TD 15

Dérivabilité et régularités d'ordres supérieurs

LES INCONTOURNABLES

- Études de régularités de fonctions -

Exercice 1 : [corrigé] Déterminer les valeurs de a, b et c pour que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ ax^2 + bx + c & \text{sinon} \end{cases}$ soit continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 2 : [corrigé] Montrer que $x \mapsto x^2 \ln(x)$ se prolonge en une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$. Le prolongement obtenu est-il deux fois dérivable en 0 ?

Exercice 3 : [corrigé] Soit $f : \begin{array}{rcl} [-1;1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x\mathrm{Arcsin}(1-x^2) \end{array}$.

(Q 1) Montrer que f est continue sur $[-1;1]$.

(Q 2) Montrer que f est de classe C^∞ sur $[-1;1] - \{0\}$.

(Q 3) Montrer que f est de classe C^1 sur $[-1;1]$.

- Utilisations des théorèmes classiques sur la dérivabilité -

Exercice 4 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et dont la dérivée ne s'annule pas. Montrer que f n'est pas périodique. On pourra raisonner par l'absurde et supposer que f est T périodique.

Exercice 5 : [corrigé] On pose : $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k^2}$.

1. Montrer que pour tout $a \geq 0$, $\dfrac{1}{1+(1+a)^2} \leq \arctan(a+1) - \arctan(a) \leq \dfrac{1}{1+a^2}$.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner un encadrement de sa limite ℓ.

- Calculs de dérivées n-ièmes-

Exercice 6 : [indications] [corrigé] Déterminer $f^{(n)}$ pour les fonctions f ci-dessous :

(a) $f(x) = xe^{-x}$; (b) $f(x) = x^2 e^x$; (c) $f(x) = e^x \ln(x)$.

Exercice 7 : [indications]

1. Pour $a \in \mathbb{R}^*$, justifier que la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{1}{x+a}$ est de classe C^∞ sur un ensemble D que l'on précisera et calculer $f^{(n)}(x)$ pour $x \in D$ et $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire une expression simple de la dérivée n-ème de la fonction d'expression : $\dfrac{1}{x^2-1}$.
3. Retrouver le résultat ci-dessus en appliquant la formule de Leibniz.

POUR S'ENTRAÎNER

- Études de régularités de fonctions -

Exercice 8 : [corrigé] Étudier la continuité et la dérivabilité sur leur domaine de définition des fonctions suivantes :

(Q 1) $f_1(x) = \text{Arcsin}(1 - x^2)$;

(Q 2) $f_2(x) = \text{Arcsin}\frac{2\sqrt{x}}{1+x}$;

(Q 3) $f_3(x) = \text{Arcos}(\frac{1}{\text{ch}(x)})$;

(Q 4) $f_4(x) = \cos\sqrt{x}$.

Exercice 9 : [corrigé] Étudier l'ensemble de définition, le prolongement par continuité de la fonction, et la dérivabilité de celui ci pour la fonction $x \mapsto x^x$.

Exercice 10 : [corrigé] On pose f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = 1 + x^2 + x^{5/2}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On note encore f ce prolongement.
2. Montrer que f est dérivable en 0 mais n'est pas deux fois dérivable en 0.

Exercice 11 : [corrigé] Déterminer les valeurs de a, b et c pour lesquelles la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^x \text{ si } x < 0 \\ ax^2 + bx + c \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. La fonction f est-elle trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 12 : [solutions] Étudier la classe des fonctions suivantes :

(Q 1) $f(x) = x^2\ln(x)$ si $x > 0$ et $f(x) = 0$ si $x \leq 0$

(Q 2) $n \in \mathbb{N}$ $g_n(x) = x^n$ si $x > 0$ et $g_n(x) = 0$ si $x \leq 0$

- Utilisations des théorèmes classiques sur la dérivabilité -

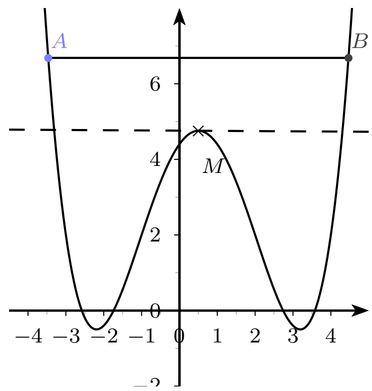
Exercice 13 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivables. Montrer que :
$f(a) = f'(a) = f''(a) = ... = f^{(n-1)}(a) = 0$ et $f(b) = 0 \Rightarrow \exists c \in]a, b[, f^{(n)}(c) = 0$

Exercice 14 : Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(t) = e^{x-t} - \left(1 + (x-t) + \frac{(x-t)^2}{2}\right) - A\frac{(x-t)^3}{6}$, avec $A \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer une condition sur A pour que φ vérifie les conditions du théorème de Rolle sur $[0;\ x]$. On suppose dans le suite que cette condition est vérifiée.
2. Vérifier que $\varphi(x) = \varphi'(x) = \varphi''(x) = 0$. En déduire l'existence de $c \in]0;\ x[$ tel que $\varphi^{(3)}(c) = 0$, puis : $A = e^{x-c}$.
3. À l'aide des deux questions précédentes, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\left|e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)\right| \leq \dfrac{x^3 e^x}{6}$.

Exercice 15 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivable, telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, montrer qu'alors $\exists c \in \mathbb{R}, f'(c) = 0$



Exercice 16 : . Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $g(0) = g(3) = 0$ et $g(1)g(2) < 0$. Montrer que g'' s'annule.

Exercice 17 :

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. Montrer que si $f' > 0$ alors f est injective.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que si f est injective alors f' ne s'annule pas et f est strictement monotone.

Exercice 18 : En appliquant l'inégalité des accroissements finis, montrer que

$$\forall x \geq 0; x \leq e^x - 1 \leq xe^x.$$

Exercice 19 : [corrigé] En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que

$$|(27\,001)^{1/3} - 30| \leq \frac{1}{2700}.$$

Exercice 20 : [corrigé] Soit $f : \begin{array}{ccc}]1;\ +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(\ln(x)) \end{array}$.

(Q 1) Soit $k \in \mathbb{N} - \{0; 1\}$. Montrer que

$$\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leq \ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln(k)) \leq \frac{1}{k\ln(k)}$$

(Q 2) En déduire que la suite de terme général : $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$ diverge.

Exercice 21 : [corrigé] Soit $u_0 \in \mathbb{R}$. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = \dfrac{e^{u_n}}{e^{u_n}+1}$.

(Q 1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ u_n \in [0, 1]$.

(Q 2) Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{e^\alpha}{e^\alpha+1} = \alpha$ et qu'on a $\alpha \in]0, 1[$.

(Q 3) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ |u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{4}|u_n - \alpha|$

(Q 4) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ |u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$

(Q 5) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

- Calculs de dérivées n-ièmes-

Exercice 22 : [corrigé] Calculer les dérivées successives des fonctions suivantes :

(Q 1) $f(x) = \cos^2 x$

(Q 2) $g(x) = \frac{1-x}{1+x}$

(Q 3) $h(x) = x(x-2)^p (p \in \mathbb{N})$.

Exercice 23 : Démontrer que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $\arctan^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$ où P_n est une fonction polynômiale. Donner une relation entre P_{n+1} et P_n.

Exercice 24 : [corrigé] On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = e^{-1/x^2}$.

1. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^*$, $f^{(n)}(x) = P_n\left(\dfrac{1}{x}\right) e^{-1/x^2}$, où P_n est une fonction polynômiale. En déduire $\lim\limits_{x \to 0} f^{(n)}(x)$.
3. On pose : $\mathcal{P}(n)$ « $f^{(n)}$ admet un prolongement de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ en posant : $f^{(n)}(0) = 0$ ». Montrer par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.
4. Montrer que f admet un prolongement de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

- Divers -

Exercice 25 : [corrigé] On cherche à déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}$, dérivables en 0 et telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = 2f(x)$.

1. Soit f une fonction vérifiant la relation ci-dessus.
   (a) Déterminer la valeur de $f(0)$.
   (b) Pour $x \neq 0$, on pose : $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$. Vérifier que g admet un prolongement par continuité sur $\mathbb{R}$ que l'on précisera et que l'on notera encore g.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ g(x) = g\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$. En déduire l'expression de f.
2. Étudier la réciproque.

Indications

Exercice 6 : (a) Formule de Leibniz car on sait calculer les dérivées n-èmes de chaque terme du produit. On obtient une expression très simple car les dérivées successives d'un polynômes d'annulent à partir d'un certain rang.

(b) Même chose qu'au (a).

(c) Meme chose qu'au (b).

Exercice 7 : Pour la seconde question, on pourra penser à faire une décomposition en éléments simples.

Solution de l'exercice 12 :

1. De classe C^1 sur $\mathbb{R}$ mais f' n'est pas dérivable en 0. En effet, $f'(x) = 2x\ln(x)+x$ si $x>0$, $f'(x)=0$ sinon. Vous faites le taux d'accroissement de f' en 0 et vous obtenez une limite à droite de 0 égale à $-\infty$.
2. La fonction g est $n-1$ fois dérivable (propriété du cours) et $g^{(n-1)}(x) = \frac{n!}{(n-[n-1])!}x^{n-[n-1]} = n!x$ si $x > 0$ et $g^{(n-1)}(x) = 0$ sinon. Et $g^{(n-1)}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Or $g^{(n-1)}$ n'est pas dérivable en 0 car elle est dérivable à droite, de nombre dérivé égal à $n!$, dérivable à gauche, de nombre dérivé égal à 0, ces deux nombres dérivés étant distincts. Donc, g est de classe C^{n-1}.

Correction de l'exercice 1 :

- Par opérations élémentaires sur les fonctions continues, f est continue (et même de classe C^∞) sur $\mathbb{R}_+^* - \{1\}$. Ainsi, f est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si f est continue en 1, c'est à dire $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$. Or $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = a+b+c$ et $f(0)=1$. On en déduit $\boxed{f \text{ continue sur } \mathbb{R} \text{ si et seulement si } a+b+c=1.}$
- On suppose maintenant $a+b+c=1$. Puisque f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^* - \{1\}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si f est dérivable en 1, c'est à dire : $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$.

  Or, f est continue sur $]0;\ 1]$, dérivable sur $]0;\ \ 1[$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = \dfrac{1}{2}$ puisque $\forall x \in,]0;\ 1[,\ f(x) = \sqrt{x}$ donc $\forall x \in,]0;\ 1[,\ f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. D'après le théorème de limite de la dérivée, $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \dfrac{1}{2}$.

  De même, f est continue sur $[1;\ +\infty[$, dérivable sur $]1;\ +\infty[$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = 2a+b$ puisque $\forall x \in, [1;\ +\infty[,\ f(x) =$ ax^2+bx+c donc $\forall x \in,]1;\ +\infty[,\ f'(x) = 2ax+b$. D'après le théorème de limite de la dérivée, $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ $2a+b$.

Au final, f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $\begin{cases} a+b+c=1 \\ 2a+b=\frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{1}{2}+a \\ b = \frac{1}{2}-2a\end{cases}$. Les fonctions qui conviennent sont donc les fonctions de la forme : $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ ax^2 + \left(\frac{1}{2}-2a\right)x + \frac{1}{2}+a & \text{sinon}\end{cases}$

Correction de l'exercice 2 : La fonction, appelée f, est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et est de classe C^1 sur cet ensemble en tant que produit de fonctions qui le sont. **Étudions la en** 0.

- ☐ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ par croissance comparée.
- ☐ On a : $\left| \begin{array}{l} f \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+^* \\ f \text{ admet } 0 \text{ pour limite en } 0. \end{array}\right.$ Par propriété, f est prolongeable par continuité en 0. On note son prolongement f et il est défini par :

$$f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x>0 \\ 0 & \text{si} \quad x=0 \end{cases} \end{array}$$

- ☐ Montrons que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On utilise le théorème de prolongement de classe C^1 d'une fonction.
  - f est continue sur $\mathbb{R}_+$
  - f est de classe $\mathbb{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$
  - $\forall x > 0, f'(x) = 2x\ln(x) + x^2 \times \frac{1}{x} = 2x\ln(x) + x$. Donc $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0$ par croissance comparée et opération sur les limites usuelles.

  Par le théorème de prolongement de classe C^1, on en déduit que f est de classe C^1 en 0 et que $f'(0) = 0$.
- ☐ Puisque $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0$, la fonction f' est continue en 0.

Ainsi la fonction f est de classe C^1 en 0 et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

Correction de l'exercice 3 :

1. **CONTINUITE.** La fonction $x \mapsto 1-x^4$ est continue sur $[-1;1]$ et à valeurs dans $[0;1]$. La fonction Arcsin est continue sur $[-1;1]$. Par composition, f est continue sur $[-1;1]$.
2. **Classe** C^∞. En tant que fonction polynomiale, la fonction $x \mapsto 1-x^2$ est de classe C^∞ sur $[-1;1]$. Mais la fonction Arcsin est de classe C^∞ sur $]-1;1[$. Il faut donc enlever les valeurs de x pour lesquelle $1-x^2 = \pm 0 \Leftrightarrow x = 0$. Ainsi, la fonction f est de classe C^∞ sur $[-1;1]-\{0\}$.
3. On dérive la fonction f et on obtient :

   $\forall x \in [-1;1]-\{0\}, f'(x) = 1 - \frac{2x^2}{\sqrt{2x^2-x^4}} = \dfrac{x^2}{|x|\sqrt{2-x^2}}$.

   Par opérations usuelles on obtient deux limites à droite et à gauche égales à $\text{Arcsin}(1) = \dfrac{\pi}{2}$. Par le théorème de prolongement de classe C^1 (dont les hypothèses sont bien vérifiées) on en déduit que f est de classe C^1 sur $[-1;\ 1]$.

Correction de l'exercice 5 :

1. Sur $I = [a;\ a+1]$, la fonction : $f(x) = \text{Arctan}(x)$ est dérivable et de plus : $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Puisque : $f'(x)$ est positive, nous avons $|f'(x)| = f'(x)$, ce qui entraîne immédiatement l'encadrement : $\forall x \in I,\ \dfrac{1}{1+(a+1)^2} \leq |f'(x)| \leq \dfrac{1}{1+a^2}$. L'inégalité des accroissement finis entraîne donc : $\dfrac{1}{1+(a+1)^2}(a+1-a) \leq |f(a+1)-f(a)| \leq \dfrac{1}{1+a^2}(a+1-a)$, ce qui s'écrit encore :

$$\frac{1}{1+(1+a)^2} \leq \arctan(a+1)-\arctan(a) \leq \frac{1}{1+a^2}.$$

2. Ainsi :
   - $\forall k \in \mathbb{N}, \arctan(k+1)-\arctan(k) \leq \frac{1}{1+k^2} \Rightarrow \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(\arctan(k+1)-\arctan(k)) \leq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{1+k^2}$, ce qui par télescopage et par définition de (u_n) donne l'encadrement : $\text{Arctan}(n+1) \leq u_n$.
   - $\forall k \in \mathbb{N}, \dfrac{1}{1+(k+1)^2} \leq \arctan(k+1)-\arctan(k) \Rightarrow \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{1+(k+1)^2} \leq \sum_{k=0}^{n}(\arctan(k+1)-\arctan(k))$.
   Or, par glissement d'indice, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{1+(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{1+k^2} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{1+k^2}-1+\frac{1}{1+(n+1)^2}$. Nous en déduisons donc l'encadrement :
   $u_n \leq \text{Arctan}(n+1)+1-\dfrac{1}{1+(n+1)^2}$.

   Maintenant, le deuxième encadrement entraîne que la suite (u_n) est majorée car $\forall n \in \mathbb{N}$, $\text{Arctan}(n+1)+1-\dfrac{1}{1+(n+1)^2} \leq \dfrac{\pi}{2}+1$. D'autre part : (u_n) est croissante car : $u_{n+1}-u_n = \dfrac{1}{1+(n+1)^2}$, ce qui est positif. D'après le théorème des suites monotones, on en déduit que (u_n) converge vers un réel ℓ. Enfin,le passage de l'inégalité : $\text{Arctan}(n+1) \leq u_n \leq \text{Arctan}(n+1)+1-\dfrac{1}{1+(n+1)^2}$ fournit l'encadrement : $\dfrac{\pi}{2} \leq \ell \leq \dfrac{\pi}{2}+1$.

Correction de l'exercice 6 :

(a) La fonction est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions qui le sont. Par la formule de Leibniz appliquée à $u : x \mapsto x$ et $v = \exp$, on en déduit : $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$(u\times v)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}(x)\times v^{(n-k)}(x) = \binom{n}{0}u(x)\exp$$

$$= \boxed{x\exp(x)+n\exp(x)}.$$

(b) La fonction est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions qui le sont. Par la formule de Leibniz appliquée à $u : x \mapsto x^2$ et $v : x \mapsto \exp(-x)$, on en déduit : $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$(u\times v)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}(x)\times v^{(n-k)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}(x)\times(-1$$

$$= \binom{n}{0}x^2\times(-1)^n\exp(x)+\binom{n}{1}2x\times(-1)^{n-1}\exp(x)+\binom{n}{2}2\times(-1)$$

$$= \boxed{(((1)^n x^2+2n(-1)^{n-1}x+n(n-1)(-1)^{n-2})\exp(x)}.$$

(c) La fonction est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions qui le sont. Par la formule de Leibniz appliquée à $u : x \mapsto \ln(x)$ et $v : x \mapsto \exp(x)$, on en déduit : $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$(u\times v)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}(x)\times v^{(n-k)}(x) = \ln(x)\exp(x)+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}$$

Correction de l'exercice 8 :

(Q 1) $k(x) = \cos(\sqrt{x})$.
- Le nombre $k(x)$ a un sens si et seulement si $\sqrt{x}$ est définie. Ainsi, l'ensemble de définition de k est $\mathbb{R}_+$.
- On sait que $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et son ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}_+$. De plus, cos est continue sur $\mathbb{R}$. Par le théorème de composition, k est donc continue sur $\mathbb{R}_+$.
- On sait que $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et son ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}_+^*$ De plus, cos est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par le théorème de composition, k est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
- On l'étudie en 0 désormais. On applique le théorème de la limite de la dérivée. On a :
  - ☐ k est continue sur $\mathbb{R}_+$
  - ☐ k est dérivable sur $\mathbb{R}_+-\{0\}$
  - ☐ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$

  $$k'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\times(-\sin(\sqrt{x})) = \frac{-\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$$

  Or $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x} = 0$ et $\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{\sin(X)}{X} = 1$. Par le théorème de composition,

  $$\lim_{x\to 0}k'(x) = \frac{-1}{2}$$

  Par le théorème de la limite de la dérivée, la fonction k est dérivable en 0 et $k'(0) = \frac{-1}{2}$.

(Q 2) $h(x) = \text{Arcos}(\frac{1}{\text{ch}(x)})$.
- Le nombre $h(x)$ a un sens si et seulement si $-1 \leq \frac{1}{\text{ch}(x)} \leq 1$ et $\text{ch}(x) \neq 0$. Or on sait que $\forall x \in \mathbb{R}, \text{ch}(x) \geq 1$. Ainsi, l'ensemble de définition de h est $\mathbb{R}$.
- On sait que $x \mapsto \frac{1}{\text{ch}(x)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et son ensemble d'arrivée est $]0;\ 1]$. De plus, Arcos est continue sur $[-1; 1]$. Par le théorème de composition, h est donc continue sur $\mathbb{R}$.

- On sait que $x \mapsto \frac{1}{\text{ch}(x)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et son ensemble d'arrivée est $[1; +\infty[$. De plus, Arcos est dérivable sur $]-1; 1[$. Par le théorème de composition, h est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ privé des réels x tels que $\frac{1}{\text{ch}(x)} = 1 \Leftrightarrow \text{ch}(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0$. Ainsi, h est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
- On l'étudie en 0 désormais. On applique le théorème de la limite de la dérivée. On a :
  - ☐ h est continue sur $\mathbb{R}$
  - ☐ h est dérivable sur $\mathbb{R} - \{0\}$
  - ☐ $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$,

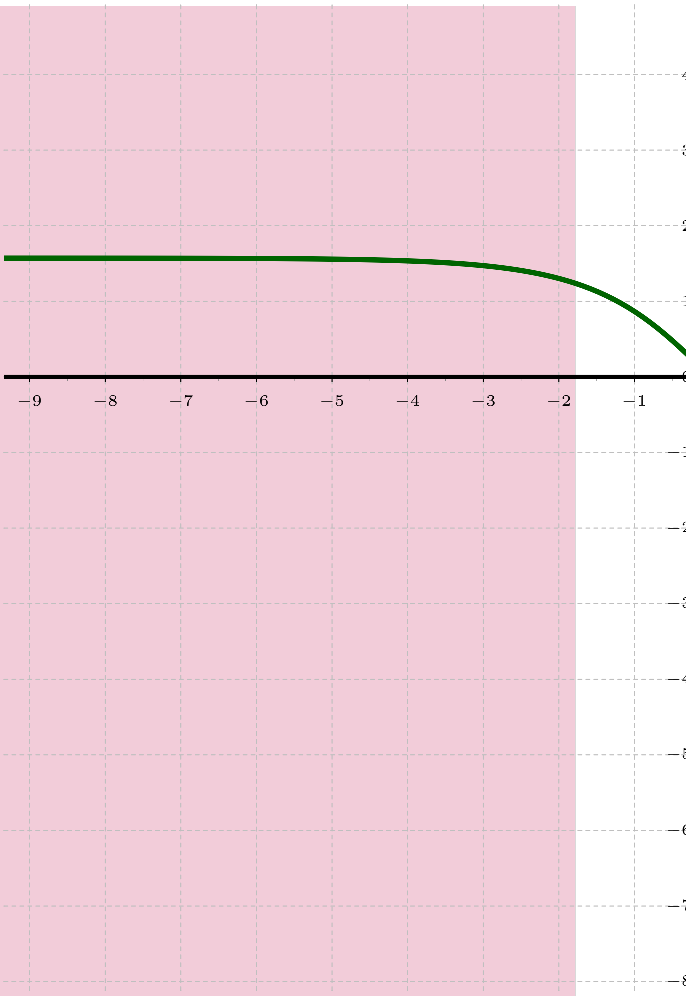
  $$f'(x) = \frac{-\text{sh}(x)}{\text{ch}^2(x)} \times \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\text{ch}^2(x)}}} = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}^2(x)} \times \frac{}{\sqrt{\text{ch}^2(x}}$$

  car ch est positive. Or $\text{ch}^2 - \text{sh}^2 = 1 \Leftrightarrow \text{ch}^2 - 1 = \text{sh}^2$ Ainsi,

  $$f'(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}^2(x)} \times \frac{\text{ch}(x)}{\sqrt{\text{sh}^2(x)}} = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} \times \frac{1}{|\text{sh}(x)|} = \frac{A}{\text{ch}(}$$

  avec $A = 1$ pour $x > 0$ et $A = -1$ pour $x < 0$. Donc $\lim_{x \to 0_-} f'(x) = -1$ et $\lim_{x \to 0_+} f'(x) = 1$.

  Par le théorème de la limite de la dérivée, la fonction f est dérivable à gauche et à droite de 0 mais les nombres dérivés étant distincts, on en conclut que f n'est pas dérivable en 0. En revanche, sa courbe représentative admet des demi-tangentes au point de coordonnées $(0, f(0)) = (0, 0)$.



(Q 3)
- $f(x)$ a un sens si et seulement si : $-1 \leq 1 - x^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x^2 - 1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 2 \Leftrightarrow x \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$. On note $D_f = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$
- La fonction $x \mapsto 1 - x^2$ est continue sur D_f en tant que fonction polynomiale et son ensemble d'arrivée est $[-1; 1]$. La fonction Arcsin est continue sur $[-1; 1]$. Par composition, f est continue sur D_f.
- La fonction $x \mapsto 1 - x^2$ est dérivable sur D_f en tant que fonction polynomiale et son ensemble d'arrivée est $[-1; 1]$. La fonction Arcsin est dérivable sur $\boxed{]-1; 1[}$. Par composition, f est dérivable sur D_f privé des réels x tels que $1 - x^2 = \pm 1 \Leftrightarrow x = 0$ ou$x = \pm\sqrt{2}$.
- On doit donc étudier f en 0 et $\pm\sqrt{2}$. Pour cela, utilisons le théorème de la limite de la dérivée. On sait que :
  - ☐ f est continue sur $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$
  - ☐ f est dérivable sur $]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[-\{0\}$
  - ☐ $\forall x \in]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[-\{0\}$,

  $$f'(x) = -2x \times \frac{1}{\sqrt{1 - (1 - x^2)^2}} = \frac{-2x}{\sqrt{2x^2 - x^4}} = \frac{-2x}{\sqrt{x^2(2 - x}}$$

  Donc $\lim_{x \to \sqrt{2}_-} f'(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to -\sqrt{2}_+} f'(x) = +\infty$.

  Par le théorème de la limite de la dérivée, f n'est donc pas dérivable en $\pm\sqrt{2}$. En revanche, sa courbe représentative admet une tangente verticale en ces points. De même, en zéro, nous avons $\lim\limits_{x\to 0_+} f'(x) = -2/\sqrt{2}$ et $\lim\limits_{x\to 0_-} f'(x) = 2/\sqrt{2}$. Ainsi, par le théorème de la limite de la dérivée, on peut en déduire que f est dérivable à droite et à gauche de 0 mais étant donné que ces nombres dérivées sont différents, on conclut que f n'est pas dérivable en 0.

Correction de l'exercice 9 :

$$x^x = \exp(x\ln(x)).$$

La fonction f est donc définie sur $]0;+\infty[$ () et est de classe C^∞ sur cet ensemble en tant que composition de fonctions de classe C^∞.

- ☐ Par croissance comparée, $\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0$, puis par composition, $\lim_0 f = 1$. Cette fonction est donc prolongeable par continuité en 0. On note encore f son prolongement en posant $f(0) = 1$.
- ☐ La fonction f est continue sur $[0;+\infty[$, dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\forall x > 0$, $f'(x) = \Big(\ln(x)+1\Big)x^x$. Par produit de limites, $\lim_0 f' = -\infty$. Par le théorème de la limite de la dérivée, la fonction f n'est donc pas dérivable en 0. Cependant, sa courbe représentative admet une tangente verticale au point de coordonnées $(0;1)$.

Correction de l'exercice 10 :

1. Le problème vient de $x^{5/2}\cos(1/x)$. Pour lever cette indétermination, on peut observer que
$$|x^{5/2}\cos(1/x)| \le x^{5/2} \text{ et } \lim_{x\to 0} x^{5/2} = 0$$
Par le théorème de l'encadrement, $\lim\limits_{x\to 0} x^{5/2}\cos(1/x) = 0$. Ainsi, par opérations usuelles, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$. On a :
f est continue sur $\mathbb{R}^*$ par opérations usuelles de foncti
f admet 1 pour limite en 0.
Par propriété, f est prolongeable par continuité en 0. On note son prolongement f et il est défini par :
$$f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x\neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \end{array}$$
2. Utilisons le théorème de la limite de la dérivée.
   - f est continue sur $\mathbb{R}$
   - f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$par opérations usuelles de fonctions continues
   - $\forall x\neq 0$, $f'(x) = 2x + \frac{5}{2}x^{3/2}\cos(\frac{1}{x}) + x^{5/2}\times\frac{-1}{x^2}\times(-\sin(1/x)) = 2x+\frac{5}{2}x^{3/2}\cos(\frac{1}{x})+x^{1/2}\sin(1/x)$. Par le même raisonnement qu'à la question précédente, $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0$.

   Par le théorème de la limite de la dérivée, on en déduit que f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
3. On étudie par exemple le taux d'accroissement afin de montrer qu'il n'admet pas de limite en 0 :
$$\tau_0(f')(x) = \frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = 2+\frac{5}{2}x^{1/2}\cos(\frac{1}{x})+\frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x}}$$
Le dernier terme de cette somme pose problème. On peut utiliser les suites afin de lever le problème du sinus. Par exemple :
$$\tau_0(f')(\frac{1}{2n\pi}) \to_{n\to+\infty} 0$$
$$\tau_0(f')(\frac{1}{2n\pi+\pi/2}) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2n\pi+\pi/2}}} \to_{n\to+\infty} +\infty$$
Par théorème, $\tau_0(f')$ n'admet pas de limite en 0. Par définition, f' n'est donc pas dérivable en 0 et ainsi f n'est pas deux fois dérivables en 0.

Correction de l'exercice 11 :

- Par opérations élémentaires sur les fonctions continues, f est continue (et même de classe C^∞) sur $\mathbb{R}^*$. Ainsi, f est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si f est continue en 0, c'est à dire $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$. Or $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = c$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1$ et $f(0) = c$. On en déduit $\boxed{f \text{ continue sur } \mathbb{R} \text{ si et seulement si } c = 1.}$
- On suppose maintenant $c = 1$. Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, d'après le théorème de prolongement de classe C^1, f est de classe C^1 si et seulement si f' admet une limite finie en 0. Or $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = b$ ($\forall x \in]0;\ +\infty[,\ f'(x) = 2ax+b$) , $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = b$ ($\forall x \in]-\infty;\ 0[,\ f'(x) = e^x$). On en déduit :
$\boxed{f \text{ de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ si et seulement si } b = 1.}$
- On suppose maintenant $b = c = 1$. Puisque f' est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, d'après le théorème de prolongement de classe C^1, f' est de classe C^1 si et seulement si $(f')' = f''$ admet une limite finie en 0. Or $\lim\limits_{x\to 0^+} f''(x) = 2a$ ($\forall x \in]0;\ +\infty[,\ f''(x) = 2a$) , $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = 1$ ($\forall x \in]-\infty;\ 0[,\ f'(x) = e^x$). On en déduit :
$\boxed{f' \text{ de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ si et seulement si } 2a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}.}$

Finalement, puisque f' est de classe $C^1 \Leftrightarrow f$ de classe C^2, on en déduit que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $b = c = 1$ et $a = \dfrac{1}{2}$. Dans cette situation, si f était trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$, alors f'' serait dérivable en 0. Or, pour $x < 0$, $\dfrac{f''(x)-f''(0)}{x-0} = \dfrac{e^x-1}{x} \to 1$ et pour $x > 0$, $\dfrac{f''(x)-f''(0)}{x-0} = \dfrac{1-1}{x} \to 0$. Ces deux limites étant différentes, on en déduit que f'' n'est pas dérivable en 0, ce qui prouve que f n'est trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 19 :

On remarque que $30^3 = 27000$. On pense donc à appliquer le théorème des accroissements finis à $f(x) = x^{1/3}$ sur l'intervalle $I = [27000,\ 27001]$. Sur cet intervalle f est dérivable et de plus, $f'(x) = \frac{1}{3}\frac{1}{x^{2/3}}$. Donc pour tout $x \in I$, $0 < f'(x) \leq \frac{1}{3}\frac{1}{27000^{2/3}}$, ce qui entraîne : $|f'(x)| \leq \underbrace{\frac{1}{3 \times 27000^{2/3}}}_{=M}$. En remarquant que $27000^{1/3} = 30$, on en déduit : $M = \frac{1}{3 \times 900} = \frac{1}{2700}$. L'inégalité des accroissements finis entraîne alors : $|f(27001) - f(27000)| \leq M|27001 - 27000|$, c'est à dire :

$$|(27\,001)^{1/3} - 30| \leq \frac{1}{2700}.$$

Correction de l'exercice 20 :

1. On reconnait l'inégalité des accroissements finis. Fixons $k \geq 2$. On pose : $fx \mapsto \ln(\ln(x))$. Cette fonction est dérivable sur $[k; k+1]$ (la ("première") fonction $\ln$ est dérivable sur $[k; k+1]$ à valeurs dans $[\ln(k); \ln(k+1)] \subset]0; +\infty[$, par composition $\ln \circ \ln$ est dérivable sur cet ensemble). De plus, $f'(x) = \frac{1}{x} \times \frac{1}{\ln(x)}$. Donc $\forall x \in [k; k+1]$:
$$\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leq f'(x) \leq \frac{1}{(k)\ln(k)}.$$
Par le théorème de l'inégalité des accroissements finis :
$$\begin{aligned} & \tfrac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \times (k+1-k) \leq f(k+1) - f(k) \leq \tfrac{1}{k\ln(k)} \times (k+1-k) \\ \Leftrightarrow\ & \tfrac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leq \ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln((k)) \leq \tfrac{1}{(k)\ln(k)}. \end{aligned}$$
2. On somme ces inégalités :
$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leq \sum_{k=2}^{n} \ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln((k)) \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$. Notons $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$. Par glissement d'indices : $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} = \sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{k\ln(k)} = S_n - \frac{1}{2\ln(2)} + \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$ Par la propriété des sommes télescopiques : $\sum_{k=2}^{n} \ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln((k)) = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2))$. Finalement,
$S_n - \frac{1}{2\ln(2)} + \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} \leq \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) \leq S_n$, c'est à dire :
$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) \leq S_n \leq \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) + \frac{1}{2\ln(2)} - \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$.
Par le théorème de divergence par minoration, étant donné que $\lim_{n\to+\infty} \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) = +\infty$, nous obtenons $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

Correction de l'exercice 21 :

(Q 1) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \in [0,1]$.
- ☐ Initialisation. $u_1 = \frac{e^{u_0}}{e^{u_0}+1}$ est positif en tant que quotient de nombres positifs et $0 < e^{u_0} \leq e^{u_0} + 1 \Leftrightarrow e^{u_0}/(1 + e^{u_0}) < 1$. Cela montre que $u_1 \in [0; 1]$.
- ☐ Hérédité. Supposons que $u_n \in [0; 1]$. Alors, par les mêmes arguments, $u_{n+1} \in [0; 1]$.
- ☐ Par le théorème de récurrence, la propriété est démontrée.

(Q 2) On pose $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1} - x$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que différence et quotient de fonctions qui le sont.
$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{e^x(e^x+1) - e^x \times e^x}{(e^x+1)^2} - 1 = \frac{e^x - (e^x+1)^2}{(e^x+1)^2} = -e$$
Cette fonction f est donc strictement décroissante et est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Elle réalise alors une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) =]\lim_{+\infty} f; \lim_{-\infty} f[=] - \infty; +\infty[$. Le nombre 0 appartient à $f(\mathbb{R})$ et par définition, il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) = 0$. Puisque $f(0) = 1/2 > 0$ et $f(1) = \frac{e}{e+1} - 1 = \frac{-1}{e+1} < 0$, $\alpha \in]0; 1[$.

(Q 3) On pose $g : x \mapsto \frac{e^x}{e^x+1}$. Cette fonction est dérivable sur $[0; 1]$ et $g'(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$. On doit étudier si g' est bornée sur $[0; 1]$ (le théorème de Weierstrass l'assure mais ne donne pas explicitement un majorant , un minorant). Dérivons alors encore une fois :
$$\begin{aligned} g''(x) &= \tfrac{e^x(e^x+1)^2 - e^x \times e^x \times 2 \times (e^x+1)}{(e^x+1)^4} \\ &= \tfrac{e^x(e^x+1) - e^x \times e^x \times 2}{(e^x+1)^3} \\ &= \tfrac{e^x - e^{2x}}{(e^x+1)^3} \\ &= \tfrac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}. \end{aligned}$$
La fonction g' est donc strictement décroissante sur $[0; 1]$. De plus, $g(0) = 1/4$ et $g(1) = \frac{e}{(e+1)^2} > 0$. Finalement,
$$\forall x \in [0; 1], |g'(x)| \leq 1/4.$$
Par l'inégalité des accroissements finis, $\forall x, y \in [0; 1], |g(x) - g(y)| \leq \frac{1}{4}|x - y|$. On l'applique à $x = u_n, y = \alpha$, des nombres de $[0; 1]$, avec $n \geq 1$, pour obtenir :
$$|g(u_n) - g(\alpha)| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|.$$

(Q 4) Par récurrence, on montre que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} |u_1 - \alpha|$

(Q 5) La suite $\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} |u_1 - \alpha|\right)$ converge vers 0. Par le théorème d'encadrement, $(|u_n - \alpha|)$ converge vers 0 et par propriété, (u_n) converge vers α.

Correction de l'exercice 22 :

(Q 1) On a $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2(x) = \frac{1}{2}\Big(\cos(2x) + 1\Big)$. Par récurrence, on montre que la dérivée n-ième de $x \mapsto \cos(2x)$ est $x \mapsto 2^n \cos(2x + \frac{n\pi}{2})$. Ainsi, la dérivée n-ième (pour $n \geq 1$) de h est
$$x \mapsto 2^{n-1}\cos(2x + \frac{n\pi}{2}).$$

(Q 2) On reconnait un produit. On pose $u(x) = 1 - x$ et $v(x) = \frac{1}{1+x}$. On montre par récurrence que "v est n fois dérivable sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ et $v^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$." Puis on applique la formule de LEIBNIZ :
$i^{(n)}(x) = (1-x) \times \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}} - \binom{n}{1} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n} = \boxed{\dfrac{2 \times (-1)^n \times n!}{(1+x)^{n+1}}}$.

(Q 3) Par LEIBNIZ :

(a) Si $n \geq p+2$ alors $j^{(n)} = 0$;
(b) Si $n = p+1$ alors $j^{(n)}(x) = \binom{p+1}{1} \times p! = (p+1)!$
(c) Si $n \leq p$ alors $j^{(n)}(x) = x \times \frac{p!}{(p-n)!}(x-2)^{p-n} + n \times \frac{p!}{(p-n+1)!}(x-2)^{p-n+1}$
$= \frac{p!}{(p-n)!}\Big(x-2\Big)^{p-n}\left(\frac{(p+1)x-2n}{p-n+1}\right)$.

Correction de l'exercice 24 :

1. $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$ est une fraction rationnelle. Elle est donc de classe C^∞ sur son domaine de définition qui est $\mathbb{R}^*$. De plus exp est de classe $\mathbb{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi, par composition, f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.

2. On procède par récurrence. On note : $\mathcal{P}(n)$ « $f^{(n)}(x) = P_n\left(\dfrac{1}{x}\right) e^{-1/x^2}$ ».

   - **Initialisation.** Pour $n = 0$, $f^{(0)}(x) = f(x) = P_0\left(\dfrac{1}{x}\right) e^{-1/x^2}$, avec $P_0(x) = 1$. Ceci prouve l'initialisation.
   - **Hérédité.** Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose : $f^{(n)}(x) = P_n\left(\dfrac{1}{x}\right) e^{-1/x^2}$. Alors,

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}\right)'(x) \\ &= \frac{-1}{x^2} P_n'\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} + P_n\left(\frac{1}{x}\right) \times \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2} \\ &= \left(\frac{-1}{x^2} P_n'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x^3} P_n\left(\frac{1}{x}\right)\right) e^{-1/x^2}. \end{aligned}$$

   On pose alors : $P_{n+1}(x) = -x^2 P_n'(x) + 2x^3 P_n(x)$. Si P_n est un polynôme, alors P_n' également et $-x^3 P_n'(x) + 2x^3 P_n(x)$ est un polynôme. Donc P_{n+1} est un polynôme. Par ailleurs, $P_{n+1}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{-1}{x^2} P_n'\left(\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{2}{x^3} P_n\left(\dfrac{1}{x}\right)$, donc : $f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}\left(\dfrac{1}{x}\right) e^{-1/x^2}$, ce qu'il fallait démontrer.

3. Si l'on note k le degré de P_n et $a_k \neq 0$ le coefficient correspondant, alors : le comportement $P_n\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est donnée par $\dfrac{a_k}{x^k}$. Ainsi : $f^{(n)}(x)$ a le même comportement que : $\dfrac{a_k}{x^k} e^{-1/x^2}$. On pose : $u = -\dfrac{1}{x^2}$. Nous avons u proche de $-\infty$ lorsque x est proche de 0. D'autre part, l'expression se réecrit alors : $a_k(-u)^{k/2} e^u = a_k |u|^{k/2} e^u$. Or, par croissances comparées, $\lim\limits_{u \to -\infty} |u|^{k/2} e^u = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x \to 0} f^{(n)}(x) = 0$.

4. - **Initialisation.** D'après précédemment $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$. On prolonge donc f par continuité en 0 en posant : $f(0) = 0$. Ceci prouve l'initialisation. De plus, f est de classe C^1 (car C^∞) sur $\mathbb{R}^*$ et $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = 0$, toujours d'après la question précédente. D'après le théorème de limite de la déricvée, on en déduit que le prolongement est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
   - **Hérédité.** On suppose que f^n admet un prolongement de classe C^1 en 0 en posant $f^{(n)}(0) = 0$. Ainsi, $g(x) = \left(f^{(n)}\right)'$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, et par définition, sur $\mathbb{R}^*$, $\left(f^{(n)}\right)' = f^{(n+1)}$. Or $\lim\limits_{x \to 0} f^{(n+1)}(x) = 0$ D'après précédemment, donc $g(0) = \lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$. On prolonge donc $f^{(n+1)}$ par continuité en posant $f^{(n+1)}(0) = 0$. D'autre part, toujours pour les mêmes raisons, $\lim\limits_{x \to 0} \left(f^{(n+1)}\right)'(x) = \lim\limits_{x \to 0} f^{(n+2)}(x) = 0$. D'après le théorème de limite de la dérivée, on en déduit que le prolongement est de classe C^1. Ceci prouve l'hérédité.

5. D'après la question précédente, on peut donc définir une suite de fonctions $f^{(n)}$ sur l'ensemble $\mathbb{R}$. Ceci prouve que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 25 :

1. Soit f une fonction vérifiant la relation ci-dessus.

   (a) $f(2 \times 0) = 2f(0)$ donc : $f(0) = 0$.

   (b) Pour $x \neq 0$, $g(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$. Or par dérivabilité de f en 0 on sait que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \ell \in \mathbb{R}$. Par ailleurs, g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ car f est continue sur $\mathbb{R}$ par hypothèse et par quotient de fonctions continues donc le dénominateur ne s'annule pas. Les deux points précédents étant vérifiés, il s'ensuit que l'on peut prolonger g par continuité sur $\mathbb{R}$ en posant : $g(0) = \ell$.

   (c) On pose : $\mathcal{P}(n)$ « $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = g\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$ ». On procède par récurrence :

   - Pour $n = 0$ le résultat est évident.
   - on suppose larelation vérifiée pour un certain $n \in \mathbb{N}$. La preuve de l'hérédité repose sur la relation suivante :

     $\forall x \in \mathbb{R}^* g(2x) = \dfrac{f(2x)}{2x} = \dfrac{2f(x)}{2x} = \dfrac{f(x)}{x} = g(x)$. Ainsi : $g(2.x/2) = g(x/2)$,ce qui s'écrit : $g(x/2) = g(x)$. On remarque par ailleurs que cette relation est aussi vérifiée en 0 et donc valable pour tout $x \in \mathbb{R}$.

     Or, par hypothèse de récurrence, $g(x) = g(y)$ avec $y = \dfrac{x}{2^n}$. Mais d'après ci-dessus, $g(y) =$

$g(y/2)$. Donc : $g(x) = g(y/2) = g\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$, ce qui prouve l'hérédité.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque g admet ℓ pour limite en 0 et puisque $\lim_{n \to +\infty} \frac{x}{2^n} = 0$, on sait que : $\lim_{n \to +\infty} g\left(\frac{x}{2^n}\right) = \ell$. Ainsi, l'égalité $g(x) = g\left(\frac{x}{2^n}\right)$ étant vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par passage à la limite on en déduit : $g(x) = \ell$, et donc $f(x) = \ell x$.

2. Réciproquement, toutes les fonctions de la forme $f(x) = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ sont continues sur $\mathbb{R}$, dérivables en 0 et vérifient bient bien la relation : $f(2x) = 2f(x)$.