G} = (g_0,\, g_1,\, g_2,\, g_3)$

(Q 2) $\mathcal{I} = (f_1,\, f_2,\, g_0,\, g_1,\, g_2,\, f_1^2,\, f_1 g_1,\, g_1^2)$.

Exercice 6 : Dans $\mathbb{R}^4$, on considère :

$$\begin{array}{rcl} y_1 & = & (1;1;1;1); y_2 = (1;-1;1;-1); y_3 = (1;2;3;1); y_4 = (2;-2;0;1); y_5 = (4;0;4;1) \\ x_1 & = & (1;3;5;1); x_2 = (1;0;-1;1) \end{array}$$

(Q 1) Montrer que $\mathrm{Vect}\Big(y_1;y_2;y_3;y_4;y_5\Big) = \mathbb{R}^4$.

(Q 2) Montrer que la famille $(x_1;x_2)$ est libre.

(Q 3) La compléter en une base de $\mathbb{R}^4$ en utilisant la famille $\Big(y_1;y_2;y_3;y_4;y_5\Big)$.

Exercice 7 : Soit $E = \mathbb{R}^4$. Soit $F;G$ les sous-ensembles de E d'équations :

$$\begin{array}{rcl} F & : & \left\{ 2x - y + z = 0 \right. \\ G & : & \left\{ x = 2y = 3z \right. \end{array}$$

(Q 1) Montrer que $F;G$ sont des sous-espaces vectoriels de E et donner leur dimension.

(Q 2) Déterminer un supplémentaire de F puis de G.

Exercice 8 : [corrigé] Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ on pose :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ; a - c + d = b + c - d = 0 \right\} \text{ et } G = \mathrm{Vect}\Big(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \Big)$$

Montrer que ce sont des sous-espaces supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ puis décomposer n'importe quelle matrice dans cette somme directe.

Exercice 9 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(Q 1) Calculer la dimension de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ et de $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$. Plus généralement, proposer une expression de $\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R}))$ et $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))$ en fonction de n.

(Q 2) Démontrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\}$.

(Q 3) En utilisant un argument de dimension, en déduire que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires.

Exercice 10 : Dans $\mathbb{R}_3[X]$ on note $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \ / \ P(1) = P'(1) = 0\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \ / \ P(1) = P(0) \text{ et } P'(1) = 0\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_3[X]$ et calculer leurs dimensions.
2. Montrer que $F = \mathrm{Vect}((X-1)^2, X(X-1)^2)$.
3. Calculer la dimension de $F \cap G$ et en donner une base.
4. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 11 : [corrigé] **Interpolation de Lagrange dans $\mathbb{R}_2[X]$.**

Prenons trois réels : $a < b < c$ et notons :

$$P_a = \frac{(X-b)(X-c)}{(a-b)(a-c)}; P_b = \frac{(X-a)(X-c)}{(b-a)(b-c)}; \ P_c = \frac{(X-a)(X-b)}{(c-a)(c-b)}$$

(Q 1) Montrer que (P_a, P_b, P_c) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

(Q 2) Prenons la fonction $P : x \mapsto x^2$ et $a = 1, b = 2, c = 3$.

- (Q a) Trouver α, β, γ tels que $P = \alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3$.
- (Q b) En déduire $\int_4^5 \frac{x^2}{(x-1)(x-2)(x-3)}\, dx$.

(Q 3) Interpolation. Soit f une fonction continue réelle.

- (Q a) Supposons qu'il existe $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $f(a) = P(a), f(b) = P(b), f(c) = P(c)$ $(\star)$. En raisonnant par l'absurde, montrer que si P existe alors il est unique.
- (Q b) Trouver alors le polynôme P vérifiant $(\star)$ à l'aide des polynômes P_a, P_b et P_c.

POUR S'ENTRAÎNER

Exercice 12 : La famille $\mathcal{F} = (u_1; u_2; u_3; u_4)$ est-elle une base de $(\mathcal{M}_{31}(\mathbb{R}); +; .)$? Sinon, en extraire une base si cela est possible :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}; u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}; u_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13 : [corrigé] Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$, et F le sous-ensemble de E contenant les suites arithmétiques. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie et donner sa dimension.

Exercice 14 : [corrigé] Soient F et G deux sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{12}$. On suppose que $\dim F = 5$ et $\dim G = 8$ et F n'est pas inclus dans G.

(Q 1) Montrer que $1 \leq \dim(F \cap G)$.

(Q 2) Montrer que $\dim(F \cap G) \leq 4$.

Exercice 15 : [corrigé] Dans $\mathbb{R}^4$ on note

$$F = \left\{(x; y; z; t) \in \mathbb{R}^4; x - y - z + t = 0 \text{ et } x + y - z - t = 0\right\}$$

et

$$G = \left\{(x; y; z; t) \in \mathbb{R}^4; x + 2y + 3z + 4t = 0 \text{ et } 4x + 3y + 2z + t = 0\right\}$$

(Q 1) Déterminer deux vecteurs linéairement indépendants de F puis de G. Que peut-on en déduire sur leur dimension ?

(Q 2) Montrer que $F \cap G = \{\overrightarrow{0_E}\}$.

(Q 3) En utilisant un argument de dimension, montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^4$ puis les dimensions exactes de F et de G ainsi qu'une base de F et une base de G.

Exercice 16 : Pour chaque question :

- Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ supplémentaires ;
- Décomposer tout vecteur $u = (x; y; z)$ de E dans la somme directe $E = F \oplus G$.

(Q 1) $F = \left\{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3; 2x + y - 3z = 0\right\}$ et $G = \left\{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3; x = 2y = -z\right\}$;

(Q 2) F le sous-espace vectoriel engendré par $e_1 = (7; 5; 0)$ et $e_2 = (6; 10; 5)$ et G la droite vectorielle engendré par le vecteur $u_3 = (8; 9; 3)$.

Exercice 17 : [corrigé] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes et $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices triangulaires inférieures.

(Q 1) Montrer que ces espaces sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(Q 2) Donner la dimension de ces deux sous-espaces vectoriels.

(Q 3) Montrer que $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{R}) \cap \mathcal{T}_n^-(\mathbb{R}) = \{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\}$.

(Q 4) Déduire des questions précédentes que $\dim\left(\mathcal{T}_n^+(\mathbb{R}) + \mathcal{T}_n^-(\mathbb{R})\right) = n^2$.

(Q 5) En déduire que $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{R})$ sont supplémentaires.

Exercice 18 : [corrigé]

Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on pose : $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et $C(J) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / MJ = JM\}$.

1. Montrer que $C(J)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. En donner une base ainsi que sa dimension.
2. Soit $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $X^2 = J$.
   (a) Montrer que $X \in C(J)$. On note alors : $X = aI_3 + bJ + cJ^2$.
   (b) Montrer que a, b, c vérifient le système : $(*) \begin{cases} a^2 + 2bc = 0 \\ c^2 + 2ab = 1 \\ b^2 + 2ac = 0 \end{cases}$ puis préciser la valeur de $(a+b+c)^2$.
   (c) On suppose : $a + b + c = 1$. Exprimer c en fonction de a et b et en déduire un système de deux équations à deux inconnues vérifié par a et b.
   (d) Conclure.

Exercice 19 : Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. On appelle **hyperplan** tout espace vectoriel de E de dimension $n - 1$.

(Q 1) Soient F et H deux hyperplans distincts de E. Déterminer $\dim(F \cap H)$.

(Q 2) Soit H un sous-espace vectoriel distinct de E. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
   (a) H est un hyperplan de E.
   (b) pour tout $u_0 \in E \setminus H; E = H \oplus \mathrm{Vect}(u_0)$.

Exercice 20 : [corrigé] Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(Q 1) Montrer que la famille $(I_n, M, M^2, ..., M^{n^2})$ est liée.

(Q 2) En déduire l'existence d'un polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ non nul tel que l'on ait : $P(M) = 0_{nn}$.

(Q 3) En déduire l'existence d'un λ dans $\mathbb{C}$ pour lequel $M - \lambda I_n$ ne soit pas inversible.

(Q 4) Montrer qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ tel que l'on ait : $MX = \lambda X$. *On dit que X est vecteur propre de M associé à la valeur propre λ.*

Exercice 21 : [corrigé] Ces familles sont-elles des bases de $\mathbb{R}_3[X]$?

(Q 1) $P_0 = X^3 + X^2;\ \ P_1 = X^2 + X; P_2 = X + 1; P_3 = 1$?

(Q 2) $P_0 = X^3 + X^2;\ \ P_1 = X^2 + X; P_2 = X + 1; P_3 = X^3 + 1$?

(Q 3) $P_0 = (X - 1)(X - 2)$, $P_1 = X(X - 2)$, $P_2 = X(X - 1)$.

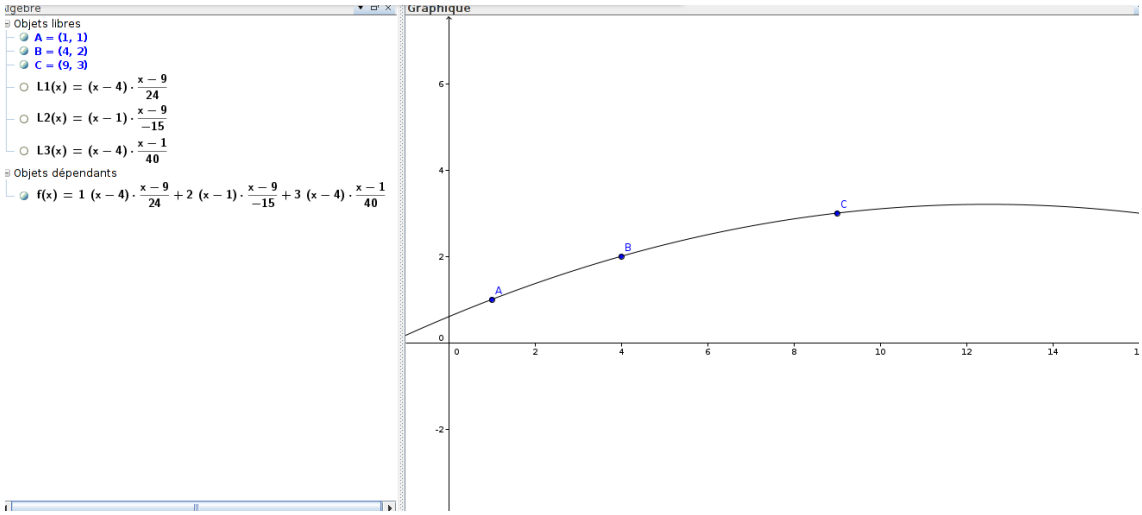
Exercice 22 : [corrigé] Pour $n \geq 2$, on note $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X],\ P(X + 1) + P(X - 1) - 2P(X) = 0\}$, et $H = \{P \in \mathbb{R}_n[X]/P(-1) = P(1) = 0.\}$.

1. Montrer que F et H sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_n[X]$ et que $\mathrm{Vect}(1, X) \subset F$.
2. Soit $P \in F \cap H$. Montrer que 0 est racine de P. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) = 0$. Qu'en déduit-on pour $F \cap H$?
3. Montrer que $\mathrm{Vect}(X^2 - 1,\ X(X^2 - 1),\ \ldots, X^{n-2}(X^2 - 1)) \subset H$.
4. Montrer que F et H sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_n[X]$.
5. En déduire finalement que $F = \mathrm{Vect}(1, X)$.

Exercice 23 : [corrigé] Soit $(n, \alpha) \in \mathbb{N} \times \mathbb{K}$. Montrer que $E = \{P \in \mathbb{K}_n[X]/P(\alpha) = 0\}$ est un sous espace vectoriel et en déterminer une base. On pourra utiliser la formule de Taylor en α.

Exercice 24 : [corrigé] *Polynômes interpolateurs de Lagrange (Français, XVIII ième).*

Un exemple introductif : La température d'une solution chimique évolue en fonction du temps selon $T = f(t)$, T température, t le temps. Un relevé est effectué : $(t_1, T_1), \cdots ; (t_n, T_n)$. L'objectif est d'obtenir une approximation de f à partir de ces n points. Une telle approximation peut être obtenue grâce aux polynômes et à l'algèbre linéaire.



Soient $t_1 < \cdots < t_n$ des réels. Pour $1 \leq k \leq n$ on pose

$$L_k = \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^{n} \frac{X - t_\ell}{t_k - t_\ell}$$

.

(Q 1) Pour $k \in \{1; \cdots ; n\}$, déterminer le degré de L_k, les racines de L_k et la valeur de $L_k(t_k)$.

(Q 2) Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Montrer que les deux polynômes sont égaux : $P = \sum_{i=1}^{n} P(t_i) L_i$.

(Q 3) En déduire que $(L_1, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

(Q 4) Soit $(T_1, \ldots T_n) \in \mathbb{R}^n$. En s'aidant de la seconde question, montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $P(t_k) = T_k$ pour tout $1 \leq k \leq n$.

Indications

Correction de l'exercice 1 :

(Q 1) L'équation caractéristique de cette EDL d'ordre 2 est $r^2+2r+1=0 \Leftrightarrow r=-1$. L'ensemble des solutions de cette EDL est
$\left\{x \mapsto \lambda e^x + \mu x e^x ; \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}\Big(x \mapsto e^x ; x \mapsto xe^x\Big)$.
Par propriété, cet ensemble est donc un sous espace vectoriel de E. De plus, une famille génératrice est $\Big(x \mapsto e^x ; x \mapsto xe^x\Big)$. Étudions la liberté de cette dernière. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \lambda e^x + \mu x e^x = 0$. Ceci est vrai pour tous les réels x, donc en particulier pour $x=0$ ce qui amène $\lambda = 0$, puis pour $x=1$, ce qui donne $\mu = 0$.
Cette famille est donc libre, génératrice. Par définition, c'est une base de l'ensemble des solutions de cette EDL, qui est alors de dimension 2.

(Q 2) L'équation caractéristique de cette EDL d'ordre 2 est $r^2+\lambda^2=0 \Leftrightarrow r = \pm i\lambda$. L'ensemble des solutions de cette EDL est
$\left\{x \mapsto C_1\cos(\lambda x) + C_2 \sin(\lambda x) ; C_1, C_2 \in \mathbb{R}\right\}$
$= \mathrm{Vect}\Big(x \mapsto \cos(\lambda x) ; x \mapsto \sin(x\lambda)\Big)$.
Par propriété, cet ensemble est donc un sous espace vectoriel de E. De plus, une famille génératrice est $\Big(x \mapsto \cos(\lambda x) ; x \mapsto \sin(x\lambda)\Big)$. Étudions la liberté de cette dernière. Soit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, C_1\cos(\lambda x) + C_2 \sin(\lambda) = 0$. Ceci est vrai pour tous les réels x, donc en particulier pour $x=0$ ce qui amène $C_1 = 0$. Puis $\forall x \in \mathbb{R}, C_2 x e^x = 0 \Rightarrow C_2 = 0$. Cette famille est donc libre, génératrice. Par définition, c'est une base de l'ensemble des solutions de cette EDL, qui est alors de dimension 2.

Correction de l'exercice 2 :

On cherche une famille génératrice. On remarque que
$$\begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a+c & b+c \\ c & b & a+c \end{pmatrix} = a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{:=A} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + c \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{:=C}$$
De plus, les vecteurs A, B, C sont des éléments de E. Par conséquent,
$$E = \mathrm{Vect}\Big(A; B; C\Big)$$
Par propriété, E est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et (A, B, C) est une famille génératrice de cet espace.

On montre que cette famille est libre. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que :
$aA + bB + cC = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a+c & b+c \\ c & b & a+c \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \Leftrightarrow a = b = c = 0$. Par définition, cette famille est donc libre.

Cette famille est génératrice et libre, c'est donc une base de E. Cet ensemble est donc un espace vectoriel de dimension 3.

Correction de l'exercice 4 :

Par définition, on doit calculer :
$\dim\left(\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)\right)$. On teste donc la liberté de cette famille. Soient $\lambda, \mu, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tels que
$$\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
La matrice augmentée associée est
$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 7 & 5 \\ 2 & -2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim_{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$
$$\sim_{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 7 & 5 \end{pmatrix} \sim_{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 7 & 5 \end{pmatrix} \sim_{\mathcal{L}}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \end{pmatrix} \sim_{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
On en déduit que :
$\gamma = 10\delta, \mu = -2\gamma - 4\delta = 11\delta, \lambda = -\mu - 4\gamma - \delta = 16\delta$
ce qui entraîne :
$$\delta\left(16\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 11\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 7\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
ce qui donne pour $\delta = 1$ la relation :
$\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = -16\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 11\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$. On constate donc que la famille est liée et que :
$\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ ce qui prouve que :
$$\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$
et donc que :

$$\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}0\\2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\-2\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7\\2\\4\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\4\\1\\3\end{pmatrix}\right)=\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}0\\2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\-2\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7\\2\\4\\2\end{pmatrix}\right).$$

Or la famille $\left(\begin{pmatrix}0\\2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\-2\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7\\2\\4\\2\end{pmatrix}\right)$ est libre car en reprenant le système précédent, mais avec $\delta=0$ nous obtenons :

$$\lambda\begin{pmatrix}0\\2\\1\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}4\\-2\\1\\1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}7\\2\\4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\lambda=\mu=\gamma=\delta=0.$$

Puisque cette famille est libre elle est nécessairement de rang 3. Ainsi : $\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}0\\2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\-2\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7\\2\\4\\2\end{pmatrix}\right)=3$ et donc

$$\boxed{\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}0\\2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\-2\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7\\2\\4\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\4\\1\\3\end{pmatrix}\right)=3.}$$

Correction de l'exercice 5 :

1. Soient $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ tels que : $\forall x\in\mathbb{R},\ a+b\cos(x)+c\cos(2x)+d\cos(3x)=0$. En appliquant la relation précédente en $x=\frac{\pi}{2}$, nous obtenons : $a-c=0$. En appliquant la relation précédente en $x=0$, nous obtenons : $a+b+c+d=0$ (1). En appliquant la relation précédente en $x=\pi$, nous obtenons : $a-b+c-d$ (3). En sommant (1) et (2), nous en déduisons : $a+c=0$. Or $a-c=0$ donc nécessairement : $a=c=0$. Nous avpns donc au final : $b+d=0$. En évaluant enfin l'expression en $x=\frac{\pi}{3}$, on obtient : $\frac{b}{2}-d=0$. Ainsi, $2d=-d\Leftrightarrow d=0$. Il s'ensuit : $b=0$, ce qui prouve la liberté de la famille considérée. Cette dernière est donc de rang 4.
2. On cherche dans un premier temps des relations de liaisons évidentes : $\sin(x)\cos(x)=\frac{1}{2}\sin(2x)$, $\sin^2(x)=1-\cos(2x)$ et $\cos^2(x)=2\cos(2x)-1$. Ainsi : $\mathrm{Vect}(I)=\mathrm{Vect}(1,\sin(x),\sin(2x),\cos(x),\cos(2x))$. Montrons alors que la famille restante est libre. Soient donc $a,b,c,d,e\in\mathbb{R}$ tels que : $\forall x\in\mathbb{R},\ a+b\sin(x)+c\sin(2x)+d\cos(x)+e\cos(2x)=0$. Alors : $x=0$ et $x=\pi$ fournissent les relations : $a+d+e=0$ et $a-d+e=0$. Ainsi, $d=0$ et donc $e=-a$. Ainsi, $\forall x\in\mathbb{R},\ a(1-\cos(2x))+b\sin(x)+c\sin(2x)=0$. En prenant $x=\frac{\pi}{2}$, nous obtenons : $2a+b=0$. En prenant $x=-\frac{\pi}{2}$, nous obtenons : $2a-b=0$. Ainsi, $a=b=0$ donc $\forall x\in\mathbb{R}$, $c\sin(2x)=0$. En prenant par exemple $x=\frac{\pi}{4}$, nous obtenons : $c=0$. Au final, $a=b=c=d=e=0$ est donc la famille est libre. I est donc de rang 5.

Correction de l'exercice 6 :

(Q 1) L'inclusion $\mathrm{Vect}\Big(y_1;y_2;y_3;y_4;y_5\Big)\subset\mathbb{R}^4$ est évidente. Pour montrer l'autre inclusion, on considère $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$ et on cherche l'existence de $a,b,c,d,e\in\mathbb{R}$ tels que : $(x,y,z,t,w)=ay_1=by_2+cy_3+dy_4+ey_5$. Le système associé d'inconnues a,b,c,d,e a pour matrice augmentée :
$\begin{pmatrix}1&1&1&2&4&|&x\\1&-1&2&-2&0&|&y\\1&1&3&0&4&|&z\\1&-1&1&1&1&|&t\end{pmatrix}$. L'utilisation du pivot de Gauss mène à l'échelonnement :

$$\begin{pmatrix}1&1&1&2&4&|&x\\1&-1&2&-2&0&|&y\\1&1&3&0&4&|&z\\1&-1&1&1&1&|&t\end{pmatrix}\sim_{\mathcal{L}}\begin{pmatrix}1&1&1&2&4&|&x\\0&-2&1&-4&-1&|&y-x\\0&0&2&-2&4&|&z-x\\0&0&0&4&6&|&2t-2y+z-x\end{pmatrix}$$

Le système est donc de rang 4 avec t pour inconnue secondaire. Il n'y pas de conditions de compatibilité, ce qui assure l'existence des solutions de ce système, et donc de a,b,c,d,e. Par conséquent, on peut trouver a,b,c,d,e pour lequels : $(x,y,z,t,w)=ay_1=by_2+cy_3+dy_4+ey_5$, ce qui prouve que $(x,y,z,t,w)\in\mathrm{Vect}(y_1;y_2;y_3;y_4;y_5)$.

(Q 2) Les deux vecteurs sont clairement non colinéaires donc forment une famille libre.

(Q 3) Étudions la liberté de (x_1,x_2,y_1). Soient donc $a,b,c\in\mathbb{R}$ tels que : $ax_1+bx_2+cy_1=0$. On en déduit un système homohène d'inconnues a,b,c et de matrice :
$\begin{pmatrix}1&1&1\\3&0&1\\5&-1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$. L'utilisation du pivot de Gauss entraîne l'échelonnement :
$\begin{pmatrix}1&1&1\\3&0&1\\5&-1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\sim_{\mathcal{L}}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-3&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$. Cette matrice est donc de rang $2<3$ donc le système associé admet une infinité de solutions, ce qui assure le fait que la famille est liée. y_1 ne convient donc pas.

Étudions la liberté de (x_1,x_2,y_2). Soient donc $a,b,c\in\mathbb{R}$ tels que : $ax_1+bx_2+cy_2=0$. On en déduit un système homohène d'inconnues a,b,c et de matrice :
$\begin{pmatrix}1&1&1\\3&0&-1\\5&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$. L'utilisation du pivot de Gauss entraîne l'échelonnement :
$\begin{pmatrix}1&1&1\\3&0&-1\\5&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}\sim_{\mathcal{L}}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-3&-4\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$. Cette matrice est donc de rang maximal 3. Le système associé admet par conséquent $a=b=c=0$ pour unique solution, ce qui assure le fait que la famille est libre.
Étudions la liberté de (x_1,x_2,y_2,y_3). Soient donc $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ tels que : $ax_1+bx_2+cy_2+dy_3=0$. On en dé-

duit un système homohène d'inconnues a, b, c, d et de matrice : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. L'utilisation du pivot de Gauss entraîne l'échelonnement : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim_{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice est donc de $3 < 4$. La famille est donc ici liée donc y_3 ne convient pas.

D'après le théorème de la base incomplète, nécessairement, (x_1, x_2, y_2, y_4) est une base de $\mathbb{R}^4$.

Correction de l'exercice 8 :

Puisque $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension finie, nous allons utiliser la caractérisation des espaces supplémentaires par l'intersection et les dimensions.

1. Ce sont deux sous espaces vectoriels. En effet, G est l'espace vectoriel engendré par trois matrices, par propriété, G en est un. En ce qui concerne F, on peut utiliser les trois points définissant les sous espaces vectoriels. Sinon, on peut en donner une famille génératrice.
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in F \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c-d & d-c \\ c & d \end{pmatrix} = c\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\in F} + d\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\in F}$
Par définition, F est engendré par deux vecteurs :
$$F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$
et F est donc un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Calculons leur dimension.
   (a) La famille composée de ces deux vecteurs clairement non colinéaires $\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est libre, génératrice de F. C'est donc une base et F est de dimension 2.
   (b) Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que
   $a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
   $\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c &= 0 \\ a-b+3c &= 0 \\ a-2b+4c &= 0 \\ a+b+c &= 0 \end{cases}$
   $\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c &= 0 \\ -2b+2c &= 0 \\ -3b+3c &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= -2c \\ b &= c \end{cases}$
   Finalement, la famille est donc liée et de plus, on obtient pour tout réel c :
   $c\left(-2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
   En particulier, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est combinaison linéaire des deux dernières matrices. Par propriété, on peut donc l'enlever de la famille génératrice de G et on a :
   $$G = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\right)$$
   Finalement, ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires. La famille composée de ces deux vecteurs est donc libre, génératrice de G qui est donc de dimension 2.
   (c) L'intersection $F \cap G$ est-elle réduite au vecteur nul ?
   Puisque F et G sont deux sous espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on sait que $\{0_{22}\} \subset F \cap G$.
   Réciproquement, soit $M \in F \cap G$. Écrivons les conditions que cela impose sur M. D'une part, $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $a - c + d = b + c - d = 0$ et d'autre part, $M = \lambda\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda+\mu & -\lambda+3\mu \\ -2\lambda+4\mu & \lambda+\mu \end{pmatrix}$
   Ainsi, $(\lambda+\mu) - (-2\lambda+4\mu) + (\lambda+\mu) = 0 \Leftrightarrow 4\lambda - 2\mu = 0$ et $(-\lambda+3\mu) + (-2\lambda+4\mu) - (\lambda+\mu) = 0 \Leftrightarrow -4\lambda + 6\mu = 0$. Nous obtenons a ;ors $\lambda = \mu = 0$ et $M = 0_{22}$. Nous avons donc montré que $F \cap G \subset \{0_{22}\}$.
   Finalement $F \cap G = \{0_{22}\}$.
3. CONCLUSION. On sait que $\dim(F) + \dim(G) = 2 + 2 = 4 = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ et $F \cap G \subset \{0_{22}\}$. Par le théorème de la caractérisation des espaces supplémentaires par l'intersection et les dimensions, on en déduit que F et G sont supplémentaires.

Correction de l'exercice 11 :

(Q 1) Testons la liberté de cette famille. Soit $(\lambda, \mu, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que
$$\lambda P_a + \mu P_b + \gamma P_c = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$$
Substituons à l'indéterminée successivement a puis b puis c. On obtient alors
$$\lambda = 0, \mu = 0, \gamma = 0$$
. Par définition, cette famille est libre. De plus, son cardinal est égal à 3 et la dimension de $\mathbb{R}_2[X]$ est égale à $2+1 = 3$. Par théorème, cette famille est une base de cet espace .

(Q 2) Prenons la fonction $P : x \mapsto x^2$ et $a = 1, b = 2, c = 3$.
   (Q a) On cherche donc α, β, γ tels que
   $$P = \alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3.$$
   On sait que ces coefficients existent puisque (P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

On peut substituer les nombres $1, 2, 3$ à l'indéterminée X. On obtient alors

$$\begin{cases} P(1) &= \alpha + 0 + 0 \Leftrightarrow \alpha = 1 \\ P(2) &= 0 + \beta + 0 \Leftrightarrow \beta = 4 \\ P(3) &= 0 + 0 + \gamma \Leftrightarrow \gamma = 9 \end{cases}$$

Finalement,

$$P = P_1 + 4P_2 + 9P_3$$

(Q b)

$$\begin{aligned} \int_4^5 \frac{x^2}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,dx &= \int_4^5 \frac{P_1}{(x-1)(x-2)(x-3)} + 4\frac{P_2}{(x-1)(x-2)(x-3)} \\ &\quad + 9\frac{P_3}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,dx \\ &= \int_4^5 \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} - 4\frac{1}{x-2} + \frac{9}{2}\frac{1}{x-3}\,dx \\ &= \left[\frac{1}{2}\ln(x-1) - 4\ln(x-2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{9}{2}\ln(x-3)\right]_4^5 \\ &= \boxed{\frac{1}{2}\ln(4/3) - 4\ln(3/2) + \frac{9}{2}\ln(2)} \end{aligned}$$

(Q 3) (Q a) On suppose qu'il en existe deux, appelons-les P et Q. Alors le polynôme $P - Q$ est de degré au plus 2 et s'annule au moins trois fois, en a, b et c. Par propriété, ce polynôme est donc le polynôme nul et $P = Q$.

(Q b) Puisque (P_a, P_b, P_c) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ on sait qu'il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$P = \alpha P_a + \beta P_b + \gamma P_c$$

En substituant à l'indéterminée les réels a, b et c, on obtient donc

$$P(a) = \alpha, P(b) = \beta, P(c) = \gamma$$

Puisque $f(a) = P(a), f(b) = P(b), f(c) = P(c)$, on obtient donc

$$\boxed{P = f(a)P_a + f(b)P_b + f(c)P_c}$$

Correction de l'exercice 13 :

On cherche une famille génératrice. Une suite est arithmétique si et seulement si il existe $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a + bn$. On remarque que l'on a une combinaison linéaire : $(u_n)_{n\geq 0} = a(1)_{n\geq 0} + b(n)_{n\geq 0}$. Les suites $(1)_{n\geq 0}$ $(n)_{n\geq 0}$ sont bien arithmétiques de raison respective 0 et 1. **Par définition :**

$$F = \mathrm{Vect}\Big((1)_{n\geq 0}; (n)_{n\geq 0}\Big).$$

Par propriété, F est un sous espace vectoriel de E et une famille génératrice est $\Big((1)_{n\geq 0}; (n)_{n\geq 0}\Big)$.

On montre que cette famille est libre. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda(1)_{n\geq 0} + \mu(n)_{n\geq 0} = (0)_{n\geq 0}$. En particulier, pour $n = 0$, on obtient $\lambda 1 + \mu \times 0 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$, puis pour $n = 1$, $\lambda + \mu = 0 \Leftrightarrow \mu = 0$.

Cette famille est génératrice et libre, c'est donc une base de l'ensemble des suites arithmétiques. Cet ensemble est donc un espace vectoriel de dimension 2.

Correction de l'exercice 14 :

(Q 1) $\dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) \geq 5 + 8 - 12 \geq 1$.

(Q 2) $F \cap G \subset F$ donc $\dim(F \cap G) \leq 5$. Si $\dim(F \cap G) = 5$ alors F est un sous-espace vectoriel de F de même dimension que F. Par conséquent : $F \cap G = F$. On en déduit que $F \subset G$. En effet, si $x \in F$, alors $x \in F \cap G \in G$ car $F \cap G \subset G$. Contradiction. Par conséquent : $\dim(F \cap G) < 5 \Leftrightarrow \dim(F \cap G) \leq 4$, la dimension d'un espace vectoriel étant un entier naturel.

Correction de l'exercice 15 :

(Q 1) $f_1 = (1, 0, 1, 0)$ et $f_2(0, 1, 0, 1)$ sont non colinéaires donc linéairement indépendants et appartiennent tous deux à F.

Avec $z = 0$ et $t = 1$, nous obtenons : $x = 2$ et $y = 3$, donc le vecteur $g_1 = (2, 3, 0, 1)$. Avec $z = 1$ et $t = 0$, nous obtenons $x = 1$ et $y = 2$ donc le vecteur $g_2 = (1, 2, 1, 0)$. Ces deux-derniers sont de la même façon clairement linéairement indépendants.

F et G étant des sous-espaces vectoriels, on en déduit : $\mathrm{Vect}(f_1, f_2) \subset F$ et $\mathrm{Vect}(g_1, g_2) \subset G$. Les vecteurs f_1 et f_2 étant linéairement indépendants, ces derniers sont de rang 2 donc $\dim(\mathrm{Vect}(f_1, f_2)) = 2$. Par conséquent : $\dim -F) \geq 2$. De la même façon, $\dim(G) \geq 2$.

(Q 2)
- $\{\overrightarrow{O}_{\mathbb{R}^4}\} \subset G \cap G$ car $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de R^4.
- Montrons que $F \cap G \subset \{\overrightarrow{O}_{\mathbb{R}^4}\}$. Soit $(x, y, z, t) \in F \cap G$. Le système homogène associé aux quatres équations a pour matrice augmentée :
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim_{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
On en déduit un système homogène de rang maximal donc ayant $x = y = z = t = 0$ pour unique solution. Nous avons donc montré : $F \cap G \subset \{\overrightarrow{O}_{\mathbb{R}^4}\}$.

(Q 3) On en déduit : $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) \geq 4$. Or $F + G \subset \mathbb{R}^4$ donc $\dim(F + G) \leq 4$. Par double inégalité, $\dim(F + G) = 4$. Ainsi, $\dim(F + G) = \dim(\mathbb{R}^4)$ et $\dim(F \cap G) = 0$ donc $F \oplus G = \mathbb{R}^4$.

Correction de l'exercice 17 :

(Q 1) La matrice nulle est par définition triangulaire supérieure et une combinaison de matrices triangulaires supérieures stricte est triangulaire supérieure stricte. On en déduit que $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On procède de la même façon avec $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{R})$.

(Q 2) La famille des matrices élémentaires E_{ij} (par exemple dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$) avec $i < j$ est clairement une famille génératrice. Cette dernière est également libre en tant que sous-famille de la base canonique usuelle. Par conséquent : $\dim(\mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})) = \text{Card}\{(i,j) \in [\![1;\ n]\!]^2 / i < j\} = \sum_{j=2}^{n}(j-1) = \sum_{j=1}^{n-1} j = \frac{n(n-1)}{2}$.

On procède de la même façon pour les triangulaires inférieures, en considérant E_{ij} avec $i \geq j$. On en déduit :

$\dim(\mathcal{T}_n^-(\mathbb{R})) = \text{Card}\{(i,j) \in [\![1;\ n]\!]^2 / j \leq i\} = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

(Q 3) Si $M = (a_{ij}) \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R}) \cap \mathcal{T}_n^-(\mathbb{R})$, alors : $a_{ii} = 0$, $a_{ij} = 0$ pour $i > j$ et $a_{ij} = 0$ pour $i < j$. Par conséquent quels que soient i et j, $a_{ij} = 0$, donc $M = O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))}$. Ainsi, $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{R}) \cap \mathcal{T}_n^-(\mathbb{R}) \subset \{O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))}\}$. L'inclusion réciproque étant évidente car un sous-espace vectoriel (ici $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{R}) \cap \mathcal{T}_n^-(\mathbb{R})$) a toujours le vecteur nul comme élément, on en déduit le résultat.

(Q 4) D'après la question précédente,

$\dim\left(\mathcal{T}_n^+(\mathbb{R}) + \mathcal{T}_n^-(\mathbb{R})\right) = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = n^2$

(Q 5) Nous avons donc $\dim\left(\mathcal{T}_n^+(\mathbb{R}) + \mathcal{T}_n^-(\mathbb{R})\right) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ et $\dim(\mathcal{T}_n^+(\mathbb{R}) \cap \mathcal{T}_n^-(\mathbb{R})) = 0$ donc : $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{T}_n^-(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Correction de l'exercice 18 :

1.
   - Nous avons : $O_n J = J O_n = O_n$ donc $O_n \in C(J)$.
   - Soient M_1 et M_2 tels que : $JM_1 = M_1 J$ et $M_2 J = JM_2$. Alors : $J(M_1 + \lambda M_2) = JM_1 + \lambda JM_2 = M_1 J + \lambda M_2 J = (M_1 + \lambda M_2)J$ donc : $M_1 + \lambda M_2 \in C(J)$.

   Ainsi, $C(J)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Cherchons une famille génératrice de $C(J)$. On pose donc $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ h & i & j \end{pmatrix}$. Alors, par calcul matriciel,

   $JM = MJ \Leftrightarrow \begin{cases} i = e = a \\ g = f = b \\ h = d = c \end{cases}$

   Ainsi, nous avons :

   $$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} = aI_3 + b\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=J} + c\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=J^2}.$$

   On en déduit : $M \in C(J) \Leftrightarrow M \in \text{Vect}(I_3, J, J^2)$. La famille (I_3, J, J^2) est donc une famille génératrice de $C(J)$. Elle est de plus libre car : $a + bJ + cJ^2 = O_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b\,b & c & a \end{pmatrix} = O_3 \Leftrightarrow a = b = c = 0$.

   C'est donc une base de $C(J)$, ce qui prouve que $C(J)$ est de dimension 3.

2. (a) Si $X^2 = J$, alors : $JX = X^2 X = X^3$ et $XJ = XX^2 = X^3$ donc : $XJ = JX$ c'est à dire : $X \in C(J)$. On déduit de la question précédente l'écriture : $X = aI_3 + bJ + cJ^2$.

   (b) En particulier, $X^2 = a^2 I_3 + b^2 J^2 + c^2 J^4 + 2abJ + 2bcJ^3 + 2acJ^2$. Mais : $J^3 = I_3$ et $J^4 = J$, donc : $X^2 = (a^2 + 2bc)I_3 + (c^2 + 2ab)J + (b^2 + 2ac)J^2$. Puisque $X^2 = J$ et par unicité de la décomposition dans une base, nous en déduisons le système : $(*) \begin{cases} a^2 + 2bc = 0 \\ c^2 + 2ab = 1 \\ b^2 + 2ac = 0 \end{cases}$

   En sommant les trois lignes de (*), nous obtenons : $(a+b+c)^2$, d'où les deux cas : $a+b+c = 1$ ou $a + b + c = -1$.

   (c) Si $a + b + c = 1$, alors $c = 1 - a - b$ et donc : $a^2 + 2bc = 0 \Leftrightarrow a^2 + 2b - 2ab - 2b^2 = 0$ (1). De la même façon $b^2 + 2ac = 0$ donne : $b^2 + 2a - 2a^2 - 2ab = 0$ (2).

   En faisant (1)-(2) et en factorisant par $a-b$, nous en déduisons : $(a - b)(a + b - 2/3) = 0$. Nous avons donc deux cas à traiter :

   — $a = b$. Alors : $a^2 + 2ac = 0$ et $c^2 + 2a^2 = 1$ d'où $a = b = 0, c = \pm 1$ ou $c = \pm\frac{1}{3}, a = b = -\frac{2}{3}$ comme solution.

   — Si $a+b = \frac{2}{3}$, alors $c = 1-(a+b) = -\frac{1}{3}$, donc a est solution de $a^2 + 2bc = 0$ ce qui donne le trinôme : $a^2 + \frac{2}{3}a - \frac{4}{9}$, on en déduit : $a = -1, b = c = -\frac{1}{3}, b = \frac{5}{3}$, ou $a = \frac{1}{2}, c = -\frac{1}{3}, b = \frac{1}{6}$.

   (d) Il nous reste à traiter la cas $a + b + c = -1$ de façon similaire : ici le système en a et b devient : $a^2 - 2b - 2ab - b^2 = 0$ (a), $b^2 - 2a - 2a^2 - 2ab = 0$ (b). Alors : (a)-(b) donne : $(a+b)(a-b-\frac{2}{3}) = 0$, ce qui mène encore à deux cas :

   — $a = -b$. Alors : $a^2 - 2ac = 0$ et $c^2 - 2a^2 = 1$ d'où $a = b = 0, c = \pm 1$ (déjà obtenu ci-dessus) ou $-3c^2 = 1$ ce qui ne donne pas de solution.

   — Si $a = b + \frac{2}{3}$, alors $c = -1 - a - b = -\frac{5}{3} - 2b$, donc b est solution de $b^2 + 2(b + 2/3)(-5/3 - 2b)$ ce qui donne le trinôme : $b^2 + 2b + \frac{20}{27}$. Les solutions obtenues sont au final : $b = -1 - \frac{\sqrt{21}}{3}, a = -\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{21}}{3}; c = \frac{1}{3} + 2\frac{\sqrt{21}}{3}$, ou $b = -1 + \frac{\sqrt{21}}{3}, a = -\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{21}}{3}; c = \frac{1}{3} - 2\frac{\sqrt{21}}{3}$

Correction de l'exercice 19 :

(Q 1) $\dim(F \cap H) = \dim(F) + \dim(H) - \dim(F+H) \geq n-1+n-1-n$ donc $\dim(F \cap H) \geq n-2$. De plus, $F \cap H \subset F$ donc $\dim(F \cap H) \leq n-1$. Si $\dim(F \cap H) = n-1$, alors $F \cap H$ est un sous-espace vectoriel de H de dimension maximale. Par conséquent, $F \cap H = H$. Alors : $H \subset F$. En effet, si $x \in H, alors x \in H \cap F$ donc $x \in F$ car $H \cap F \subset F$. F est donc un sous-espace vectoriel de H de même dimension que H $(n-1)$. On en déduit au final $F = H$ ce qui est contraire aux hypothèses. Ainsi, $\dim(F \cap H) < n-1 \Leftrightarrow \dim(F \cap H) = n-2$, la dimension étant un entier naturel.

(Q 2)
- $\Leftarrow$ Si $E = H \oplus \text{Vect}(u_0)$, alors $\dim(H) + \dim(\text{Vect}(u_0)) = n$ et donc : $\dim(H) = n - \dim(\text{Vect}(u_0))$. Or $H \neq E$, donc il existe $u_0 \neq \overrightarrow{O} \in H$ E, donc $\dim(\text{Vect}(u_0)) = 1$ ce qui entraîne $\dim(H) = n-1$ donc que h est un hyperplan de E.
- $\Rightarrow$ H est un hyperplan de E. Soit $u_0 \in E$ H. Alors nécessairement $u_0 \neq \overrightarrow{O}$ car $\overrightarrow{0} \in H$. Montrons que $H + \text{Vect}(u_0) = E$. D'une part, nous avons : $\dim(H) = n-1$ par hypothèse et $\dim(\text{Vect}(u_0)) = 1$, donc : $\dim(H) + \dim(\text{Vect}(u_0)) = \dim(E)$.
  D'autre part, si $x \in \text{Vect}(u_0) \cap H$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda u_0$ car $x \in \text{Vect}(u_0)$. De plus, $x = \lambda u_0 \in F$. Si $\lambda \neq 0$, alors H étant un sous-espace vectoriel, $u_0 = \dfrac{1}{\lambda} x \in H$. Contradiction car $u_O \in E \backslash H$ par hypothèse. Par conséquent : $\lambda = 0$ donc $x = \lambda u_0 = 0$. Au final, $\text{Vect}(u_0) \cap H \subset \{0\}$. L'autre inclusion est évidente car un sous-espace vectoriel (ici $\text{Vect}(u_0) \cap H$ a toujours le vecteur nul comme élément). Par conséquent $\text{Vect}(u_0) \cap H = \{O\}$.
  Finalement $\dim(H) + \dim(\text{Vect}(u_0)) = n$ et $\text{Vect}(u_0) \cap H = \{0\}$ donc : $F \oplus \text{Vect}(u_0) = E$, et ce pour tout $u_0 \in E \setminus H$.

Correction de l'exercice 20 :

(Q 1) Cette famille $(I_n, M, M^2, ..., M^{n^2})$ est de cardinal n^2+1 et $\mathcal{M}_n$ est de dimension n^2. Or toutes les familles libres ont au plus n^2 vecteurs. Ainsi, cette famille est liée.

(Q 2) Par définition, il existe $\lambda_0; \cdots; \lambda_{n^2}$ non tous nuls tels que

$$\lambda_0 I_n + \cdots + \lambda_{n^2} M^{n^2} = 0_{nn}$$

On pose $P(X) = \lambda_0 + \cdots \lambda_{n^2} X^{n^2}$ et on obtient $P(M) = 0_{nn}$.

(Q 3) Par le théorème fondamental de l'algèbre, on sait que P se factorise par un produit de facteurs irréductibles :

$$P(X) = \lambda_k \prod_{i=1}^{k} (X - \mu_i), \lambda_k \neq 0$$

Supposons alors que pour tout $\mu \in \mathbb{C}$, $M - \mu I_n$ est inversible. On remarque alors que $P(M) = 0_{nn} \Rightarrow \lambda_k (M - \mu_1 I_n) \cdots (M - \mu I_k) = 0_{nn} \Rightarrow (M - \mu_1 I_n) = 0_{nn}$
en multipliant à droite par $(M - \mu_k I_n)^{-1} \cdots (M - \mu_2 I_n)^{-1}$. Ceci est absurde et on en déduit qu'il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $M - \mu I_n$ n'est pas inversible.

(Q 4) C'est une conséquence du fait de la non inversibilité de la matrice $M - \mu I_n$. Il existe $X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{C})$ tel que $(M - \mu I_n)X = 0_{n1} \Leftrightarrow MX = \mu X$.

Correction de l'exercice 21 :

1. Nous avons une famille de degrés échelonnés de polynômes non nuls. Par propriété, c'est donc une famille libre de $\mathbb{R}_3[X]$. De plus, elle est constituée de quatre vecteurs de $\mathbb{R}_3[X]$ est de dimension 4. Par théorème, cette famille est donc une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Cette fois ci, elle n'est pas de degrés échelonnés. On remarque que $P_3 = P_0 - P_1 + P_2$. Cette famille est donc liée et ne peut donc pas être une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. Cette famille est constituée seulement de 3 vecteurs et $\mathbb{R}_3[X]$ est de dimension 4. Par conséquent, cela ne peut pas être une base de cet espace. En revanche, c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (non demandé ici) : Soit $\lambda, \mu, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda P_0 + \mu P_1 + \gamma P_2 = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$. On substitue successivement les valeurs $1, 2, 0$ et on obtient le système linéaire :

$$\begin{cases} \mu(-1) &= 0 \\ 2\gamma &= 0 \\ 2\lambda &= 0 \end{cases}$$

Cette famille est donc libre. Elle est constituée de trois vecteurs et $\mathbb{R}_2[X]$ est de dimension 3. Par propriété, c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Correction de l'exercice 22 :

1.
- $F \subset \mathbb{R}_n[X]$.
- Si O est le polynôme nul, alors : $O(X+1) + 0(X-1) - 2O(X) = 0$ donc $O \in F$.
- Soit $(P, Q) \in F^2, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors $R = \mu P + \lambda Q$ est tel que : $R(X+1) + R(X-1) - 2R(X) = \mu\Big(P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)\Big) + \lambda(Q(X+1) + Q(X-1) - 2Q(X)) = 0 + \lambda 0 = 0$ donc $R \in F$.

Les trois points ci-dessus montrent que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.

- $H \subset \mathbb{R}_n[X]$.
- Si O est le polynôme nul, alors : $O(1) = 0$ et $O(-1) = 0$ donc $O \in H$.
- Soit $(P, Q) \in H^2, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors $R = \mu P + \lambda Q$ est tel que : $R(1) = \mu P(1) + \lambda(Q(1) = \mu \times 0 + \lambda \times 0 = 0$. De la même façon, nous obtenons $R(-1) = 0$, donc $R \in H$.

Les trois points ci-dessus montrent que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.

Enfin, si l'on note $P_1 = X$, alors $P_1(X+1)+P_1(X-1) - 2P_2(X) = X+1+X--2X = 0$. De même, si $P_2 = 1$, alors $P_2(X+1) = 1$, $P_2(X-1) = 1$ et $P_2(X) = 1$, d'où $P_2(X+1)+P_2(X-1)-2P(X) = 0$. Ainsi, $P_1 \in F$, $P_2 \in F$ donc, F étant un sous-espace vectoriel, $\mathrm{Vect}(P_1, P_2) \subset F$ ce qu'il fallait démontrer.

2. • Si $P \in F \cap H$, alors : $P(1) = P(-1) = 0$ et $P(X+1)+P(X-1)-2P(X) = 0$. En substituant 0 à l'indéterminée X, nous obtenons :
$P(0) = \dfrac{P(-1)+P(1)}{2} = 0$.
Alors : $P(1) = -P(0) + 2P(-1) = 0$. Montrons alors par récurrence double que la propriété $\mathcal{P}(n)$ « P(n)=0 »est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   - $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies d'après ci-dessus.
   - Si, pour un certain n fixé, $P(n) = 0$ et $P(n+1) = 0$, alors : $P(n+2) = -P(n+1)+2P(n) = 0$.

   D'où le résultat par récurrence.
   P étant un polynôme et le polynôme nul étant le seul polynôme ayant une infinité de racines, on en déduit que $P = 0$. Ceci prouve : $F \cap H \subset \{0\}$.
   - L'autre inclusion est évidente car $F \cap H$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.

   D'où finalement; $\boxed{F \cap H = \{0\}.}$
3. Pour $k \in [\![0;\ n-2]\!]$, $P_k = X^k(X^2-1)$ s'annule en 1 et -1. H étant un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$, on en déduit : $\mathrm{Vect}((P_k)_{k\in[\![0;\ n-2]\!]} \subset H$.
4. La famille P_k est de degré échelonnés non nuls, donc libre. On en déduit $\dim(\mathrm{Vect}((P_k)_{k\in[\![0;\ n-2]\!]}) = n-1$ et donc $\dim(H) \geq n-1$ d'après ci-dessus.
   De la même façon, l'inclusion : $\mathrm{Vect}(1, X) \subset F$ assure que $\dim(F) \geq 2$.
   Au final : $\dim(F)+\dim(H) \geq n+1$. Or $F \cap H = \{0\}$ donc par la formule de GRASSMANN
$$\dim(F \cap H) = \dim(F) + \dim(H) \geq n+1$$
   D'autre part : $F + H \subset \mathbb{R}_n[X]$, donc : $\dim(F+H) \leq n+1$. Par conséquent : $\dim(F+H) = n+1$. Finalement : $\left| \begin{array}{l} F \cap H = \{0\} \\ \dim(F+H) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) \end{array} \right.$. Ce qui prouve que F et H sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_n[X]$.
5. Nous savons que $\mathrm{Vect}(1, X) \subset F$. De plus : $n+1 = \dim(F+H) = \dim(F) + \dim(H)$ donc : $\dim(F) = \dim(F+H) - \dim(H) \leq n+1-(n-1)$ car $n+1 \leq \dim(H)$ d'après ci-dessus. Ainsi : $\dim(F) \leq 2$ mais $2 \leq \dim(F)$ d'après précédemment. Bref, $\dim(F) = \dim(\mathrm{Vect}(1, X))$. Or : $\mathrm{Vect}(1, X) \subset F$, donc nécessairement : $\boxed{F = \mathrm{Vect}(1, X).}$

Correction de l'exercice 23 :

1. On montre les trois points.
   (a) $E \subset \mathbb{K}_n[X]$.
   (b) $0_{\mathbb{K}_n[X]} \in E$.
   (c) Soit $P, Q \in E, \lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors $\Big(\lambda P+\mu Q\Big)(\alpha) = \lambda P(\alpha) + \mu Q(\alpha) = 0$. Ainsi, $\lambda P + \mu Q \in E$.

   Par définition, E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{K}_n[X]$.
2. Par la formule de Taylor, $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k$.
$$P \in E \Leftrightarrow P = 0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} \underbrace{(X-\alpha)^k}_{\in E}$$
   Nous avons donc montré que $\Big((X-\alpha); \cdots; (X-\alpha)^n\Big)$ est une famille génératrice de E. De plus, cette famille est libre en tant que famille de polynômes non nuls de degrés échelonnés. Nous avons donc montré que cette famille est une base de E.

Correction de l'exercice 24 :

(Q 1) Soit $i \in \{1; \cdots; n\}$. Alors, par la formule sur le degré d'un produit, on sait que $\deg(L_i) = n-1$. Les racines de L_i sont $\{t_k; k \in \{1; \cdots; n\} - \{i\}\}$. Puis, en substituant X par t_i, on a :
$$L_i(t_i) = \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} \frac{t_i - t_k}{t_i - t_k} = \boxed{1}$$

(Q 2) POUR MONTRER QUE DEUX POLYNOMES SONT EGAUX, ON PEUT MONTRER QUE LE NOMBRE DE LEURS RACINES EST SUPERIEUR STRICTEMENT A LEUR DEGRE.
On pose donc $Q = P - \sum_{i=1}^{n} P(t_i)L_i$.

Soit $k \in \{1; \cdots; n\}$. On substitue t_k à l'indéterminée.
$$Q(t_k) = P(t_k) - \sum_{i=1}^{n} P(t_i)L_i(t_k)$$
Or $L_i(t_k)$ est nul lorsque $i \neq k$, sinon il est égal à 1. La somme se réduit donc à $P(t_k)$. Nous obtenons donc $Q(t_k) = 0$. Le polynôme Q a donc au moins n racines.

De plus :
$$deg(Q) \leq \max(deg(P); deg(\sum_{i=1}^{n} P(t_i)L_i) < n.$$
Par propriété, Q est donc le polynôme nul et nous avons montré que $P = \sum_{i=1}^{n} P(t_i)L_i$.

(Q 3) La famille $(L_1, \ldots, L_n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ par la question précédente. Elle est constituée de n vecteurs et $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est de dimension n. Par théorème, cette famille est donc une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

(Q 4) Soient P et Q deux polynômes tels que : $\forall k \in [\![1;\ n]\!]$ $P(t_k) = Q(t_k) = T_k$.

Alors, d'après la question 2, $P = \sum_{i=1}^{n} T_i L_i$ car $T_i = P(t_i)$. Mais $P(t_i) = Q(t_i)$ par hypothèse, donc :
$P = \sum_{i=1}^{n} Q(t_i) L_i$. D'autre part, toujours d'après la question 2, $Q = \sum_{i=1}^{n} Q(t_i) L_i$. Par conséquent : $P = Q$ ce qui prouve l'unicité d'un polynôme P tel que : $\forall k \in [\![1;\ n]\!]\ P(t_k) = T_k$.

Pour ce qui est de l'existence, en posant $P = \sum_{i=1}^{n} P(t_i) L_i$, on obtient bien un polynôme qui vérifie : $\forall k \in [\![1;\ n]\!]\ P(t_k) = T_k$ d'après ci-dessus.