TD 14

Calcul matriciel

LES INCONTOURNABLES

Exercice 1 : [corrigé] On considère : $A = \begin{pmatrix} 18 & 9 & -12 & -15 \\ -12 & -6 & 8 & 10 \\ 24 & 12 & -16 & -20 \\ 36 & 18 & -24 & -30 \end{pmatrix}$.

1. On note $C = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice ligne L pour laquelle : $A = CL$.
2. Calculer LC et en déduire une expression simple de A^n pour tout entier positif n.

Exercice 2 : [solutions] Calculer la puissance n-ème de : $D = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 3 : [solutions] Calculer les puissances n-ème des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 7 & -6 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \lambda & \mu \end{pmatrix} ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on considère les matrices $S = \dfrac{A + A^T}{2}$ et $T = \dfrac{A - A^T}{2}$.

(Q 1) Calculer S et T lorsque $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Que constate-t-on ?

(Q 2) Montrer que pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ quelconque, S est symétrique, T est antisymétrique et $A = S + T$.

Exercice 5 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer toutes les matrices M telles que : (a) $AM = 0_3$; (b) $AM = MA$.
2. En utilisant uniquement les résultats précédents, montrer que la matrice A n'est pas inversible.

Exercice 6 : On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $a_{ij} = \dfrac{i}{j}$. Exprimer simplement A^2 en fonction de A, puis montrer que A n'est pas inversible.

Exercice 7 : Inversez les matrices suivantes lorsque cela est possible.

$$\text{(a) } A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} ; \quad \text{(b) } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} ; \quad \text{(c) } C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \text{(d) } D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8 : [corrigé] Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 15 & -9 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

(Q 1) Montrer que P est inversible et calculer son inverse P^{-1}.

(Q 2) Calculer $B = P^{-1}AP$.

(Q 3) Exprimer A^n en fonction de $P; B; P^{-1}$ et $n \in \mathbb{N}$.

(Q 4) Calculer B^n puis A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

(Q 5) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites vérifiant $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$ et telles que $\left\{ \begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & 2u_n - 2v_n \\ v_{n+1} & = & 15u_n - 9v_n \end{array} \right.$

On note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

(Q a) Exprimer X_{n+1} en fonction de X_n.

(Q b) En déduire X_n en fonction de $A; X_0$ et $n \in \mathbb{N}$.

(Q c) Exprimer alors le terme général des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 9 : [corrigé] Soit $A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

(Q 1) Exprimer A^2 comme combinaison linéaire de A et de I_2.

(Q 2) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe deux réels α_n et β_n tels que $A^n = \alpha_n A + \beta_n I_2$, et donner une expression de α_{n+1} et β_{n+1} en fonction de α_n et β_n.

(Q 3) Exprimer α_{n+2} en fonction de α_{n+1} et α_n.

(Q 4) En déduire l'expression générale de A^n.

(Q 5) Application : Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n)$ et $v_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + v_n)$. Démontrer que ces suites convergent et calculer leurs limites.

Exercice 10 : Soit $(a_1, \cdots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1+a_n \end{pmatrix} = D + J$$

avec J la matrice formée que de 1 et $D = \mathrm{diag}(a_1, \cdots, a_n)$.

(Q 1) Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$. Expliquez pourquoi on peut effectuer le calcul $a = X^T AX$ et dites à quel ensemble appartient a.

(Q 2) Calculer $X^T AX$ en utilisant $A = D + J$.

(Q 3) Montrer alors que A **est inversible.**

POUR S'ENTRAÎNER

Exercice 11 : [corrigé] Soit A et B deux matrices symétriques de même taille. Montrer que AB est symétrique si et seulement si $AB = BA$.

Exercice 12 : [solutions] Calculer les puissances n-ème des matrices suivantes :

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \; ; \quad F = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & 7 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Exercice 13 : Déterminer si la matrice A est inversible puis résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ les équations $AX = B$ puis $XA = B$ pour les valeurs de A et B suivantes :

$$\text{(a)} \;\; A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \; ; \;\; \text{(b)} \;\; A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 14 : Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

(Q 1) Démontrer qu'il existe $a; b \in \mathbb{R}$ tels que $A^2 = aA + bI_2$.

(Q 2) En déduire que A est inversible et donner son inverse.

Exercice 15 : [corrigé] Soit j le complexe défini par $j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$ et A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}.$$

Calculer A^4. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 16 : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(Q 1) Calculer A^2 et vérifier que $A^2 = A + 2I_3$.

(Q 2) En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A.

Exercice 17 : [corrigé] Soit A, B et C trois matrices non nulles telles que $ABC = 0$. Montrer qu'au plus une des trois est inversible.

Exercice 18 : [indications] On dit que $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ est nilpotente lorsqu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que : $A^r = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{K})}$.

(Q 1) Montrer que $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente.

(Q 2) Montrer qu'une matrice nilpotente ne peut être inversible.

Exercice 19 :

(Q 1) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^p = 0$. Calculer $(I_n - M)\sum_{k=0}^{p-1} M^k$.

(Q 2) En déduire que $I_n - M$ est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 20 : On considère la matrice $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Exprimer simplement J^2 en fonction de J, puis montrer que J n'est pas inversible.

Exercice 21 : Soient les matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\qquad B = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 13 \\ -4 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$.

(Q 1) Montrer que A est inversible.

(Q 2) Calculer AB et montrer que B est équivalente à $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 7 & 13 \end{pmatrix}$

(Q 3) En déduire que B, puis AB n'est pas inversible.

Exercice 22 : Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sin(\alpha) \\ -1 & 0 & \cos(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer M^2 et M^3.
2. On pose $A(x) = I_3 + xM + \frac{x^2}{2}M^2$. Comparer $A(x+y)$ et $A(x)A(y)$.
3. En déduire que $A(x)$ est inversible pour tout $x \in \mathbb{R}$ et déterminer $A^{-1}(x)$.

Indications

Exercice 18 :

1. Calculer A^2 et A^3.
2. Un produit de matrices inversible est inversible.

Solution de l'exercice 2 :

$\forall n \geq 2, D^n = 2^n I_3 + n2^{n-1}T + n(n-1)2^{n-3}T^2$.

Solution de l'exercice 3 :

1. $A^{2n} = I_2, A^{2n+1} = A$
2. $\forall n \geq 1, B^n = (\lambda+\mu)^{n-1}B$
3. $\forall n \geq 1, C^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$

Solution de l'exercice 12 :

1. $E^n = 3^{n-1}E$ (par récurrence).
2. $F^n = 3^{n-1}[5^n - 1]E + 3^n I_3$.

Correction de l'exercice 1 :

1. $L = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -4 & -5 \end{pmatrix}$.
2. $LC = -34$ donc : $A^n = (CL)^n = C\underbrace{(LC)(LC)\dots(LC)}_{n-1 \text{ termes}} =$ $C(-34)^{n-1}L = (-34)^{n-1}CL = (-34)^{n-1}A$.

Correction de l'exercice 8 :

(Q 1) $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right)$

$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right)$

$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right)$

(Q 2) Par calcul matriciel, $B = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & -6 \\ -12 & -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

(Q 3) On exprime dans un premier temps A en fonction de B. Si $B = P^{-1}AP$, alors $PB = AP$ en multipliant à gauche par P et car $PP^{-1} = I_2$. En multipliant l'égalité obtenue par P^{-1} à droite, on en déduit : $A = PBP^{-1}$.
Alors : $A^2 = PBP^{-1}PBP^{-1} = PB(P^{-1}P)BP^{-1} = PBI_2BP^{-1} = PB^2P^{-1}$. On conjecture alors : $A^n = PB^nP^{-1}$, ce que l'on vérifie par récurrence :

- **Initialisation :** Pour $n = 0$, $A^0 = I_2$, $B^0 = I_2$ donc $PB^0P^{-1} = I_2$ ce qui prouve l'initialisation.
- **Hérédité :** Si $A^n = PB^nP^{-1}$ (Hypothèse de récurrence), alors : $A^{n+1} = A^nA = PB^nP^{-1}A$ (d'après l'hypothèse de récurrence). Or : $A = PBP^{-1}$ donc : $PB^nP^{-1}A = PB^nP^{-1}PBP^{-1} = PB^nBP^{-1} = PB^{n+1}B^{-1}$. Ce qui prouve l'hérédité.

(Q 4) On en déduit, par exemple par récurrence, que : $B^n = \begin{pmatrix} (-4)^n & 0 \\ 0 & (-6)^n \end{pmatrix}$, puis $A^n = PB^nP^{-1}$ donc :

$$A^n = \begin{pmatrix} -5\times(-4)^n + 6\times(-3)^n & 2\times(-4)^n - 2\times(-3)^n \\ -15\times(-4)^n + 15\times(-3)^n & 6\times(-4)^n - 5\times(-3)^n \end{pmatrix}$$

(Q 5) (Qa) Nous avons : $X_{n+1} = AX_n$.

(Qb) On en déduit : $X_n = A^nX_0$ par récurrence :

- **Initialisation :** Pour $n = 0$, $A_0 = I_2$ donc : $A_0X_0 = X_0$ ce qui prouve l'initialisation.
- **Hérédité :** Si $X_n = A^nX_0$ (hypothèse de récurrence), alors : $X_{n+1} = AX_n = A(A^nX_0) = A^{n+1}X_0$, ce qui prouve l'hérédité.

(Qc) Ici $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc par calcul matriciel : $X_n = \begin{pmatrix} 2(-1)^n(4^n - 3^n) \\ (-1)^n(6.4^n - 5.3^n) \end{pmatrix}$. Par conséquent : $u_n = 2(-1)^n(4^n - 3^n)$ et $v_n = (-1)^n(6.4^n - 5.3^n)$.

Correction de l'exercice 9 :

(Q 1) Par produit matriciel, $A^2 = \dfrac{1}{36}\begin{pmatrix} 21 & 15 \\ 20 & 16 \end{pmatrix}$. Or, $\begin{pmatrix} 21 & 15 \\ 20 & 16 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = 5\times 6A + 6I_2$.
On en déduit : $A^2 = \dfrac{5}{6}A + \dfrac{1}{6}I_2$.

(Q 2) Notons $\mathcal{P}(n)$ « Il existe deux nombres réels α_n et β_n tels que $A^n = \alpha_nA + \beta_nI_2$ ».

- **Initialisation :** Pour $n = 0$, nous avons : $I^2 = A^0 = \alpha_0A + \beta_0I_2$ avec $\alpha_0 = 0$ et $\beta_0 = 1$.
- **Hérédité :** Si $A^n = \alpha_nA + \beta_nI_2$ pour un certain n fixé, alors : $A^{n+1} = A^nA = \alpha_nA^2 + \beta_nA$. On en déduit : $A^{n+1} = \alpha_n\left(\dfrac{5}{6}A + \dfrac{1}{6}I_2\right) + \beta_nA$ c'est à dire : $A^{n+1} = \left(\dfrac{5}{6}\alpha_n + \beta_n\right) + \dfrac{\alpha_n}{6}I_2$. En posant : $\alpha_{n+1} = \dfrac{5}{6}\alpha_n + \beta_n$ et $\beta_{n+1} = \dfrac{\alpha_n}{6}$, on prouve alors l'hérédité.

(Q 3) Puisque : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_{n+1} = \dfrac{5}{6}\alpha_n + \beta_n$ on en déduit : $\alpha_{n+2} = \dfrac{5}{6}\alpha_{n+1} + \beta_{n+1}$. Or $\beta_{n+1} = \dfrac{\alpha_n}{6}$ d'après ci-dessus, donc : $\alpha_{n+2} = \dfrac{5}{6}\alpha_{n+1} + \dfrac{1}{6}\alpha_n$.

(Q 4) Il s'agit d'une suite récurrente linéaire double. On résout : $r^2 = \dfrac{5}{6}r + \dfrac{1}{6} \Leftrightarrow r = 1$ ou $r = -\dfrac{1}{6}$. Il s'ensuit : $\alpha_n = A + B\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n$. Or $\alpha_0 = 0$ et $\alpha_1 = 1$ (car $A = \alpha_1A + \beta_1I_2$ avec $\alpha_1 = 1$ et $\beta_1 = 0$) donc : $\begin{cases} A + B = 0 \\ A - \dfrac{B}{6} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -\dfrac{6}{7} \\ A = \dfrac{6}{7} \end{cases}$ Conclusion : $\alpha_n =$

$\frac{6}{7}\left(1-\left(-\frac{1}{6}\right)^n\right)$. Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\beta_{n+1} = \frac{\alpha_n}{6}$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\beta_n = \frac{\alpha_{n-1}}{6}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{A^n = \frac{6}{7}\left(1-\left(-\frac{1}{6}\right)^n\right) A + \frac{1}{7}\left(1-\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right) I_2.}$$

(Q 5) Si l'on pose : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, alors : $X_{n+1} = AX_n$ donc : $X_n = A^n X_0$ (voir l'exercice ci-dessus pour les détails). De plus, d'après l'énoncé, $X_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ donc $AX_0 = \begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} \\ \frac{2a+b}{3} \end{pmatrix}$.

Ainsi,

$$X_n = \frac{6}{7}\left(1-\left(-\frac{1}{6}\right)^n\right) AX_0 + \frac{1}{7}\left(1-\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right) X_0,$$

ce qui donne :

$$u_n = \frac{3(a+b)}{7}\left(1-\left(-\frac{1}{6}\right)^n\right) + \frac{a}{7}\left(1-\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right) \to \frac{4a+3b}{7}$$

$$v_n = \frac{4a+2b}{7}\left(1-\left(-\frac{1}{6}\right)^n\right) + \frac{b}{7}\left(1-\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right) \to \frac{4a+3b}{7}.$$

Correction de l'exercice 11 :

AB est symétrique si et seulement si $(AB)^T = AB$ si et seulement si $B^T A^T = AB$ si et seulement si $BA = AB$ car A et B sont symétriques.

Correction de l'exercice 15 :

Puisque $j^3 = 1$, $j^4 = j$ et $1 + j + j^2 = 0$, on en déduit : $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Alors par calcul matriciel : $A^4 = A^2A^2 = 9I_3$.

Or : $A^4 = 9I_3 \Leftrightarrow A\left(\frac{A^3}{9}\right) = I_3$. Ainsi, en posant : $B = \frac{A^3}{9}$, on constate que $AB = BA = \frac{A^4}{9} = I_3$, ce qui prouve que B est l'inverse de A, et donc que A est inversible.

Correction de l'exercice 17 :

On raisonne par l'absurde. Si au moins deux sont inversibles alors :

1. Si A, B le sont alors $ABC = O_{nn} \Rightarrow B^{-1}A^{-1}ABC = B^{-1}A^{-1}O_{nn} \Rightarrow C = O_{nn}$ ce qui est absurde car C n'est pas nulle.
2. Si A, C le sont alors $ABC = O_{nn} \Rightarrow A^{-1}ABCC^{-1} = A^{-1}O_{nn}C^{-1} \Rightarrow B = O_{nn}$ ce qui est absurde car B n'est pas nulle.
3. Si C, B le sont alors $ABC = O_{nn} \Rightarrow ABCC^{-1}B^{-1} = O_{nn}C^{-1}B^{-1} \Rightarrow A = O_{nn}$ ce qui est absurde car A n'est pas nulle.

⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆