TD 21

Développements limités

LES INCONTOURNABLES

Relation de négligeabilité

Exercice 1 : Classez les suites dont les termes généraux sont les suivants dans l'ordre de négligeabilité :

(Q 1) $\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{\ln n}{n}, \frac{\ln n}{n^2}, \frac{1}{n \ln n}$

(Q 2) $n, n^2, n \ln n, \sqrt{n} \ln n, \frac{n^2}{\ln n}$

Apprendre à calculer un développement limité en 0

Exercice 2 : [corrigé] Donner les développements limités en 0 dont l'ordre est précisé

(a) $DL_4(0)$ de $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$;

(b) $DL_4(0)$ de $f(x) = \ln(1+x) - (1+x)^2$;

(c) $DL_4(0)$ de $f(x) = \sqrt{x+2}$;

(d) $DL_4(0)$ de $f(x) = \left(\dfrac{x}{1-x}\right)^3$;

(e) $DL_4(0)$ de $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}\right)$;

(f) $DL_4(0)$ de $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x+2)}$;

(g) $DL_3(0)$ de $f(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{1+x}}$;

(h) $DL_6(0)$ de $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$;

(i) $DL_{10}(0)$ de $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2/2}\, dt$.

Exercice 3 : [corrigé] Calculer les développements limités en 0 suivants dont on indique dans l'ordre, l'ordre de ce développement limité et enfin la fonction :

(a) $3, \quad x \to (1 + \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})^{-1}$;

(b) $6, x \to \ln(\cos(x))$;

(c) $4, \quad x \to \sqrt{\cos(x)}$;

(d) $4, \quad x \to \dfrac{1}{4 + \sin(x) - 3\cos(x)}$;

Apprendre à calculer un développement limité en $a \neq 0$

Exercice 4 : [corrigé] Déterminer les développements limités des fonctions f suivantes :

(a) $DL_3(2)$ avec $f(x) = e^x$;

(b) $DL_3(2)$ avec $f(x) = \sqrt{x}$;

(c) $DL_3(\pi/3)$ avec $f(x) = \sin(x)$.

Un développement limité à l'ordre n

Exercice 5 : [corrigé] On pose : $f(x) = \dfrac{e^x}{x+1}$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ et vérifier que f est solution de l'équation différentielle : $(x+1)y' + y = e^x$.
2. Justifier que f admet un développement limité n'importe quel ordre en 0 et calculer a_0. On note : $P_{n+1}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k$ la partie principale du développement limité de f en 0 et on considère $n \in \mathbb{N}^*$.
3. (a) Exprimer en fonction de a_k et a_{k+1} la partie principale du développement limité à l'ordre n en 0 de $(x+1)f'(x)$.

   (b) Déduire des deux questions précédentes que $\forall k \in [\![0;\ n]\!],\ a_{k+1} + a_k = \dfrac{1}{(k+1)!}$.

   (c) Pour $k \geq 1$, exprimer simplement $\displaystyle\sum_{p=0}^{k-1} (-1)^p (a_{p+1} + a_p)$ en fonction de a_k et en déduire que $a_k = \displaystyle\sum_{p=0}^{k} \frac{(-1)^p}{(k-p)!}$.

POUR S'ENTRAÎNER

Relation de négligeabilité

Exercice 6 : [corrigé] Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Trouver l'ensemble des valeurs de α tels que

$$\frac{\ln(n)}{n} = o(\frac{1}{n^\alpha}); \frac{1}{n^\alpha} = o(\frac{\ln(n)}{n^2})$$

Un développement limité curieux

Exercice 7 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x}\right), x > 0$.

(Q 1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^n)$

(Q 2) f admet-elle un développement limité en 0 ? Si oui, déterminer sa partie régulière.

Apprendre à calculer un développement limité en 0

Exercice 8 : [corrigé] Donner les développements limités en 0 dont l'ordre est précisé

(a) $DL_4(0)$ de $f(x) = \sin(x + \pi/7)$;

(b) $DL_4(0)$ de $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$;

(c) $DL_7(0)$ de $f(x) = (1 - \cos(x))(1 - \mathrm{ch}(x))$;

(d) $DL_4(0)$ de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$;

(e) $DL_4(0)$ de $f(x) = x^2 - (\mathrm{Arcsin} x)^2$;

(f) $DL_{10}(0)$ de $f(x) = ((\mathrm{ch} x - \cos x)(\mathrm{sh} x - \sin x))^2$;

(g) $DL_9(0)$ de $f(x) = (\sin(x))^7$.

Exercice 9 : [corrigé] Calculer les développements limités en 0 suivants dont on indique dans l'ordre, l'ordre de ce développement limité et enfin la fonction :

(a) $4, \quad x \to \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$;

(b) $3, \quad x \to \ln\left(1 + \frac{x^2}{1+x}\right)$;

(c) $3, \quad x \to (1+x)^{1/x}$.

Apprendre à calculer un développement limité en $a \neq 0$

Exercice 10 : [corrigé] Déterminer les développements limités des fonctions f suivantes :

(a) $DL_2(1)$ avec $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$;

(b) $DL_5(1)$ avec $f(x) = \mathrm{Arctan}(x)$;

Régularité et dévelopement limité

Exercice 11 : On pose f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 1 + x^2 + x^{5/2}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On note encore f ce prolongement.
2. Montrer que f admet un $DL_2(0)$ que l'on explicitera.
3. Montrer que f est dérivable en 0 mais n'est pas deux fois dérivable en 0.

Quelques développements limité à l'ordre n en 0

Exercice 12 : [corrigé] On note f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2}{e^x + 1}$.

1. (a) Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
   (b) On pose : $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$. En utilisant la formule de Leibniz et $f(x) \times (e^x + 1) = 2$, montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{(n-k)!}.$$
   (c) Calculer a_0, a_1, a_2, a_3, a_4.
2. (a) Justifier que f admet un développement limité à n'importe quel ordre en 0 et donner le développement limité à l'ordre 4 en 0.
   (b) Écrire un programme en Python d'argument n et retournant la liste des $n+1$ termes de la partie principale du développement limité de f en 0. (*On pourra utiliser la commande factorial présente dans le module math*)

Quelques applications des développements limités

Exercice 13 : [corrigé] On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{e^{(n+1)x} - 1}{e^x - 1}$.

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de f.
2. Pour $x \in \mathbb{R}^*$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{kx}$ et en déduire une autre expression du développement limité à l'ordre 3 en 0 de f.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3$.

Exercice 14 : [corrigé] On pose : $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

1. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} - \{1\}$ et calculer $f'(x)$, ainsi que $f^{(3)}(x)$.
2. En déduire les développements limités à l'ordre n en 0 de $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ et de $\dfrac{1}{(1-x)^4}$.
3. On note P_n la partie principale du développement limité de f' à l'ordre n en 0.
   (a) Rappeler l'expression du produit de deux polynômes P et Q.
   (b) En déduire, en remarquant que $\dfrac{1}{(1-x)^4} = f'(x) \times f'(x)$, une autre expression du développement limité à l'ordre n en 0 de $\dfrac{1}{(1-x)^4}$.
   (c) En déduire une expression simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.

Indications

Correction de l'exercice 2 :

(a) $f(x) = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o_0(x^4)$;
(b) $f(x) = -1 - x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o_0(x^4)$;
(c) $f(x) = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}x - \frac{\sqrt{2}}{32}x^2 + \frac{\sqrt{2}}{128}x^3 - \frac{5\sqrt{2}}{2048}x^4 + o_0(x^4)$;
(d) $f(x) = x^3 + 3x^4 + o_O(x^4)$:
(e) $f(x) = -x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o_0(x^4)$;
(f) $f(x) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x - \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 - \frac{11}{32}x^4 + o_0(x^4)$;
(g) $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{48}x^3 + o_0(x^3)$;
(h) $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{5}x^4 - \frac{1}{6}x^5 + \frac{1}{7}x^6 + o_0(x^6)$;
(i) $f(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{40}x^5 - \frac{1}{56.3!}x^7 + \frac{1}{144.4!}x^9 + o_0(x^{10})$.

Correction de l'exercice 3 :

(a) $f(x) = \frac{1}{3} + \frac{x^2}{36} + o_0(x^3)$;
(b) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \dfrac{1}{45}x^6 + o_0(x^6)$;
(c) $f(x) = 1 - \frac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{96}x^4 + o_0(x^4)$;
(d) $f(x) = 1 - x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{13}{6}x^3 - \dfrac{35}{24}x^4 + o_0(x^4)$;

Correction de l'exercice 4 :

(a) $f(x) = e^2 + e^2(x-2) + \frac{1}{2}e^2(x-2)^2 + \frac{1}{6}e^2(x-2)^3 + o_2((x-2)^3)$;
(b) $f(x) = \sqrt{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{4}(x-2) - \dfrac{\sqrt{2}}{32}(x-2)^2 + \dfrac{\sqrt{2}}{128}(x-2)^3 + o_2((x-2)^3)$;
(c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{1}{12}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + o_{\frac{\pi}{3}}\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3\right)$.

Correction de l'exercice 5 :

1. Par opérations usuelles sur les fonctions dérivables, f est dérivable sur $D = \mathbb{R} - \{-1\}$ et pour tout $x \in D$,
$f'(x) = \dfrac{e^x(x+1) - e^x}{(x+1)^2}$. Ainsi, $(x+1)f'(x) = e^x - \dfrac{e^x}{x+1}$, d'où : $(x+1)f'(x) + f(x) = e^x$.
2. exp admet un développement limité à n'importe quel ordre en 0 et $x \mapsto x+1$ aussi et ne s'annule par ailleurs pas en 0. Par quotient, f admet un développement limité à n'importe quel ordre en 0 et on note :
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k + o_0(x^n).$$
Nous savons par ailleurs que $a_0 = f(0) = 1$.
3. (a) $(x+1)f'(x) = xf'(x) + f'(x)$. Or f étant dérivable et f' admettant un développement limité par opérations usuelles, nous savons par intégration d'un développement limité que :
$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n}(k+1)a_{k+1}x^k + o_0(x^n).$$
Pour obtenir le développement limité à l'ordre n de $xf'(x)$, on utilise le développement limité à l'ordre $n-1$ de f' donc :
$xf'(x) = x\left(\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)a_k x^k + o_0(x^{n-1})\right) = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)a_{k+1}x^{k+1} + o_0(x^n)$. En faisant un glissement d'indice au niveau de la partie principale, nous aboutissons à :
$xf'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^k + o_0(x^n) = \sum_{k=0}^{n} k a_k x^k + o_0(x^n)$.
Par somme :
$$(x+1)f'(x) = \sum_{k=0}^{n}((k+1)a_{k+1} + k a_k)x^k.$$
(b) Puisque : $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o_0(x^n)$
On déduit de la question précédente le développement limité à l'ordre n en 0 de :
$(x+1)f'(x) + f(x) = \sum_{k=0}^{n}((k+1)a_{k+1} + k a_k + a_k)x^k + o_0(x^n) = \sum_{k=0}^{n}(k+1)(a_{k+1} + a_k)x^k + o_0(x^n)$.
D'autre part :
$e^x = \sum_{k=0}^{n}\dfrac{x^k}{k!} + o_0(x^n)$. Or : $(x+1)f'(x) + f(x) = e^x$, donc par unicité du développement limité à l'ordre n d'une fonction, on en déduit :
$\forall k \in [\![0;\ n]\!] (k+1)(a_{k+1} + a_k) = \dfrac{1}{k!}$, donc :
$\forall k \in [\![0;\ n]\!] (a_{k+1} + a_k) = \dfrac{1}{(k+1)!}$ car $(k+1)k! = (k+1)!$.
(c) Par télescopage, pour $k \geq 1$, $\sum_{p=0}^{k-1}(-1)^p(a_{p+1} + a_p) = \sum_{p=0}^{k-1}((-1)^p a_p - (-1)^p a_{p+1}) = a_0 - (-1)^k a_k$.
Or, puisque : $a_{p+1} + a_p = \dfrac{1}{(p+1)!}$, nous avons également :
$\sum_{p=0}^{k-1}(-1)^p(a_{p+1} + a_p) = \sum_{p=0}^{k-1}\dfrac{(-1)^p}{(p+1)!} = \sum_{p=1}^{k}\dfrac{(-1)^{p-1}}{p!}$.
Ainsi :
$a_0 - (-1)^k a_k = \sum_{p=1}^{k}\dfrac{(-1)^{p-1}}{p!}$ c'est à dire :

$(-1)^k a_k = a_0 - \sum_{p=1}^{k} \frac{(-1)^{p-1}}{p!} = 1 + \sum_{p=1}^{k} \frac{(-1)^p}{p!} = \sum_{p=0}^{k} \frac{(-1)^p}{p!}$.

Au final :

$a_k = (-1)^k \sum_{p=0}^{k} \frac{(-1)^p}{p!}$. Pour finir : $\sum_{p=0}^{k} \frac{(-1)^p}{p!} = \sum_{p=0}^{k} \frac{(-1)^{k-p}}{(k-p)!}$ ce qui donne en multipliant par $(-1)^k$ et en constatant que : $(-1)^{-p} = (-1)^p$:

$a_k = \sum_{p=0}^{k} \frac{(-1)^p}{(k-p)!}$.

Correction de l'exercice 6 :

$$\frac{\ln(n)}{n} = o(\frac{1}{n^\alpha}) \Leftrightarrow \frac{\ln(n)/n}{1/n^\alpha} \to 0 \Leftrightarrow \frac{\ln(n)}{n^{1-\alpha}} \to 0 \Leftrightarrow 1-\alpha > 0$$

par croissances comparées.

$$\frac{1}{n^\alpha} = o(\frac{\ln(n)}{n^2}) \Leftrightarrow \frac{n^{2-\alpha}}{\ln(n)} \to 0 \Leftrightarrow 2-\alpha \leq 0$$

par croissances comparées.

Correction de l'exercice 8 :

(a) $f(x) = \sin(\pi/7) + \cos(\pi/7)x - \frac{\sin(\pi/7)}{2}x^2 - \frac{\cos(\pi/7)}{6}x^3 + \frac{\sin(\pi/7)}{24}x^4 + o_0(x^4)$;
(b) $f(x) = 2x + \frac{2}{3}x^2 + o_0(x^2)$;
(c) $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + o_0(x^7)$;
(d) $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{8}x^2 + \frac{3\sqrt{2}}{64}x^4 + o_0(x^4)$;
(e) $f(x) = -\frac{1}{3}x^4 + o_0(x^4)$;
(f) $f(x) = \frac{1}{9}x^{10} + o_0(x^{10})$;
(g) $f(x) = x^7 - \frac{7}{6}x^9 + o_0(x^9)$;

Correction de l'exercice 9 :

(a) $f(x) = -\frac{1}{6}x^2 - \frac{x^4}{180} + o_0(x^4)$;
(b) $f(x) = x^2 - x^3 + \frac{1}{2}x^4 + o_0(x^4)$;
(c) $f(x) = e - \frac{1}{2}ex + \frac{11}{24}ex^2 - \frac{7}{16}ex^3 + o_0(x^3)$.

Correction de l'exercice 10 :

(a) $f(x) = x - 1 - \frac{3}{2}(x-1)^2 + \frac{11}{6}(x-1)^3 + o_1((x-1)^3)$;
(b) $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{12}(x-1)^3 - \frac{1}{40}(x-1)^5 + o_1((x-1)^5)$;

Correction de l'exercice 12 :

1. (a) f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ par quotient de fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas.
   (b) On écrit : $f(x)(e^x+1) = 2$. Ainsi, si l'on pose $h(x) = e^x + 1$ et que l'on considère $n \in \mathbb{N}^*$, en utilisant la formule de Leibniz : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) h^{(n-k)}(x) = 0$. Or : Si $k = n$, $h^{(n-k)}(x) = h^{(0)}(x) = e^x + 1$ et si $k \neq n$, $h^{(n-k)}(x) = h^{(0)}(x) = e^x$. On coupe donc la somme en deux : $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} f^{(k)}(x)e^x + f^{(n)}(x)(e^x+1) = 0$. En évaluant cette expression en 0, nous obtenons ($a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$) : $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} k! a_k + 2n! a_n = 0$. En utilisant le fait que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!}(n-k)!$, il vient :
   $n! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{(n-k)!} + 2n! a_n = 0$ et donc en divisant par $n!$:
   $$\boxed{a_n = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{(n-k)!}.}$$
   (c) $a_0 = 1$, $a_1 = -\frac{1}{2}\frac{a_0}{1!} = -\frac{1}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{2}(\frac{a_0}{2!} + \frac{a_1}{1!}) = 0$,
   $a_3 = -\frac{1}{2}(\frac{a_0}{3!} + \frac{a_1}{2!} + \frac{a_2}{1!}) = \frac{1}{24}$,
   $a_4 = -\frac{1}{2}(\frac{a_0}{4!} + \frac{a_1}{3!} + \frac{a_2}{2!} + \frac{a_3}{1!}) = 0$.
2. (a) f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ donc admet un développement limité en 0 à n'importe quel ordre d'après la formule de Taylor-Young. De plus, toujours d'après la formule de Taylor-Young : $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + o_0(x^4) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{24}x^3 + o_0(x^4)$.
   (b)

Correction de l'exercice 13 :

1. Nous avons :
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(n+1)x + \frac{(n+1)^2}{2}x^2 + \frac{(n+1)^3}{6}x^3 + \frac{(n+1)^4}{24}x^4 + o_0(x^4)}{x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o_0(x^4)} \\ &= (n+1)\frac{1 + \frac{(n+1)}{2}x + \frac{(n+1)^2}{6}x^2 + \frac{(n+1)^3}{24}x^3 + o_0(x^3)}{1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + o_0(x^3)}. \end{aligned}$$
Or, $\frac{1}{1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + o_0(x^3)} = \frac{1}{1+u}$ avec $u = \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + o_0(x^3)$. Puisque u est bien proche de 0 lorsque x est proche de 0, nous pouvons utiliser le développement limité en 0 de $\frac{1}{1+u}$,

ce qui donne : $\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{24}x^3+o_0(x^3)} = 1-u+u^2-u^3+o_0(u^3)$, avec :

$$\begin{aligned} u^2 &= \tfrac{1}{4}x^2\left(1+\tfrac{1}{3}x+\tfrac{1}{12}x^2+o_0(x^2)\right)^2 \\ &= \tfrac{1}{4}x^2\left(1+\tfrac{2}{3}x+o_0(x)\right) \\ &= \tfrac{1}{4}x^2+\tfrac{1}{6}x^3+o_0(x^3) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} u^3 &= \tfrac{1}{8}x^3\left(1+\tfrac{1}{3}x+\tfrac{1}{12}x^2+o_0(x^2)\right)^3 \\ &= \tfrac{1}{8}x^3(1+o_0(1)) \\ &= \tfrac{1}{8}x^3+o_0(x^3). \end{aligned}$$

Au final :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{24}x^3+o_0(x^3)} \\ =\ & 1-\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{6}x^2-\tfrac{1}{24}x^3+\tfrac{1}{4}x^2+\tfrac{1}{6}x^3-\tfrac{1}{8}x^3+o_0(x^3) \\ =\ & 1-\tfrac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2+o_0(x^3) \end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned} & f(x) \\ = \ & (n+1)\left(1+\frac{(n+1)}{2}x+\frac{(n+1)^2}{6}x^2+\frac{(n+1)^3}{24}x^3+o_0(x^3)\right)\left(1-\tfrac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2+o_0(x^3)\right) \\ = \ & (n+1)\left(1-\tfrac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2+\frac{(n+1)}{2}x-\frac{n+1}{4}x^2+\frac{n+1}{24}x^3+\frac{(n+1)^2}{6}x^2-\frac{(n+1)^2}{12}x^3+\frac{(n+1)^3}{24}x^3+o_0 \right. \\ = \ & (n+1)\left(1+nx+\frac{1-3(n+1)+2(n+1)^2}{12}x^2+\frac{(n+1)-2(n+1)^2+(n+1)^3}{24}x^3+o_0(x^3)\right) \\ = \ & \boxed{(n+1)\left(1+\frac{n(2n+1)}{12}x+\frac{n(2n+1)}{12}x^2+\frac{n^2(n+1)}{24}x^3+o_0(x^3)\right)} \end{aligned}$$

2. $\forall x\in\mathbb{R}^*,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n}e^{kx}=\sum_{k=0}^{n}(e^x)^k=f(x)$. Or :

   $\forall k\in[\![0;\ n]\!];\ e^{kx}=1+kx+\dfrac{k^2x^2}{2}+\dfrac{k^3x^3}{6}+o_0(x^3)$, donc :

   $$\boxed{\sum_{k=0}^{n}e^{kx}=\sum_{k=0}^{n}1+\left(\sum_{k=0}^{n}k\right)x+\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n}k^2\right)x^2+\frac{1}{6}\left(\sum_{k=0}^{n}k^3\right)x^3+o_0(x^3).}$$

3. Par unicité du développement limité à l'ordre 3 d'une fonction en un point, on en déduit :

   $$\frac{1}{6}\sum_{k=0}^{n}k^3=\frac{(n+1)(n^2(n+1)^2)}{24}$$
   $$\Leftrightarrow \boxed{\sum_{k=0}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.}$$

Correction de l'exercice 14 :

1. Par quotient, f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}-\{1\}$ et :

   $\forall x\in\mathbb{R}-\{1\},\ f'(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2},\ f^{(3)}(x)=\dfrac{6}{(1-x)^4}$.

2. On sait que f admet un développement limité à l'ordre $n+1$ en 0 qui est :

   $f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}x^k+o_0(x^{n+1})$. De plus, f' admet un développment limité à l'ordre n par produit de fonctions. Par intégration d'un développement limité :

   $f'(x))=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)x^k+o_(x^n)$.

   Par ailleurs, toujours par le même principe d'intagrétion d'un développement limité, on sait que $f^{(3)}(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)(k+2)(k+3)x^k+o_0(x^n)$.

   Ceci nous donne donc une expression du développement limité de $\dfrac{6}{(1-x)^4}$, et donc :

   $$\frac{1}{(1-x)^4}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}x^k+o_0(x^n)$$

3. (a) Si $P=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}a_kX^k$ et $Q=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}b-kX^k$, alors :

   $PQ=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}c_kX^k$, avec $c_k=\displaystyle\sum_{p=0}^{k}a_pb_{k-p}$.

   (b) Par calcul algébrique : $\dfrac{1}{(1-x)^4}=f'(x)\times f'(x)$

   Or $f'(x)=P_n(x)+o_0(x^n)$. On sait donc que $f'(x)\times f'(x)=Q_n(x)+o_0(x^n)$ où Q_n correspond au polynôme $P_n\times P_n$ tronqué à l'ordre n.

   Ainsi, Puisque : $P_nP_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{k}(p+1)(k-p+1)x^k$.

   Par conséquent :

   $f'(x)f'(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sum_{p=0}^{k}(p+1)(k-p+1)x^k+o_0(x^n)$, ce qui en accord avec la remarque du début de la question fournit une expression du développement limité de $\dfrac{1}{(1-x)^4}$:

   $\dfrac{1}{(1-x)^4}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sum_{p=0}^{k}(p+1)(k-p+1)x^k+o_0(x^n)$.

   (c) Les questions précédentes donnent deux expressions du développement limité à l'ordre n en 0 de $\dfrac{1}{(1-x)^4}$. Par unicité :

   $\displaystyle\sum_{p=0}^{k}(p+1)(k-p+1)=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}$

   et ce pour tout $k\in[\![0;\ n]\!]$.

   En particulier, pour $k=n$: $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}(p+1)(n-p+1)=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$.

   Or : $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}(p+1)(n-p+1)=n\sum_{p=0}^{n}(p+1)-\sum_{p=0}^{n}(p+1)(p-1)=n\sum_{p=1}^{n+1}p-\sum_{p=0}^{n}(p^2-1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{2}-S_n+(n+1)$, où $S_n=\displaystyle\sum_{p=0}^{n}p^2$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n(n+1)(n+2)}{2}+(n+1)-\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} \\ &= \frac{n+1}{6}\left(3n^2+6n+6-(n+2)(n+3)\right) \\ &= \frac{n+1}{6}\left(2n^2+n\right)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆