

Dénombrement

LES INCONTOURNABLES

Exercice 1 : [corrigé]

- (Q 1) Trente chevaux numérotés sont au départ d'une course. Combien y a-t-il de tiercés ?
- (Q 2) On s'intéresse aux entiers naturels dont l'écriture ne nécessite pas d'autres chiffres que 1; 2 et 3.
- (a) Combien y a-t-il de tels entiers de n chiffres ?
 - (b) Combien y en a-t-il d'au plus n chiffres ?
- (Q 3) Combien existe-t-il de nombres palindromes entre 100 et 1000 ? (Un nombre palindrome est un nombre qui reste le même qu'on le lise de gauche à droite ou de droite à gauche).
- (Q 4) Combien de couple de délégués peut-on former avec une classe de 27 élèves ?
- (Q 5) Un internat comporte 10 chambres. De combien de façons le responsable peut-il loger 7 élèves ?
- (Q 6) Un atelier comprend 8 femmes et 7 hommes. On choisit dans cet atelier des équipes de 6 ouvriers. Combien d'équipes comportant 3 hommes et 3 femmes peut-on former ?
- (Q 7) Dans une voiture, on peut mettre cinq personnes, deux à l'avant et trois à l'arrière. Combien de façons a-t-on pour le choix des deux personnes à l'avant en distinguant le chauffeur du copilote ?
- (Q 8) Une étagère comprend 25 livres appartenant à 3 collections différentes, une de 10 livres, une de 8 et une de 7. Vu de loin, les ouvrages d'une même collection sont indiscernables. Quel est le nombre d'aspects que peut prendre l'étagère ?
- (Q 9) On dispose de 5 outils et de 7 casiers susceptibles de les recevoir. On suppose que chaque casier peut à la rigueur contenir 5 outils. Déterminer
- (a) le nombre de façons de placer 5 outils dans les 7 casiers d'une façon quelconque.
 - (b) le nombre de façons de placer 5 outils dans les 7 casiers sans qu'il y en ait deux dans le même casier.

Exercice 2 : [corrigé] Déterminer le nombre d'anagrammes du mot MOI ? du mot BOB ? du mot MATHEMATIQUES ?

Exercice 3 : [solutions] Dans une urne, on place n boules blanches et une noire. On prend $k \leq n$ boules simultanément.

- (Q 1) Quel est le nombre de tirages sans boule noire ?
- (Q 2) Quel est le nombre total de tirages ?
- (Q 3) Déterminer de deux façons différentes le nombre de tirages avec au moins une boule noire ? Quelle propriété du cours vient-on de démontrer ?
-

POUR S'ENTRAÎNER

Exercice 4 : [corrigé] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Représentez graphiquement chaque ensemble et dénombrez-les

(a) $A_n = \{(x; y) \in \{1; \dots; n\}^2; x \leq y\}$

(c) $C_n = \{(x; y) \in \{1; \dots; n\}^2; x + y = n\}$

(b) $B_n = \{(x; y) \in \{1; \dots; n\}^2; x < y\}$

(d) $D_n = \{(x; y) \in \{1; \dots; n\}^2; x + y \leq n\}$

Exercice 5 : [corrigé] En lançant cinq fois de suite un dé à six faces, on obtient une suite de cinq numéros de $\{1, \dots, 6\}$.

(Q 1) Combien de suites sont possibles ?

(Q 2) Quel est le nombre de suites qui

- (a) commencent par un 2 ?
- (b) finissent et commencent par le même numéro ?
- (c) ne contiennent pas de 3
- (d) contiennent tous les numéros sauf le 3 ?



Exercice 6 : [corrigé] Un jeu de 52 cartes est composé de 4 couleurs. Une main est une suite non ordonnée de 13 cartes.

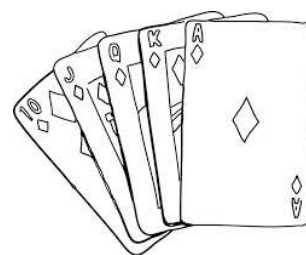
(Q 1) Quel est le nombre de mains ?

(Q 2) Combien de mains contiennent les quatre as ?

(Q 3) Combien comprennent quatre trèfles dont la dame ?

(Q 4) Combien ne contiennent aucun coeur ?

(Q 5) Combien contiennent trois carreaux au plus ?



Exercice 7 : [corrigé] Un jeu de tarot comporte 21 atouts numérotés de 1 à 21. On prend cinq atouts. Quel est le nombre de mains

- 1. possibles ?
- 2. dans lesquelles il y a le 1 ou le 21 ?
- 3. dans lesquelles il y a au moins un multiple de cinq ?
- 4. dans lesquelles il y a exactement un multiple de cinq et de trois ?

Exercice 8 : [corrigé] Un jeu comporte 32 cartes, dont 8 par couleur. Une main est une suite non ordonnée de 8 cartes.

- 1. Quelle est le nombre de mains ?
- 2. Combien de mains contiennent au moins un as ?
- 3. Combien comprennent au moins un coeur ou une dame ?
- 4. Combien ne contiennent que des cartes de deux couleurs au plus ?

Exercice 9 : [corrigé] Un domino est un rectangle sur lequel figurent deux chiffres pris avec répétition dans l'ensemble $\{0, 1, \dots, 6\}$.

1. Calculer le nombre de dominos.
2. On tire au hasard, successivement et sans remise, deux dominos. Calculer le nombre de fois où les deux dominos possèdent un chiffre en commun ?
3. On tire de la même manière quatre dominos. Calculer le nombre de possibilités que l'on obtienne au moins un double.

Exercice 10 : [corrigé] On dispose de n boules noires numérotées de 1 à n et de n boules rouges numérotées de 1 à n que l'on place dans une urne.

(Q 1) On note E l'ensemble des tirages simultanés de n boules dans l'urne. Déterminer $\text{Card}(E)$.

(Q 2) Soit $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$. On note A_k l'ensemble des tirages de E avec exactement k boules noires. Calculer $\text{Card}(A_k)$.

(Q 3) Calculer alors de deux façons différentes le nombre : $\text{Card}(\cup_{k=0}^n A_k)$.

(Q 4) Quelle formule vient-on de démontrer ?

Exercice 11 : [indications] [corrigé] Soient E un ensemble fini de cardinal n et $\varphi : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{F}(E, \{0; 1\})$ définie par $\varphi(A) = 1_A$, avec 1_A définie par : $1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

(Q 1) Que valent $\text{Card}(\mathcal{P}(E))$ et $\text{Card}(\mathcal{F}(E, \{0; 1\}))$?

(Q 2) Montrer que φ est injective, puis qu'elle est bijective.

Exercice 12 : [indications] [corrigé]

1. Déterminer à la main le nombre de surjections de $\llbracket 1, 3 \rrbracket$ vers $\llbracket 1, 2 \rrbracket$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre de surjections de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ vers $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Exercice 13 : [indications] *Le crible.*

(Q 1) Soient A, B, C trois ensembles finis. Montrer que

$$\text{Card}(A \cup B \cup C) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) + \text{Card}(C) - \text{Card}(A \cap B) - \text{Card}(A \cap C) - \text{Card}(B \cap C) + \text{Card}(A \cap B \cap C)$$

(Q 2) *Une application.* Dans une classe, il y a autant de filles que de garçons. Tous les élèves étudient au moins une langue. Parmi eux, 10 étudient l'espagnol, 15 l'allemand, 20 l'anglais, 7 l'espagnol et l'allemand, 8 l'allemand et l'anglais, 9 l'anglais et l'espagnol. Quel est l'effectif de la classe ?

Exercice 14 : [corrigé] On s'intéresse à l'ensemble E_n des mots de n lettres formés des deux lettres a et b ne contenant pas plus d'un a consécutif. Notons $E = \{a, b\}$, W_n l'ensemble de tels mots finissant par un a et V_n l'ensemble de tels mots ne finissant pas par un a . On note également $u_n = \text{Card}(W_n)$ et $v_n = \text{Card}(V_n)$.

(Q 1) Déterminer $u_0, v_0, u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3$.

(Q 2) Montrer que : $\forall n \geq 1, u_{n+1} = v_n$.

(Q 3) Montrer que $v_{n+1} = u_n + v_n$.

(Q 4) En déduire une expression simple de u_n et v_n .

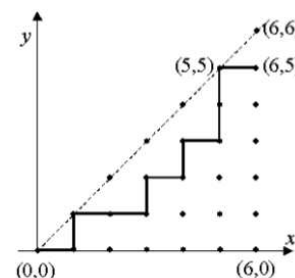
(Q 5) Donner une expression simple de $\text{Card}(E_n)$.

Exercice 15 : Nombre de Catalan. Une puce se déplace sur un quadrillage. Elle ne peut que sauter de un cran à droite, ou d'un cran en hauteur. Ce quadrillage est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Elle part donc de ce point O et souhaite atteindre le point (n, m) avec $(n, m) \in \mathbb{N}^2$.

(Q 1) Donner le nombre de chemins possibles en proposant une modélisation d'un chemin.

(Q 2)

Maintenant, on souhaite que la puce atteigne le point (n, n) avec $n \in \mathbb{N}^*$, mais sans dépasser la diagonale $(OM(n, n))$. On note C_n le nombre de chemins possibles.



(Q a) Donner C_0, C_1, C_2, C_3 .

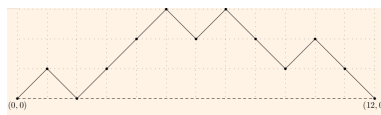
(Q b) Supposons dans cette question que la puce atteigne la diagonale seulement en $O(0, 0)$ et en $M(n, n)$. Expliquer pourquoi le nombre de ce type de chemin est égal à C_{n-1} .

(Q c) Soit $k \in \{1; \dots; n-1\}$. Montrer que le nombre de chemins tels que la puce atteigne pour la dernière fois la diagonale en $M(k, k)$ est égal à $C_k C_{n-1-k}$.

(Q d) En déduire que $C_n = C_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} C_k C_{n-1-k}$ puis que $C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}$.

Ces nombres sont appelés nombres de Catalan. On peut montrer que $C_n = \binom{2n}{n} / (n+1)$. Ils apparaissent dans de nombreux problèmes de dénombrement :

1. Le nombre de façons d'écrire n paires de parenthèses pour que chaque parenthèse fermante corresponde à une parenthèse ouvrante. Par exemple, si $n = 3$, il y a cinq possibilités : $((()))$, $(() ())$, $((()) ())$, $((()))$ et $(() ())$.
2. Le nombre de chemins qu'un montagnard peut effectuer formés de n montées et n descentes. Implicitement, le montagnard ne doit jamais descendre à une altitude inférieure à celle du point initial.



3. Le nombre de façons de trianguler un polygone convexe de $n+2$ sommets.
4. Le nombre de « mot de Dyck ». Un mot de Dyck est une chaîne de $2n$ caractères, $n \in \mathbb{N}^*$, formée de n lettres A et n lettres B , telle que, lorsque l'on dénombre les lettres de gauche à droite, en s'arrêtant à une lettre du mot, le nombre de A soit toujours supérieur ou égal au nombre de B . Ainsi, le seul mot de Dyck de longueur 2 est : AB . Les mots de Dyck de longueur 4 sont : $AABB$ et $ABAB$. $ABAABB$ et $AAABBB$ sont des mots de Dyck, alors que BA ou $AABBBBA$ n'en sont pas.

Indications

Exercice 11 :

1. Les deux valeurs sont égales.
2. Deux ensembles sont égaux si et seulement si leurs fonction caractéristiques sont égales. Il reste à voir que l'injectivité entraîne ici automatiquement la bijectivité.

Exercice 12 :

1. Il suffit d'expliciter toutes les applications de $\llbracket 1, 3 \rrbracket$ vers $\llbracket 1, 2 \rrbracket$ puis de compter celles qui sont surjectives.
2. Dans cette situation, seul un élément de $\llbracket 1, n \rrbracket$ a deux antécédents et les autres n'en ont qu'un seul.

Exercice 13 :

1. $\text{Card}(A \cup B \cup C) = \text{Card}(A \cup (B \cup C)) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B \cup C) \dots$
2. Notant :

$$\begin{aligned} A &= \{\text{élèves qui pratiquent l'Espagnol}\}, \\ B &= \{\text{élèves qui pratiquent l'Anglais}\}, \\ C &= \{\text{élèves qui pratiquent l'Espagnol}\}, \end{aligned}$$

et en utilisant la question précédente avec les hypothèses de l'énoncé, on aboutit à l'équation : $2k = 21 + p$, où : $n = 2k$ est l'effectif de la classe et $0 \leq p \leq 7$. Il reste à constater deux choses. D'une part p doit être nécessairement impair. D'autre part, nous devons également avoir : $p + (7 - p) + (9 - p) \leq 10$. Tout ceci aboutit à une unique solution.

Solution de l'exercice 3 :

1. $\binom{n}{k}$
2. $\binom{n+1}{k}$
3. $\binom{n+1}{k} - \binom{n}{k} = \binom{n}{k-1}$ PASCAL.

Correction de l'exercice 1 :

(Q 1) Trente chevaux numérotés sont au départ d'une course. Combien y a-t-il de tiercés ? Un tiercé est un 3 uplet d'éléments deux à deux distincts, soit un arrangement de 3 éléments pris parmi 30 éléments. Il en existe $A_{30}^3 = 30 \times 29 \times 28$.

(Q 2) On s'intéresse aux entiers naturels dont l'écriture ne nécessite pas d'autres chiffres que 1; 2 et 3.

- (a) Combien y a-t-il de tels entiers de n chiffres ? Un nombre entier à n chiffres est modélisé par un n uplet de l'ensemble $\{1; 2; 3\}$. Soit 3^n nombres de la sorte.
- (b) Combien y en a-t-il d'au plus n chiffres ? Au plus

n chiffres signifie que l'on considère l'ensemble des nombres à 1 chiffre, noté N_1 , ou l'ensemble des nombres à 2 chiffre, noté $N_2 \dots$, l'ensemble des nombres à n chiffre, noté N_n . Par le même raisonnement, on obtient $\text{Card}(N_k) = 3^k$. Cela consiste donc à calculer $\bigcup_{k=1}^n N_k$, ensemble deux à deux disjoints. Soit, par propriété :

$$\begin{aligned} \text{Card}\left(\bigcup_{k=1}^n N_k\right) &= \sum_{k=1}^n \text{Card}(N_k) \\ &= \sum_{k=0}^n 3^k - 1 = \frac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3} - 1 = \frac{3^{n+1} - 2}{2} \end{aligned}$$

(Q 3) Combien existe-t-il de nombres palindromes entre 100 et 1000 ? (Un nombre palindrome est un nombre qui reste le même qu'on le lise de gauche à droite ou de droite à gauche). Un nombre palindrome entre 100 et 1000 est modélisé par une suite de trois chiffres abc tels que $abc = cba$. Ce qui est équivalent à $b \in \{0; \dots; 9\}$ et $a = c \in \{1; \dots; 9\}$ (on enlève le 0 pour avoir un nombre à trois chiffres). Ainsi, par le principe multiplicatif, on obtient, $9 \times 10 = 90$ nombres de la sorte.

(Q 4) Combien de couple de délégués peut-on former avec une classe de 27 élèves ? Un tel couple est une partie de 2 personnes prises dans la classe de 27 personnes, soit $\binom{27}{2} = \frac{27 \times 26}{2 \times 1} = 351$ possibilités!!!

(Q 5) Un internat comporte 10 chambres. De combien de façons le responsable peut-il loger 7 élèves ? Par exemple, le premier élève a 10 chambres possibles, le second 9... On modélise donc un tel placement par une 7 liste d'éléments deux à deux distincts de l'ensemble $\{1; \dots; 10\}$, soit un arrangement de 7 éléments pris dans un ensemble à 10 éléments. Cela donne $A_{10}^7 = 604 800$ possibilités.

(Q 6) Un atelier comprend 8 femmes et 7 hommes. On choisit dans cet atelier des équipes de 6 ouvriers. Combien d'équipes comportant 3 hommes et 3 femmes peut-on former ?

Pour les femmes, on en prend 3 parmi 6, ce qui se modélise par une partie. On en a $\binom{6}{3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 56$. De même, pour les hommes $\binom{7}{3} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$. Par le principe multiplicatif, on obtient : $35 \times 56 = 1 960$ comités possibles.

(Q 7) Dans une voiture, on peut mettre cinq personnes, deux à l'avant et trois à l'arrière. Combien de façons a-t-on pour le choix des deux personnes à l'avant en distinguant le chauffeur du copilote ?

Puisqu'on distingue le chauffeur du copilote, on assimile le choix des deux personnes à l'avant par un arrangement de deux éléments parmi 5, c'est à dire : $5 \times 4 = 20$.

(Q 8) Une étagère comprend 25 livres appartenant à 3 collections différentes, une de 10 livres, une de 8 et une de 7. Vu de loin, les ouvrages d'une même collection sont indiscernables. Quel est le nombre d'aspects que peut prendre l'étagère ?

Plaçons la première collection. On prend $\binom{25}{10}$ places sur cette étagère. Pour la seconde collection, il reste $\binom{15}{8}$ places sur cette étagère. Pour la dernière, il reste (bien!) $\binom{7}{7} = 1$ place sur cette étagère. Par le prin-

cipe multiplicatif, on obtient : $\binom{25}{10} \times \binom{15}{8} = \frac{25!}{10!15!} \times \frac{15!}{8!7!} = \frac{25!}{10!8!7!}$.

(Q 9) On dispose de 5 outils et de 7 casiers susceptibles de les recevoir.

- (a) Nombre de façons de placer 5 outils dans les 7 casiers d'une façon quelconque. On peut associer pour chaque outil 7 possibilités. On modélise donc le problème par une 5-liste d'un ensemble à 7 éléments, donc 7^5 possibilités.
- (b) Nombre de façons de placer 5 outils dans les 7 casiers sans qu'il y en ait deux dans le même casier. Il suffit de remplacer la liste précédente par un arrangement, d'où $A_7^5 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3$ possibilités.

Correction de l'exercice 2 :

MOI : permutation de lettres deux à deux distinctes : $3! = 6$. Problème de BOB : on a deux fois la lettre B . Enumérons-les : BOB, BBO, OBB, soit 3. Pour le faire proprement : on choisit les deux places de la lettre B : $\binom{3}{2} = 3$, puis la dernière lettre est automatiquement placée, 1 choix. On retrouve bien $3! = 3$ anagrammes. Pour les MATHEMATIQUES, on place les lettres M, A, E, T puis les dernières, H, I, Q, U, S. Soit $\binom{13}{2} \binom{11}{2} \binom{9}{2} \binom{7}{2} 5! = \frac{13!}{11!2!} \frac{11!}{9!2!} \frac{9!}{7!2!} \frac{7!}{5!2!} \times 5! = \frac{13!}{2!2!2!2!}$.

Correction de l'exercice 4 :

$$(a) A_n = \{(x; y) \in \{1; \dots; n\}^2; x \leq y\}$$

$$A_n = \cup_{k=1}^n \{(k; y) \in \{1; \dots; n\}^2; k \leq y\}$$

$$= \cup_{k=1}^n \{(k; y); k \leq y \leq n\}$$

Ces n ensembles sont deux à deux disjoints. Par propriété :

$$\text{Card}(A_n) = \sum_{k=1}^n \text{Card}(\{(k; y); k \leq y \leq n\})$$

$$= \sum_{k=1}^n (n - k + 1) = \frac{n(n+1)}{2}$$

- (b) On peut remarquer que A_n est la réunion disjointe de B_n avec les éléments diagonaux de $\{1; \dots; n\}^2$ qui sont au nombre de n . On obtient donc $\text{Card}(B_n) = \text{Card}(A_n) - n = \frac{(n-1)n}{2}$. Sinon,

$$B_n = \{(x; y) \in \{1; \dots; n\}^2; x < y\}$$

$$= \cup_{k=1}^n \{(k; y) \in \{1; \dots; n\}^2; k < y\}$$

$$= \cup_{k=1}^n \{(k; y); k+1 \leq y \leq n\}$$

On remarque que k doit être inférieur ou égale à $n-1$, sinon on obtient un ensemble vide. Ces $n-1$ en-

sembles sont deux à deux disjoints. Par propriété :

$$\text{Card}(B_n) = \sum_{k=1}^{n-1} \text{Card}(\{(k; y); k+1 \leq y \leq n\})$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} (n - k) = \frac{n(n-1)}{2}$$

(c)

$$C_n = \{(x; y) \in \{1; \dots; n\}^2; x + y = n\}$$

$$= \cup_{k=1}^n \{(k; y) \in \{1; \dots; n\}^2; y = n - k\}$$

De même, on enlève l'ensemble $k = n$ puisqu'il est vide. Par conséquent,

$$C_n = \cup_{k=1}^{n-1} \{(k; y) \in \{1; \dots; n\}^2; y = n - k\}$$

Ces ensembles sont deux à deux disjoints et ils ne contiennent qu'un seul élément. Par propriété,

$$\text{Card}(C_n) = \sum_{k=1}^{n-1} 1 = n - 1.$$

- (d) $D_n = \{(x; y) \in \{1; \dots; n\}^2; x + y \leq n\}$ correspond à l'ensemble des couples issus de la partie triangulaire inférieure stricte. On trouve $\text{Card}(D_n) = \frac{n(n-1)}{2}$.

Correction de l'exercice 5 :

- Une 5 liste de $\{1; \dots; 6\} : 6^5$.
- (a) Un résultat possible : $(2; ?; ?; ?; ?)$. Soit 6^4 .
(b) Choix du nombre : 6. Puis les trois autres : 6^3 .
Donc, 6^4 .
(c) 5^5 .
(d) Tous les numéros de $\{1; 2; 4; 5; 6\}$. Donc une 5 liste d'éléments deux à deux distincts, soit une permutation par définition. Donc $5!$.

Correction de l'exercice 6 :

- (Q 1) Un résultat est modélisé par un sous ensemble (on ne les tire pas une à une). Donc $\binom{52}{13}$.
- (Q 2) Il reste $13 - 4 = 9$ cartes à prendre parmi les $52 - 4 = 48$ restantes. Donc $\binom{48}{9}$.
- (Q 3) On choisit la dame de trèfle, puis les 3 autres parmi les 12 trèfles restant, soit $\binom{12}{3}$. Enfin, les autres $13 - 4 = 9$ parmi $52 - 13 = 39$. Par le principe multiplicatif, $\binom{12}{3} \binom{39}{9}$.
- (Q 4) $\binom{39}{13}$.
- (Q 5) On note C_k : "on a obtenu exactement k carreau(x)." Alors on doit calculer le cardinal de $C_0 \cup C_1 \cup C_2 \cup C_3$, ensemble deux à deux disjoints. Donc, $\binom{39}{13} + \binom{39}{12} \binom{13}{1} + \binom{39}{11} \binom{13}{2} + \binom{39}{10} \binom{13}{3}$.

Correction de l'exercice 7 :

1. Une main est une partie de cinq éléments pris dans l'ensemble des atouts. Leur nombre est égal à $\binom{21}{5}$.
2. Deux solutions sont proposées.

(a) On compte celles dans lesquelles il n'y a ni le 1 ni le 21. Une telle main est alors une partie de l'ensemble des atouts privé du 1 et du 21. Il y en a $\binom{21-2=19}{5}$. Le nombre cherché est $\binom{21}{5} - \binom{19}{5}$.

$$\begin{aligned}\binom{21}{5} - \binom{19}{5} &= \frac{21 \times 20 \times 19 \times 18 \times 17}{5!} - \frac{19 \times 18 \times 17 \times 16 \times 15}{5!} \\ &= \frac{19 \times 18 \times 17}{5!} (21 \times 20 - 16 \times 15) = 180 \frac{19 \times 18 \times 17}{5!} \\ &= 9 \times 19 \times 3 \times 17 = 8721\end{aligned}$$

(b) Sinon on utilise les ensembles suivants :

$$\{\text{mains contenant le 1 ou le 21}\} = \underbrace{\{\text{mains contenant le 1}\}}_A \cup \underbrace{\{\text{mains contenant le 21}\}}_B$$

$$\text{card}(A) = \binom{20}{4}, \text{card}(B) = \binom{20}{4}.$$

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$$

$$\text{card}(A \cap B) = \binom{19}{3}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\text{card}(A \cup B) &= 2\binom{20}{4} - \binom{19}{3} \\ &= \frac{2 \times 20 \times 19 \times 18 \times 17}{4 \times 3 \times 2} - \frac{19 \times 18 \times 17}{3 \times 2} \\ &= (19 \times 18 \times 17) \times \left(\frac{20}{4 \times 3} - \frac{1}{3 \times 2}\right) \\ &= (19 \times 18 \times 17) \frac{20-2}{4 \times 3} \\ &= 3 \times 19 \times 9 \times 17 = 8721\end{aligned}$$

3. C'est plus facile de calculer le cardinal de l'ensemble complémentaire :

$$C = \{\text{mains contenant au moins un multiple de 5}\}$$

$$\overline{C} = \{\text{mains contenant aucun multiple de 5}\}$$

Les multiples de 5 sont 5, 10, 15, 20. Ainsi $\overline{C}$ correspond à l'ensemble des parties de cinq éléments pris dans un ensemble à 21 - 4 = 17 éléments. $\overline{C} = \binom{17}{5}$ soit $\text{card}(C) = \binom{21}{5} - \binom{17}{5}$

4. Les multiples de 3 sont 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21. Il y en a 7. Soit

$$D = \{\text{mains contenant exactement un multiple de 3}\}$$

et

$$E = \{\text{mains contenant exactement un multiple de 5}\}.$$

On doit calculer $\text{card}(D \cap E)$. On fait une partition de cet ensemble :

$$\begin{aligned}D \cap E &= \underbrace{\{\text{mains contenant 15 et aucun autre multiple de 3 et 5}\}}_{(D \cap E)_1} \\ \cup &\underbrace{\{\text{mains ne contenant pas le 15 et contenant un multiple de 3 et de 5}\}}_{(D \cap E)_2}\end{aligned}$$

$$\text{card}((D \cap E)_1) = \binom{11}{4}$$

$$\text{card}((D \cap E)_2) = \binom{3}{1} \binom{6}{1} \binom{11}{3}$$

$$\begin{aligned}\text{card}(D \cap E) &= \binom{11}{4} + 18 \times \binom{11}{3} \\ &= 6105\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 8 :

1. Il existe $\binom{32}{8} = 10\,518\,300$ mains différentes.
2. On utilise l'assertion contraire. Soit $\binom{32}{8} - \binom{28}{8} = 10\,518\,300 - 3\,108\,105 = 7\,410\,195$.
3. Soit C l'ensemble des mains contenant au moins un coeur, D l'ensemble des mains contenant au moins une dame.

$$\text{card}(C \cup D) = \binom{32}{8} - \text{card}(\overline{C} \cap \overline{D}).$$

Parmi les 32 cartes, il existe huit coeurs, quatre dames, dont la dame de coeur. D'où $\text{card}(\overline{C} \cap \overline{D}) = \binom{32-8-4+1}{8} = 203\,490$. Enfin, $\text{card}(C \cup D) = 10\,314\,810$ mains de la sorte.

4. Les mains contenant au plus deux couleurs sont celles :

- une unique couleur : $4\binom{8}{8} = 4$ choix possibles.
- deux couleurs : $\binom{4}{2} = 6$ choix des couleurs. Puis, on doit choisir les cartes formant la main. Soit A_k l'ensemble des mains contenant k cartes d'une couleur, et $8 - k$ cartes d'une autre couleur. Alors, le nombre de mains contenant exactement deux couleurs est égal à $\binom{4}{2} \sum_{k=1}^7 \binom{8}{k} \binom{8}{8-k} = \binom{4}{2} [\sum_{k=0}^8 \binom{8}{k} \binom{8}{k} - 2]$. Par propriété (cf DM 10); on obtient :

$$\sum_{k=0}^8 \binom{8}{k} \binom{8}{k} = \binom{16}{8} = 12\,870.$$

Le nombre de mains contenant exactement deux couleurs est 77 208.

Finalement, le nombre de mains de la sorte est égale à 77 212.

Correction de l'exercice 9 :

1. La seule chose qui peut poser problème est que les dominos $\begin{bmatrix} \bullet & \bullet \bullet \bullet \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} \bullet \bullet \bullet & \bullet \end{bmatrix}$ sont les mêmes. Un domino peut donc être vu comme une partie de deux chiffres de l'ensemble $\{0, \dots, 7\}$ lorsque ce n'est pas un double. Le nombre de dominos non doubles est donc $\binom{7}{2} = 21$ et le nombre de doubles est 7. Soit $\boxed{28 \text{ dominos totals.}}$
2. Le tirage se fait **sans remise et successivement**. Le résultat obtenu, deux dominos, est donc ordonné. C'est à dire que le tirage :

$$\left(\begin{bmatrix} & \bullet \bullet \bullet \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bullet \bullet \bullet & \bullet \end{bmatrix} \right)$$

est différent du tirage

$$\left(\begin{bmatrix} \bullet \bullet \bullet & \bullet \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} & \bullet \bullet \bullet \end{bmatrix} \right).$$

On fixe le chiffre pour le premier domino, soit 7 choix. Puis il reste 6 dominos qui possèdent le même chiffre que le premier. On a $7 \times 6 = 42$ tirages de la sorte.

3. Un résultat est un arrangement de 4 dominos pris dans l'ensemble des dominos. Le nombre de tirages est donc $A_{28}^4 = 491\,400$. On a 7 doubles. Le nombre

de tirages sans double est $A_{21}^4 = 143\,640$. Le nombre de tirages possédant au moins un double est $A_{28}^4 - A_{21}^4 = 347\,760$.

Correction de l'exercice 10 :

- (Q 1) On prend n boules parmi $2n$ possibilités. Un résultat se modélise par un sous-ensemble de n éléments pris dans un ensemble de cardinal $2n$. Soit $\binom{2n}{n}$.
- (Q 2) On a $\binom{n}{k}$ possibilités pour les noires et $\binom{n}{n-k}$ pour les autres. Soit $\text{Card}(A_k) = \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}$.
- (Q 3) Les ensembles sont deux à deux disjoints. Par conséquent, $\text{Card}(\cup_{k=0}^n A_k) = \sum_{k=0}^n \text{Card}(A_k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.
D'autre part, $\cup_{k=0}^n A_k$ correspond à l'ensemble de tous les tirages, et son cardinal est $\binom{2n}{n}$.
- (Q 4) On obtient

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$$

Correction de l'exercice 11 :

- $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$ et $\mathcal{F}(E, \{0; 1\}) = \text{Card}\{0; 1\}^{\text{Card}(E)} = 2^n$. Les deux ensembles ont donc même cardinal.
- Soient A et B tels que : $\varphi(A) = \varphi(B)$, c'est à dire tels que $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$. Alors : $A = B$. En effet :

$$\begin{aligned} x \in A &\Leftrightarrow \mathbb{1}_A(x) = 1 \\ &\Leftrightarrow \mathbb{1}_B(x) = 1 \quad \text{car } \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B \\ &\Leftrightarrow x \in B. \end{aligned}$$

On en déduit que φ est injective donc bijective puisque les ensembles de départ et d'arrivée ont même cardinal d'après la question précédente.

Correction de l'exercice 12 :

- Nous avons en tout 6 applications surjectives.
- Dans cette situation, pour avoir une application surjective, un élément y de $\llbracket 1; n \rrbracket$ doit avoir deux antécédents x_1 et x_2 et tous les autres éléments de $\llbracket 1; n \rrbracket$ en dehors de y doivent n'en avoir qu'un seul. Pour dénombrer le nombre total de surjections, on procède donc en suivant les étapes ci-dessous :
 - Choix de y : il y en a n .
 - Choix de x_1 et x_2 : il s'agit de choisir simultanément (que l'on tire 1 puis 3 ou 3 puis 1 donnera la même application donc il suffit de faire un tirage simultané) deux éléments parmi les $n+1$ disponibles, c'est à dire : $\binom{2}{n+1}$.
 - Une fois x_1, x_2 et y choisis, et puisque tous les autres éléments de $\llbracket 1; n \rrbracket$ en dehors de y doivent n'avoir qu'un seul antécédent, on se ramène à compter le nombre de bijections de $E = \llbracket 1; n+1 \rrbracket - \{x_1, x_2\}$ vers $F = \llbracket 1; n \rrbracket - \{y\}$. Puisque $\text{Card}(E) = \text{Card}(F) = n-1$, on obtient $(n-1)!$ bijections de E vers F .

$$\begin{aligned} \text{Nous avons donc au final : } n \times \binom{n+1}{2} \times (n-1)! &= \\ n \times \frac{(n+1)n}{2} \times (n-1)! &= \frac{n \cdot (n+1)!}{2} \text{ surjections.} \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 14 :

- (Q 1) $u_0 = v_0 = 0$; $u_1 = 1(a), v_1 = 1(b)$; $u_2 = 1(ba)$; $v_2 = 2(bb, ab)$; $u_3 = 2(aba, bba)$; $v_3 = 3(abb, bab, bbb)$.
- (Q 2) Si mot de $n+1$ lettres finit par un a , alors les n premières lettres constituent un mot finissant par un b . La réciproque est vraie. Donc leurs nombres sont égaux et $u_{n+1} = v_n$.
- (Q 3) Si un mot de $n+1$ lettres finit par un b alors les n premières lettres constituent un mot finissant soit par un b soit par un a . La réciproque est vraie. Donc leurs nombres sont égaux. et $v_{n+1} = \text{Card}(V_n \cup W_n) = u_n + v_n$.
- (Q 4) Ainsi, $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$. C'est donc une suite linéaire d'ordre 2. On obtient

$$v_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right]^n - \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right]^n \right)$$

$$\forall n \geq 1, u_n = v_{n-1} = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right]^{n-1} - \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right]^{n-1} \right)$$

(Q 5) $\text{Card}(E_n) = u_n + v_n = v_{n-1} + v_n = v_{n+1} = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right]^{n+1} - \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right]^{n+1} \right)$

* * *

* *

*