

Calcul algébrique réel

LES INCONTOURNABLES

Logique

Exercice 1 : Compléter, lorsque cela est possible, les pointillés par $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ ou $\Leftrightarrow$:

$$(a) x^3 = 2x^2 \dots x = 2; \quad (b) x \leq -2 \dots x^2 \leq 4; \quad (c) x \geq 3 \dots x^2 \geq 3x;$$

$$(d) x \geq -3 \dots x^2 \geq -3x; \quad (e) x \geq 2 \dots \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}; \quad (f) x \leq -1 \dots \frac{1}{x} \geq -1.$$

Ensembles

Exercice 2 : [corrigé] Soient E un ensemble et A, B, C trois parties de E telles que : $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$. Montrer que $B = C$.

Exercice 3 : [corrigé] Soit E un ensemble. Pour toutes parties A et B de E , on pose :

$$A \Delta B = (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B}).$$

Montrer que $A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$.

Équations et inéquations élémentaires

Exercice 4 : [solutions] Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ci-dessous :

$$(a) x^2 - x = \sqrt{2}(x+1); \quad (b) x^3 - 39x + 70 = 0; \quad (c) x^4 - 4x^2 + 3 = 0;$$

$$(d) \frac{1}{x} = 2x + 1; \quad (e) \sqrt{x+1} = \sqrt{2x-3}; \quad (f) \sqrt{x^2-3x-3} = x+2.$$

Exercice 5 : [solutions] Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ci-dessous de paramètre réel m :

$$(a) 2mx - 3 = x + 5m; \quad (b) x^2 + mx - 2m^2 = 0; \quad (c) (m-1)x^2 - 2(m-2)x + m+1 = 0.$$

Exercice 6 : [solutions] Résoudre les inéquations suivantes :

$$(a) x^3 < x; \quad (b) (x^2 + x + 1)^2 - 4(x^2 - x + 1)^2 > 0; \quad (c) \frac{2x-3}{x^2-4} < 1;$$

$$(d) \frac{x-2}{2x-2} \leq \frac{x-1}{x-5}; \quad (e) \frac{x+3}{x-3} - \frac{x-3}{x+3} \leq \frac{36}{x^2-9}; \quad (f) \sqrt{x+1} < \sqrt{3-2x};$$

$$(g) \sqrt{x^2+5x+3} < x+2;$$

Inégalités et encadrements

Exercice 7 : [corrigé] Soient a et b , deux réels strictement positifs distincts.

1. Montrer que $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2$;
 2. Montrer que $\frac{1}{a+b} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$;
 3. Montrer que $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
-

Résolution de petits systèmes

Exercice 8 : [solutions] Résoudre les systèmes suivants :

$$(a) \begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ 3x + 6y = 15 \end{cases} ; \quad (b) \begin{cases} 4x - 2y = 5 \\ -6x + 3y = 1 \end{cases} ;$$

$$(c) \begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ x - 2y = 5 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases} ;$$

Exercice 9 : Résoudre les systèmes suivants :

$$(a) \begin{cases} 5x - 6y = m \\ 6x - 7y = m + 1 \end{cases} ; \quad (b) \begin{cases} mx + y = 1 \\ 3x - 2y = 6 \end{cases} .$$

POUR S'ENTRAÎNER

Logique

Exercice 10 : [corrigé]

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? On justifiera si une proposition est vraie, sinon on justifiera pourquoi elle est fausse. En particulier, on écrira **la négation** de la proposition.

- | | |
|--|---|
| (a) $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 2$; | (d) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, p = 2n$; |
| (b) $\exists x \in \mathbb{N}, 2 < x < 4$; | (e) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y = x^2$; |
| (c) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, n = 2p$; | (f) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y = x^2$; |

Exercice 11 : Les assertions suivantes sont-elles vraies ?

- Une condition nécessaire pour $x \geq 2$ est $x \geq 4$;
- Une condition suffisante pour $x \geq 2$ est $x \geq 4$.

Exercice 12 : Pour chacune des propositions énoncées, indiquez quelles sont les conditions nécessaire (CN), les conditions suffisantes (CS), les conditions nécessaires et suffisantes (CNS), et ce qui n'a rien à voir.

" Le polynôme $P(x) = x^2 + bx + c$ admet deux racines réelles distinctes."

- | | |
|------------------------|-----------------|
| 1. $b^2 - 4c > 0$. | |
| 2. $b^2 - 4c \geq 0$. | 4. $P(0) = 7$. |
| 3. $c < 0$. | |

Exercice 13 : Montrer que toute fonction réelle peut s'écrire comme somme d'une fonction paire avec une fonction impaire.

Ensembles

Exercice 14 : Soient A, B et C trois ensembles tels que :
$$\begin{cases} A \cup B = A \cap C \\ B \cup C = B \cap A \\ C \cup A = C \cap B \end{cases}$$
. Montrer que $A = B = C$.

Exercice 15 : Soient A, B, C et D quatre ensembles tels que : $A \subset C, B \subset D, C \cap D = \emptyset$ et $A \cup B = C \cup D$. Montrer que $A = C$ et $B = D$.

Exercice 16 : Soit E un ensemble et $A \subset E$, on appelle fonction caractéristique de A et on note $\mathbb{1}_A$ la fonction définie sur E telle que :
$$\begin{cases} \mathbb{1}_A(x) = 1 \text{ si } x \in A \\ \mathbb{1}_A(x) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Soient A et B deux sous-ensembles quelconques de E .

- Montrer que $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$.
- Montrer que $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A \cap B}$.

Équations et inéquations élémentaires

Exercice 17 : [solutions] [corrigé] Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ci-dessous :

$$(a) \frac{x-2}{x+2} - \frac{x+2}{x-2} = \frac{18}{x^2-4}; \quad (b) \sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2-2} = 3; \quad (c) \sqrt{1-2x} = x+1;$$

Exercice 18 : [solutions] Résoudre les inéquations suivantes :

$$(a) x^4 + 2x^2 - 3 < 0; \quad (b) 2 - x < \sqrt{x+1}.$$

Exercice 19 : [solutions] [corrigé] Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ci-dessous :

$$(a) (m+1)x^2 + (m+1)x + 1 = 0;$$

$$(b) (m+1)x^2 + (m+1)x + 1 = 0 \text{ (l'inconnue est } m \text{)}.$$

Exercice 20 : Montrer que : $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 + xy \geq 0$.

Exercice 21 : [indications] Soient x et y , des réels positifs.

$$1. \text{ Montrer que } \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{x+y+2\sqrt{xy}};$$

$$2. \text{ Montrer que } x+y \geq 2\sqrt{xy}. \text{ Pour quelles valeurs de } x \text{ et } y \text{ a-t-on égalité?}$$

$$3. \text{ On suppose de plus } z \geq 0. \text{ En déduire : } (x+y)(y+z)(x+z) \geq 8xyz.$$

Résolution de petits systèmes linéaires

Exercice 22 : [corrigé] [solutions] Déterminer ci-dessous les valeurs de k pour lesquelles le système admet (1) aucune solution, (2) plus d'une solution, (3) une solution unique :

$$(a) \begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1 \end{cases} ; \quad (b) \begin{cases} x + 2y + kz = 1 \\ 2x + ky + 8z = 3 \end{cases}.$$

Exercice 23 : Discuter en fonctions des valeurs des réels a, b et c l'ensemble des solutions du système

$$\text{suivant : } \begin{cases} 2x - y + z = a \\ -x + 2y + 2z = b \\ 4x - 5y - 3z = c \end{cases}.$$

Exercice 24 : [solutions] Résoudre les systèmes linéaires d'inconnues x, y, z où m est un paramètre réel :

$$(a) \begin{cases} x + y + mz = m \\ x + my - z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases} ; \quad (b) \begin{cases} x - y + z = 1 \\ mx - 2y + mz = 2 \\ x - my + 2z = 1 \end{cases}.$$

DIVERS

Exercice 25 : [corrigé]

Lorsqu'un satellite tourne autour de la Terre avec une vitesse uniforme sur une orbite circulaire, on calcule sa vitesse V à l'aide de la formule :

$$V = R\sqrt{\frac{g}{R+h}},$$

où R est le rayon de la terre en mètres : $R = 6378 \times 10^3$, h est l'altitude en mètres du satellite, $g = 9,81 m.s^{-2}$ est l'accélération de la pesanteur.



1. Exprimer h en fonction de V , g et R .
2. À quelle altitude gravite un satellite qui se déplace à la vitesse de 20000 kilomètres à l'heure ?

Exercice 26 : On note a , b et c trois nombres réels et on pose : $x = 3a+2b+2c$, $y = 2a+b+2c$ et $z = 2a+2b+c$. Montrer que si $a^2 = b^2 + c^2$, alors $x^2 = y^2 + z^2$.

Indications

Exercice 21 :

1. Élever au carré.
2. On peut reconnaître une identité remarquable.
3. On utilise l'inégalité précédente afin d'obtenir une minoration de $x + y$, $x + z$ et $y + z$. Il suffit alors de faire le produit des inégalités obtenues.

Solution de l'exercice 2 :

- Montrons que $B \subset C$. On considère $x \in B$ et on veut montrer que $x \in C$. Puisque : $B \subset A \cup B$, nous avons : $x \in A \cup B = A \cup C$. Nous avons donc deux possibilités :
 - $x \in A$ donc : $x \in A \cap B = A \cap C$. Ainsi, $x \in C$.
 - $x \in C$, ce qu'il fallait démontrer.
- Montrons que $C \subset B$. On considère $x \in C$ et on veut montrer que $x \in B$. Puisque : $C \subset A \cup C$, nous avons : $x \in A \cup C = A \cup B$. Nous avons donc deux possibilités :
 - $x \in A$ donc : $x \in A \cap C = A \cap B$. Ainsi, $x \in B$.
 - $x \in B$, ce qu'il fallait démontrer.

Par double inclusion, on en déduit : $B = C$.

Solution de l'exercice 4 :

$$(a) S = \left\{ \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3 + 6\sqrt{2}}}{2}; \frac{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3 + 6\sqrt{2}}}{2} \right\},$$

$$(b) S = \{-7; 2; 5\}, \quad (c) S = \{-\sqrt{3}; -1; 1; \sqrt{3}\}, \quad (d) S = \{-1; \frac{1}{2}\}, \quad (e) S = \{4\}, \quad (f) S = \{-1\}$$

Solution de l'exercice 5 :

- (a) Si $m = 1/2$, $S_m = \emptyset$, sinon, $S_m = \{\frac{3+5m}{2m-1}\}$.
- (b) $S_m = \{m; -2m\}$.
- (c) (a) si $m = 1$ alors $S_1 = \{-1\}$.
- (b) Si $m \neq 1$ alors
 - i. si $m > 5/4$; $S = \emptyset$
 - ii. si $m = 5/4$, $S = \{-3\}$
 - iii. si $m < 5/4$, $S = \{\frac{(m-2) \pm \sqrt{5-4m}}{m-1}\}$

Solution de l'exercice 6 :

$$(a) S =]-\infty; -1[\cup]0; 1[, \quad (b) S = \left] \frac{3 - \sqrt{5}}{2}; \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right[,$$

$$(c) S =]-\infty; -2[\cup]-\sqrt{2} + 1; 2[\cup]1 + \sqrt{2}; +\infty[, \quad (d) S = \left] -\infty; \frac{-3 - \sqrt{41}}{2} \right] \cup \left] 1; \frac{-3 + \sqrt{41}}{2} \right] \cup]5; +\infty[,$$

$$(e) S =]-\infty; -3[; \quad (f) S = [-1; \frac{2}{3}[, \quad (g) S = \left[\frac{-5 + \sqrt{13}}{2}; 1[\right.$$

Solution de l'exercice 8 :

$$(a) S = \{(5 - 2y; y), y \in \mathbb{R}\}, \quad (b) S = \emptyset, \quad (c) S = \{(3; -1)\}.$$

Solution de l'exercice 17 :

$$(a) S = \left\{ -\frac{9}{4} \right\}, \quad (b) S = \emptyset, \quad (c) S = \{0\}.$$

Solution de l'exercice 18 :

$$(a) S =]-1; 1[, \quad (b) S = \left] \frac{5 - \sqrt{13}}{2}; +\infty \right[.$$

Solution de l'exercice 19 :

- (a) (a) si $m = -1$ alors $S = \emptyset$
- (b) si $m \neq -1$
 - i. si $m \in]-1; 3[$, $S = \emptyset$
 - ii. si $m = 3$ alors $S = \{-1/2\}$
 - iii. si $m \in]-\infty; -1[\cup]3; +\infty[$ alors $S = \left\{ \frac{-(m+1) \pm \sqrt{(m+1)(m-3)}}{2(m+1)} \right\}$
- (b) (a) Si $x \in \{0; -1\}$, $S = \emptyset$
- (b) Sinon, $S = \left\{ \frac{-(x^2 + x + 1)}{x^2 + x} \right\}$.

Solution de l'exercice 22 :

- (a) pour $k = 1$, nous avons une infinité de solutions, pour $k = -2$ nous n'avons pas de solutions et pour $k \neq 1$ et -2 , nous avons une unique solution, (b) pour $k = 4$, nous n'avons pas de solutions et pour $k \neq 4$ nous avons une infinité de solutions.

Solution de l'exercice 24 :

$$(a) \text{ Si } m = 1, S = \{(1 - y; y; 0), y \in \mathbb{R}\}. \text{ Sinon } S = \left\{ \left(\frac{2m}{m+1}; 0; \frac{m-1}{m+1} \right) \right\}, \quad (b) \text{ Si } m = 2, S = \{(1; z; z), z \in \mathbb{R}\}. \text{ Sinon } S = \{(m-1; -1; 1-m)\}.$$

Correction de l'exercice 3 :

Par définition : $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ donc $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$ ce qui justifie la deuxième égalité. Par ailleurs :

$$(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) = ((A \cap \overline{B}) \cup B) \cap ((A \cap \overline{B}) \cup \overline{A})$$

par distributivités de $\cap$ et $\cup$. Or, toujours selon les mêmes propriétés :

$$((A \cap \overline{B}) \cup B) = (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup B) = (A \cup B) \cap E = A \cup B.$$

$$\begin{aligned} ((A \cap \overline{B}) \cup \overline{A}) &= (A \cup \overline{A}) \cap (\overline{B} \cup \overline{A}) \\ &= E \cap (\overline{B} \cup \overline{A}) \\ &= \overline{B} \cup \overline{A} \\ &= \overline{A \cap B} \end{aligned}$$

Au final, nous en déduisons : $(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) = (A \cup B) \cap \overline{A \cap B}$, ce qui puisque : $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \cap \overline{A \cap B}$ par définition, démontre que : $A \Delta B =$

$$(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}).$$

Correction de l'exercice 7 :

1.

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2 \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2}{ab} > 2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 > 2ab$$

puisque le sens d'une inégalité ne change pas par multiplication par un réel strictement positif. Finalement

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab > 0 \Leftrightarrow (a - b)^2 > 0$$

Cette dernière inégalité est vraie puisque les réels a et b sont distincts. Par équivalences successives, nous avons démontré que l'inégalité $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2$ est vraie.

2. Procédons de même :

$$\frac{1}{a+b} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Leftrightarrow \frac{1}{a+b} < \frac{b+a}{ab} \Leftrightarrow ab \leq (b+a)^2 (*)$$

puisque le sens d'une inégalité ne change pas par multiplication par un réel strictement positif.

$$(*) \Leftrightarrow ab < a^2 + b^2 + 2ab \Leftrightarrow 0 < a^2 + ab + b^2$$

Les nombres précédents sont strictement positifs. Par conséquent, l'inégalité est vraie et par équivalences successives, la première l'est aussi.

3.

$$\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b} \Leftrightarrow a+b < (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$$

car la fonction carrée est strictement croissante sur $[0 : +\infty[$.

$$(*) \Leftrightarrow a+b < a+b+2\sqrt{ab} \Leftrightarrow 0 < \sqrt{ab}$$

L'inégalité est vraie et par équivalences successives, la première l'est aussi.

Correction de l'exercice 10 :

- (a) « $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 2$ » est fausse car $3 \in \mathbb{R}$ mais $3 > 2$. Sa négation est : « $\exists x \in \mathbb{R} / x < 2$ ».
- (b) « $\forall x \in \mathbb{N}, 2 < x < 4$ » est fausse car $5 \in \mathbb{N}$ mais $5 \notin]2; 4[$. Sa négation est : « $\exists x \in \mathbb{N} / x \leq 2$ ou $x \geq 4$ ».
- (c) « $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, n = 2p$ » est fausse car $3 \in \mathbb{N}$ mais il n'existe pas de $p \in \mathbb{N}$ pour lequel : $3 = 2p$ (sinon $p = \frac{3}{2} \notin \mathbb{N}$). Sa négation est « $\exists n \in \mathbb{N} / \forall p \in \mathbb{N}, n \neq 2p$ » (ce qui veut dire qu'il existe des nombres impairs).
- (d) « $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, p = 2n$ » est vraie car si $n \in \mathbb{N}$ quelconque, alors en posant $p = 2n$ la relation $p = 2n$ est bien vérifiée. Sa négation est : « $\exists n \in \mathbb{N} / \forall p \in \mathbb{N}, p \neq 2n$ ».
- (e) « $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y = x^2$ » est vraie car si $x \in \mathbb{R}$ est quelconque, en posant $y = x^2$ la relation est bien vérifiée. Sa négation est : « $\exists x \in \mathbb{R} / \forall y \in \mathbb{R}, y \neq x^2$ ».
- (f) « $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y = x^2$ » est fausse car sa négation est vraie. En effet, sa négation est : « $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} / y \neq x^2$ ».

x^2 ce qui est vrai car si $x \in \mathbb{R}$ est quelconque, alors en posant $y = x^2 + 1$ nous avons bien $y \neq x^2$.

Correction de l'exercice 13 :

Soit f une fonction réelle.

Par analyse synthèse :

ANALYSE : Si $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ avec f_1 paire et f_2 impaire. Alors : $f(-x) = f_1(-x) + f_2(-x)$ ce qui s'écrit encore $f_1(x) - f_2(x) = f(-x)$ car f_1 et f_2 sont respectivement paires et impaires. Nous avons donc :

$$f_1(x) + f_2(x) = f(x) \quad (1)$$

$$f_1(x) - f_2(x) = f(-x) \quad (2)$$

En sommant cela donne $f(x) + f(-x) = 2f_1(x)$ soit $f_1(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$. De même en faisant la différence nous obtenons : $f_2(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$.

Nous avons montré : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ avec f_1 paire et f_2 impaire $\Rightarrow f_1(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $f_2(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$.

SYNTHÈSE : Posons : $f_1(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $f_2(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$. Alors :

$$f_1(x) = \frac{f(-x) + f(-(-x)x)}{2} = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = f_1(x)$$

donc f_1 est paire.

$$\text{De même : } f_2(x) = \frac{f(-x) - f(-(-x)x)}{2} = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -f_2(x) \text{ donc } f_2 \text{ est impaire.}$$

$$\text{De plus : } f_1(x) + f_2(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = f(x).$$

On a donc montré : $f_1(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $f_2(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ avec f_1 paire et f_2 impaire.

Au final : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ avec f_1 paire et f_2 impaire $\Leftrightarrow f_1(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $f_2(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$ ce qui prouve que toute fonction réelle s'écrit comme somme d'une fonction paire et impaire.

Correction de l'exercice 17 :

— (b) :

- Analyse :

$$\begin{aligned} & \sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2-2} = 3 \\ \Rightarrow & x^2-1 + 2\sqrt{x^2-1}\sqrt{x^2-2} + x^2-2 = 9 \\ \Rightarrow & \sqrt{x^2-1}\sqrt{x^2-2} = 6-x^2 \\ \Rightarrow & (x^2-1)(x^2-2) = 36-12x^2+x^4 \\ \Rightarrow & x^2 = \frac{34}{9} \\ \Rightarrow & x = \pm \frac{\sqrt{34}}{3} \end{aligned}$$

- Synthèse : Si $x = \pm \frac{\sqrt{34}}{3}$ Alors $x^2-1 = \frac{25}{9}$
et $x^2-2 = \frac{16}{9}$ d'où : $\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2-2} = \frac{5}{3} + \frac{4}{3} = 3$.

Conclusion : Par analyse-synthèse nous avons :

$$S = \left\{ \pm \frac{\sqrt{34}}{3} \right\}.$$

Correction de l'exercice 19 :

- (a) • Si $m = -1$ l'équation devient : $1 = 0$ ce qui est impossible : $S = \emptyset$
• Si $m \neq -1$ nous reconnaissons un trinôme de discriminant : $\Delta = (m+1)^2 - 4(m+1) = (m+1)(m+1-4) = (m+1)(m-3)$.

Le signe du discriminant est donc déterminé par le signe du trinôme : $(m+1)(m-3)$, donc positif à l'extérieur de ses racines qui sont -1 et 3 . Ceci amène trois cas :

- $m \in]-1; 3[$. Alors : $\Delta < 0$ donc $S = \emptyset$.
- $m = 3$. Alors : $\Delta = 0$ et l'unique solution double

$$\text{est } x_0 = -\frac{m+1}{2(m+1)} = -\frac{1}{2} : S = \left\{ -\frac{1}{2} \right\}.$$

- $m \in]-\infty; -1[\cup]3; +\infty[$. Alors $\Delta > 0$ les deux racines sont donc :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-(m+1) - \sqrt{(m+1)(m-3)}}{2(m+1)} \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m-3}{m+1}} \quad \text{et} \\ x_2 &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m-3}{m+1}}. \quad S = \{x_1; x_2\}. \end{aligned}$$

- (b) Ici il s'agit d'exprimer m en fonction de x , il faut donc regrouper les m : $(x^2+x)m = -(x^2+x+1)$. Comme x^2+x s'annule en 0 et -1 on distingue trois cas :

- $x = 0$. L'équation devient : $0 = -1$ ce qui est impossible : $S = \emptyset$.
- $x = -1$. L'équation devient : $0 = -1$ ce qui est impossible : $S = \emptyset$.
- Si $x \neq 0$ et $x \neq -1$ alors : $m = \frac{-(x^2+x+1)}{x(x+1)}$:

$$S = \left\{ \frac{-(x^2+x+1)}{x(x+1)} \right\}.$$

Correction de l'exercice 22 :

- (a) En permutant L_1 et L_2 nous obtenons le système :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + ky + z = 1 \\ kx + y + z = 1 \\ x + y + kz = 1 \\ x + (1-k^2)y + (1-k)z = 1-k \\ (1-k)y + (k-1)z = 0 \end{cases}$$

- On constate alors que si $k = 1$ le système s'écrit simplement sous la forme : $x + ky + z = 1 \Leftrightarrow x = 1 - ky - z$ ce qui donne pour ensemble de solutions

$$S = \{(1 - ky - z, y, z), (y, z) \in \mathbb{R}^2\}.$$

- On suppose $k \neq 1$, et $k \neq -2$. On peut donc diviser par $1 - k$ la ligne trois, puis permuter L_2 et L_3 ce qui donne le système :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + ky + z = 1 \\ y - z = 0 \\ (1+k)y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ y - z = 0 \\ (k+2)z = 1 \\ x = 1 - ky - z = 1 - \frac{k+1}{2+k} = \frac{1}{2+k} \\ y = z = \frac{1}{2+k} \\ z = \frac{1}{2+k} \end{cases}$$

$$\text{On en déduit : } S = \left\{ \left(\frac{1}{2+k}; \frac{1}{2+k}; \frac{1}{2+k} \right) \right\}.$$

- Si $k = -2$, la ligne : $z \left(1 + \frac{1}{1+k} \right) = \frac{1}{1+k}$ de l'avant dernier système ci-dessus devient : $0 = -1$ ce qui est impossible. $S = \emptyset$.

- (b) En faisant $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ on obtient le système :

$$\begin{cases} x + 2y + kz = 1 \\ + (k-4)y - 2(k-4)z = 1 \end{cases}$$

Ainsi :

- Si $k = 4$ la deuxième ligne devient : $0 = 1$ ce qui est impossible : $S = \emptyset$.

- Si $k \neq 4$ on peut diviser la ligne deux par $k-4$ ce qui donne :

$$\begin{cases} x + 2y + kz = 1 \\ y - 2z = \frac{1}{k-4} \end{cases}$$

$$\text{Ainsi, } y = 2z + \frac{1}{k-4} \text{ puis } x = 1 - 2y - kz = 1 - (4+k)z - \frac{2}{k-4}.$$

$$S = \left\{ \left(1 - (4+k)z - \frac{2}{k-4}; 2z + \frac{1}{k-4}; z \right), z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Correction de l'exercice 25 :

$$V = R\sqrt{\frac{g}{R+h}} \Leftrightarrow V^2(R+h) = R^2g \Leftrightarrow h = \frac{R^2g}{V^2} - R$$

On obtient $h \approx 6552 \text{ km}$, valeur arrondie à l'unité.

