

Bijections et fonctions réciproques usuelles

LES INCONTOURNABLES

Utilisation des définitions

Exercice 1 : [corrigé] Soit E, F et G trois ensembles, et $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications. Démontrer que

1. Si $g \circ f$ est injective alors f est injective.
2. Si $g \circ f$ est injective et f est surjective alors g est injective.
3. Si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.

Exercice 2 : Étudier l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité de chacune des applications suivantes. Si l'une d'entre elle est bijective, donner son application réciproque.

1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \mapsto (x + y, x - y)$.
2. $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \mapsto (x + y, xy)$.

Exercice 3 : Montrer que l'application : $f : \mathbb{C} \setminus \{i\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{1\}$ définie par : $f(z) = \frac{z+1}{z-i}$ est bijective et expliciter son application réciproque.

Exercice 4 : Soient $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ qui à un entier k associe $2k$ et $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ qui à un entier k associe $\frac{k}{2}$ si k est pair et $\frac{k-1}{2}$ si k est impair.

1. Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f et g .
2. Préciser $f \circ g$ et $g \circ f$.

Bijektivité des fonctions réelles

Exercice 5 :

1. Démontrer que la fonction f définie par

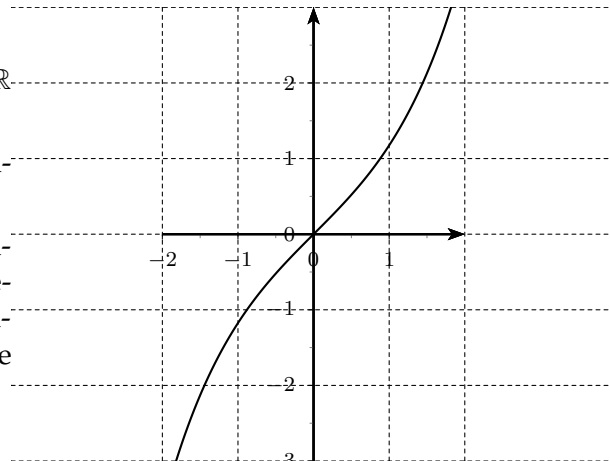
$$\forall x \in [0; \frac{1}{2}]; f(x) = \sqrt{1 - 4x^2}$$

réalise une bijection de $[0; \frac{1}{2}]$ dans $[0; 1]$ et expliciter sa fonction réciproque.

2. Donner l'ensemble sur lequel la fonction réciproque est dérivable.

Exercice 6 : [corrigé]

1. Montrer que sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Sur quel intervalle sh^{-1} est-elle dérivable?
3. Donner une expression explicite de la bijection réciproque et construire sa représentation graphique sur le graphique ci-contre sur lequel la courbe représentative de sh a été tracée.

**1.1 Les fonctions** Arcos , arcsin , Arctan **Exercice 7 :** [corrigé]

1. Montrer que : $\forall x \in [-1; 1], \cos\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin}(x)\right) = \cos(\operatorname{Arcos}(x))$. En déduire : $\forall x \in [-1; 1], \operatorname{Arcos}(x) + \operatorname{Arcsin}(x) = \frac{\pi}{2}$.
2. Retrouver le résultat précédent en étudiant la dérivée de la fonction f définie sur $[-1; 1]$ par $f(x) = \operatorname{Arcos}(x) + \operatorname{Arcsin}(x)$.

Exercice 8 : [corrigé] En précisant l'ensemble auquel appartient le réel x , donner une expression simple des expressions suivantes :

- (a) $\cos(2\operatorname{Arcos}x)$; (b) $\cos(2\operatorname{Arcsin}x)$; (c) $\sin(2\operatorname{Arctan}x)$; (d) $\tan(2\operatorname{Arcsin}x)$.

Exercice 9 : [corrigé] [D'après Banque PT]. Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \operatorname{arctan}(x) + \operatorname{arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$. En déduire une expression simple de f .

Exercice 10 : [corrigé] Soit $A = \operatorname{Arctan}(2) + \operatorname{Arctan}(3)$.

1. Montrer que $A \in]\frac{\pi}{2}; \pi[$.
2. Calculer $\tan(A)$.
3. En déduire que $A = \frac{3\pi}{4}$.

POUR S'ENTRAÎNER

Utilisation des définitions

Exercice 11 : [corrigé] Soit E, F et G trois ensembles, et $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications. Démontrer que

1. Si $g \circ f$ est surjective et g est injective alors f est surjective.
2. Donner un exemple où $g \circ f$ est bijective, mais f n'est pas surjective et g n'est pas injective.

Exercice 12 : Étudier l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité de l'application ci-dessous.

[D'après Banque PT 2016, sujet C]. $h : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow D$
 $(x, y) \mapsto \left(\frac{x^2+y^2}{2}, y\right)$ avec $D = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2; Y^2 < 2X\}$.

Exercice 13 : [corrigé] Montrer que l'application : $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par : $f(z) = z + 2\bar{z}$ est bijective et expliciter son application réciproque.

Bijectivité des fonctions réelles

Exercice 14 : [corrigé] On considère la fonction réelle f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$.

1. Montrer que la restriction de f à l'intervalle $]-\frac{1}{2}; +\infty[$ induit une bijection vers un ensemble que l'on précisera. Donner une expression simple de l'application réciproque associée.
2. Reprendre la question ci-dessus avec la restriction de f à l'intervalle $]-\infty; -\frac{1}{2}[$.

Exercice 15 : [corrigé]

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

1. Montrer que f induit une bijection de $\mathbb{R}$ vers un ensemble à préciser.
2. Pour $x \in]-1; 1[$, on pose : $g(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$. Calculer : $g \circ f$ et $f \circ g$. Conclure.

1.2 Les fonctions Arcos, arcsin, Arctan

Exercice 16 : [solutions] Calculer

(a) $\text{Arcos}(\cos(25\pi))$ (b) $\text{Arcsin}(\sin(\frac{39\pi}{2}))$ (c) $\text{Arcos}(\cos(\frac{35\pi}{4}))$ (d) $\text{Arcsin}(\sin(\frac{34\pi}{3}))$

Exercice 17 : [corrigé]

1. Donner une expression simple de $\text{Arcos}(\cos(x))$ pour $x \in [\pi; 2\pi]$, puis $x \in [2\pi; 3\pi]$.  Utiliser une représentation graphique de cette fonction afin de conjecturer le résultat.
2. Donner une expression simple de $\text{Arcsin}(\sin(x))$ pour $x \in [\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}]$.

Exercice 18 : [indications]

1. Montrer que pour tout $x \in [-1; 1]$, $\sin(\arccos(x)) = \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$.
2. En effectuant des encadrements de $\arcsin(\frac{1}{3})$ et $\arccos(\frac{1}{4})$, montrer que $\arcsin(\frac{1}{3}) + \arccos(\frac{1}{4}) \in [0; \pi]$.
3. En utilisant les questions précédentes, résoudre l'équation : $\arccos(x) = \arcsin(\frac{1}{3}) + \arccos(\frac{1}{4})$.

Exercice 19 : [corrigé] Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$: (Penser à vérifier pour quels réels x , les membres des équations sont définis).

- (a) $\arcsin x = \arctan 2x$; (b) $\arcsin x = 2\arccos x$; (c) $\arccos(x^2) = \arcsin(2x)$;
 (d) $\arctan x + \arctan 3x = \frac{\pi}{2}$; (e) $\arcsin x = \arcsin \frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}$; (f) $\arcsin(2x) - \arcsin(x\sqrt{3}) = \arcsin x$.

Exercice 20 : [indications] Montrer de deux façons différentes la relation suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \arctan(x+1) - \arctan(x) = \arctan\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right).$$

Exercice 21 : [corrigé] Étudier les fonctions suivantes :

- (a) $f : x \mapsto \arccos(2x+1)$; (b) $g : x \mapsto \arcsin(\frac{x-1}{x+1})$; (c) $h : x \mapsto \arcsin\left(\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right)$.

DIVERS

Exercice 22 :

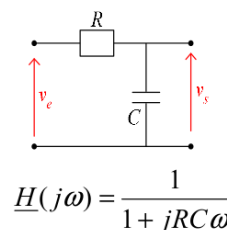
Une statue mesure $2m$ et est posée sur un socle de $25dm$. Prenons une observatrice de $153cm$. A quelle distance doit-elle se placer du socle afin de voir la statue avec un angle maximal ?



Exercice 23 : Fonctions de Transfert. Dans cet exercice, la lettre j désigne le nombre complexe i .

On donne ci-contre l'expression de la fonction de transfert d'un filtre passe-bas. Donner l'expression du gain (module

1. de la fonction de transfert) et l'expression de la phase (argument de la fonction de transfert) en fonction de ω , $\omega_0 = 1/(RC)$.



2. De même, prenons la transmittance complexe d'un filtre passe-bas du second ordre :

$$T(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{2jm\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

avec ω_0 la pulsation naturelle du filtre et m est le coefficient d'amortissement ($m > 0$). On suppose que $m < 1$. Vérifier que

- (a) Donner $\arg(T(j\omega_0))$.
- (b) Soit $\omega \neq \omega_0$. Montrer que

$$\arg(T(j\omega)) = -\arctan\left(\frac{\frac{2m\omega}{\omega_0}}{1 - \omega^2/\omega_0^2}\right) + k\pi$$

avec $k = 0$ si $\omega < \omega_0$ et $k = 1$ si $\omega > \omega_0$.



Indications

Exercice 18 :

1. Si $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, alors $\cos(\alpha) = \sqrt{1 - \sin^2(\alpha)}$.
2. Penser à l'indication de la question précédente.
3. $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2}$ donc par croissance de Arcsin on en déduit : $\text{Arcsin}(\frac{1}{3}) \leq \frac{\pi}{6}$. On fait de même avec Arcos.
4. Si $\arcsin(x) = \arcsin(\frac{1}{3}) + \arcsin(\frac{1}{4})$, alors les cosinus des deux termes sont égaux. En s'aidant des questions précédentes, on calcule facilement ces cosinus en fonction de x ce qui donne une unique valeur de x possible.

Exercice 20 : Une première façon de faire est de vérifier que les dérivées des deux expressions coïncident. Une deuxième méthode consiste à vérifier que leurs tangentes sont égales.

Solution de l'exercice 16 :

- (a) $\text{Arcos}(\cos(25\pi)) = \text{Arcos}(-1) = \pi$.
- (b) $\text{Arcsin}(\sin(\frac{39\pi}{2})) = \text{Arcsin}(1) = \frac{\pi}{2}$.
- (c) $\text{Arcos}(\cos(\frac{35\pi}{4})) = \text{Arcos}(\frac{-\sqrt{2}}{2}) = \frac{3\pi}{4}$.
- (d) $\text{Arcsin}(\sin(\frac{34\pi}{3})) = \text{Arcsin}(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{\pi}{3}$.

Correction de l'exercice 1 :

1. Supposons que $g \circ f$ est injective et montrons que f est injective.

Soient x et y deux éléments de E tels que $f(x) = f(y)$. Alors : $g(f(x)) = g(f(y)) \Leftrightarrow g \circ f(x) = g \circ f(y)$. Or, par hypothèse, $g \circ f$ est injective donc : $g \circ f(x) = g \circ f(y) \Rightarrow x = y$. Ceci étant vrai pour tout élément $x, y \in E$, on en déduit que f est injective.

2. Supposons que $g \circ f$ est injective et f est surjective. On veut montrer que g est injective. Soient alors $x, x' \in F$ tels que $g(x) = g(x')$. L'application f est surjective, donc x, x' ont un antécédent par f : $\exists a, a' \in E, f(a) = x, f(a') = x'$. Finalement, $g(f(a)) = g(f(a')) \Leftrightarrow g \circ f(a) = g \circ f(a')$. Or f est injective. Par conséquent, $a = a'$. Cela implique que $f(a) = f(a') \Leftrightarrow x = x'$. Finalement, nous avons montré

$$\forall x, x' \in E, g(x) = g(x') \Leftrightarrow x = x'.$$

Par définition, g est donc injective.

3. Supposons que $g \circ f$ est surjective. On veut montrer que g l'est également.

Soit $y \in G$. On veut prouver qu'il existe $x \in F$ tel que : $y = g(x)$. Or, par hypothèse, $g \circ f : E \rightarrow G$ est

surjective, donc il existe $u \in E$ tel que $y = g \circ f(u) = g(f(u))$. Ainsi, $y = g(x)$, avec $x = f(u) \in F$. Ceci étant vrai pour tout élément $y \in G$, on a montré que g est surjective.

Correction de l'exercice 2 :

1. (a) *Injective?* Soient $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ tels que $f((x, y)) = f((x', y'))$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = x' + y' \\ x - y = x' - y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2x' \\ 2y = 2y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

La fonction f est donc injective.

- (b) *Surjective?* Soit $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$. On cherche s'il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(X, Y) = f((x, y))$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = x + y \\ Y = x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X + Y = 2x \\ X - Y = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{X+Y}{2} \\ y = \frac{X-Y}{2} \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $(X, Y) \in \mathbb{R}^2, \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, f((x, y)) = (X, Y)$. L'application f est donc surjective.

- (c) Cette application h est donc bijective. Par l'étude de la surjectivité, on a montré que pour tout $(X, Y) \in \mathbb{R}^2, \exists ! (x, y) \in \mathbb{R}^2, f((x, y)) = (X, Y) \Leftrightarrow (x, y) = (\frac{X+Y}{2}, \frac{X-Y}{2})$.

Ainsi,

$$f^{-1} : \begin{matrix} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (X, Y) & \mapsto & (\frac{X+Y}{2}, \frac{X-Y}{2}) \end{matrix}$$

2. (a) *Injectivité?* Lors de l'étude de l'injectivité, nous sommes obligés de diviser par x (ou par y) ce qui entraîne une disjonction des cas et ainsi la non injectivité de g . Par exemple, $g((1, 0)) = (1, 0)$ et $g((0, 1)) = (1, 0)$. Ainsi, $(1, 0)$ a deux antécédents distincts et g n'est pas injective.
- (b) *Surjective?* Soit $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$. On cherche $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $g((x, y)) = (X, Y) \Leftrightarrow \begin{cases} X = x + y \\ Y = xy \end{cases}$ ce qui est équivalent à (x, y) sont solutions de l'équation du second degré (d'inconnue Z) : $Z^2 - XZ + Y = 0$. Or cette équation n'a pas de solution pour les couples (X, Y) tels que $X^2 - 4Y < 0$. Ces couples existent (par exemple $(-1, 1)$). L'application g n'est donc pas surjective.
- (c) L'application n'est pas surjective et injective. Elle n'est donc pas bijective.

Correction de l'exercice 3 :

On utilise la définition. Soit $Z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. On cherche s'il existe $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ tel que :

$$\begin{aligned} f(z) = Z \text{ et } z \neq i &\Leftrightarrow Z = \frac{z+1}{z-i} \Leftrightarrow Z(z-i) = (z+1) \text{ et } z \neq i \\ &\Leftrightarrow z(Z-1) = 1+iZ \text{ et } z \neq i \\ &\Leftrightarrow z = \frac{1+iZ}{Z-1} \text{ et } z \neq i \text{ car } Z \neq 1 \end{aligned}$$



Il reste à vérifier que $z \neq i$. Or $\frac{1+iZ}{Z-1} = i \Leftrightarrow 1+iZ = Zi - i$, égalité fautive.
Par définition, f est bijective et

$$f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{1\} & \rightarrow & \mathbb{C} \setminus \{i\} \\ Z & \mapsto & \frac{1+iZ}{Z-1} \end{array}.$$

Correction de l'exercice 6 :

La fonction sh est continue et strictement croissante. Par le théorème de la bijection, sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\text{sh}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

De plus, sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\text{sh}' = \text{ch} > 0$. Par théorème, sh^{-1} est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{aligned} \text{sh}(x) = y &\Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 2y \Leftrightarrow [e^x]^2 - 2ye^x - 1 \\ &\Leftrightarrow e^x = \frac{2y + \sqrt{4y^2 + 4}}{2} \text{ ou } e^x = \frac{2y - \sqrt{4y^2 + 4}}{2} \\ &\Leftrightarrow e^x = y + \sqrt{y^2 + 1} \Leftrightarrow \boxed{x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})} \end{aligned}$$

Par propriété, l'application réciproque est :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) \end{array}$$

Correction de l'exercice 7 :

1. $\cos(\frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}(x)) = \sin(\text{Arcsin}(x)) = x$ et $\cos(\text{Arcos}(x)) = x$ par définition. Ainsi, $\cos(\frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}(x)) = \cos(\text{Arcos}(x))$.

On remarque que $\frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}(x) \in [0; \pi]$ et $\text{Arcos}(x) \in [0; \pi]$. Ainsi, leurs cosinus étant égaux, on en déduit qu'ils sont égaux.

Finalement, $\frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}(x) = \text{Arcos}(x) \Leftrightarrow \text{Arcos}(x) + \text{Arcsin}(x) = \frac{\pi}{2}$ (Résultat à se représenter dans le triangle rectangle d'hypoténuse 1).

2. La fonction f est dérivable sur $] -1; 1[$ comme somme de fonctions dérivables sur cet ensemble. Puis, $\forall x \in] -1; 1[, f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$. Par propriété, f est donc constante sur $] -1; 1[$. Or $f(0) = \frac{\pi}{2}$. Finalement, $\forall x \in] -1; 1[, \text{Arcos}(x) + \text{Arcsin}(x) = \frac{\pi}{2}$, égalité encore vraie pour $x \in \{1; -1\}$.

Correction de l'exercice 8 :

- (a) Arcos est définie sur $[-1; 1]$ et $\cos$ sur $\mathbb{R}$. Alors $x \mapsto \cos(2\text{Arcos } x)$ est définie sur $[-1; 1]$. Puis $\cos(2\text{Arcos } x) = 2[\cos(\text{Arcos}(x))]^2 - 1 = 2x^2 - 1$.
- (b) De même, $\cos(2\text{Arcsin } x)$ est défini sur $[-1; 1]$ et $\cos(2\text{Arcsin } x) = 1 - 2[\sin(\text{Arcsin}(x))]^2 = 1 - 2x^2$.
- (c) Arctan est définie sur $\mathbb{R}$, de même que $\sin$. Donc $x \mapsto \sin(2\text{Arctan } x)$ est définie sur $\mathbb{R}$. Puis, $\sin(2\text{Arctan } x) = 2\sin(\text{Arctan } x)\cos(\text{Arctan } x) = 2\frac{\text{Arctan } x}{\cos(\text{Arctan } x)}\cos^2(\text{Arctan } x)$,

égalité vérifiée car $\text{Arctan}(x) \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ et $\cos(\text{Arctan } x) \neq 0$. Finalement, $\sin(2\text{Arctan } x) = 2\tan(\text{Arctan}(x))\cos^2(\text{Arctan}(x)) = \frac{2x}{1+x^2}$.

- (d) Soit $x \in [-1; 1] - \{\pm\sqrt{2}/2\}$. $\tan(2\text{Arcsin } x) = \frac{2\tan(\text{Arcsin}(x))}{1-\tan^2(\text{Arcsin}(x))}$.
Puis, $\tan(Y) = \frac{\sin(Y)}{\cos(Y)} \Rightarrow \tan(\text{Arcsin}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
Ainsi, $\tan(2\text{Arcsin } x) = \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-\frac{x^2}{1-x^2}} = \frac{x(1-x^2)/\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2}$.

Correction de l'exercice 9 :

C'est un classique.

$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = 0$. Pour $x > 0$, $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$ et pour $x < 0$, $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = -\frac{\pi}{2}$

Correction de l'exercice 10 :

- (a) On sait que $\sqrt{3} \leq 2$ et $\sqrt{3} \leq 3$. La fonction Arctan est strictement croissante et $\text{Arctan}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$. Finalement, $\frac{\pi}{3} \leq \text{Arctan}(2) < \pi/2$ et $\frac{\pi}{3} \leq \text{Arctan}(3) < \pi/2$, ce qui nous permet de conclure que $A \in [\frac{2\pi}{3}; \pi[$.

- (b) Utilisons notre formulaire de trigonométrie :

$$\tan(A) = \frac{\tan(\text{Arctan}(2)) + \tan(\text{Arctan}(3))}{1 - \tan(\text{Arctan}(2))\tan(\text{Arctan}(3))} = \frac{2+3}{1-2 \times 3} = \frac{5}{-5} = -1$$

- (c) Par la propriété de résolution d'une équation avec une tangente, nous avons

$$A = \frac{-\pi}{4}[\pi]$$

De plus, $A \in]\frac{\pi}{2}; \pi[$. Ainsi, $\boxed{A = \frac{3\pi}{4}}$.

Correction de l'exercice 11 :

1. surjective. Supposons $g \circ f$ est surjective et g est injective et montrons que f est surjective.

Soit $y \in F$. On cherche s'il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. On remarque que $g(y)$ est un élément de G . Or $g \circ f$ est surjective donc $g(y)$ a un antécédent par $g \circ f$, appelons le x . On obtient donc $g(y) = g \circ f(x) = g(f(x))$. Mais g est injective. Par définition, y est donc égal à $f(x)$. On a montré que pour tous les éléments $y \in F$ il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Par définition, f est donc surjective.

2. surjective et g n'est pas injective. Prenons $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$

et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$. Alors f n'est pas surjective (par exemple, -1 n'a pas d'antécédent par f), g n'est pas injective (par exemple 1 a deux antécédents par g , -1 et 1). Cependant $g \circ f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x \end{array}$ est une bijection.

Correction de l'exercice 12 :

- (a) *Injective?* Soient $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tels que $h((x, y)) = h((x', y'))$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2 \\ y = y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = x'^2 \\ y = y' \end{cases}$$

Or x, x' sont strictement positifs. Par conséquent, $(x, y) = (x', y')$ et la fonction h est donc injective.

- (b) *Surjective?* Soit $(X, Y) \in D$. On cherche s'il existe $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tel que $(X, Y) = h((x, y))$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{x^2 + y^2}{2} \\ Y = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2X - Y^2 \\ Y = y \end{cases}$$

car $2X - Y^2 > 0$ et x est strictement positif.

Ainsi, pour tout $(X, Y) \in \mathbb{R}^2, \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, h((x, y)) = (X, Y)$. L'application h est donc surjective.

- (c) Cette application h est donc bijective. Par l'étude de la surjectivité, on a montré que pour tout $(X, Y) \in \mathbb{R}^2, \exists! (x, y) \in \mathbb{R}^2, h((x, y)) = (X, Y) \Leftrightarrow (x, y) = (\sqrt{2X - Y^2}, Y)$.

Ainsi,

$$h^{-1}: \begin{matrix} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (X, Y) & \mapsto & (\sqrt{2X - Y^2}, Y) \end{matrix}$$

Correction de l'exercice 13 :

Soit $Z \in \mathbb{C}$. On cherche s'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = Z$

$$\Leftrightarrow z + 2\bar{z} = Z \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{Z}{2} = \frac{z + 2\bar{z}}{2} \\ \frac{\bar{Z}}{2} = \frac{\bar{z} + 2z}{2} \end{cases} \Leftrightarrow Z - 2\bar{Z} = z - 4z \Leftrightarrow z = \frac{2\bar{Z} - Z}{3}$$

Finalement, on a montré :

$$\forall Z \in \mathbb{C}, \exists! z \in \mathbb{C}, f(z) = Z \Leftrightarrow z = \frac{2\bar{Z} - Z}{3}$$

L'application f est donc bijective et son application réciproque est $f^{-1}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f^{-1}(Z) = \frac{2\bar{Z} - Z}{3}$.

Correction de l'exercice 14 :

1.  Nous avons une fonction de la variable réelle à valeur dans $\mathbb{R}$. On applique donc le théorème de la bijection pour les fonctions réelles. Avant de commencer, on observe que $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 > 0$ et ainsi que la fonction est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Étudions sa monotonie. On sait que $x \mapsto x^2 + x + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$. Donc par composition, f est dérivable. On utilise la formule $(u^{-1/2})' = (-1/2)u' u^{-3/2}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{-1}{2} \times (2x + 1) \times \frac{1}{(x^2 + x + 1)^{3/2}}$$

Donc $\forall x > -1/2, f'(x) < 0$. Par propriété, f est donc strictement décroissante sur $] -1/2; +\infty[$.

On peut désormais appliquer le théorème de la bijection : la fonction f est continue sur l'intervalle $] -1/2; +\infty[$ (en tant que composée de fonctions continues) et est strictement décroissante.

Elle réalise donc une bijection de $] -1/2; +\infty[$ sur $f(]-1/2; +\infty[) =]\lim_{+\infty} f; f(-1/2)[=]0; 2/\sqrt{3}[$. Déterminons son application réciproque. Soit $y \in]0; 2/\sqrt{3}[$.

On cherche $x \in] -1/2; +\infty[$ tel que $f(x) = y$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} = y \Leftrightarrow 1/y^2 = x^2 + x + 1 \text{ car } y > 0, x^2 + x + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x + (1 - 1/y^2) = 0$$

Le discriminant de cette équation d'inconnue x et de paramètre y est égal à $1 - 4(1 - 1/y^2) = \frac{4 - 3y^2}{y^2} > 0$ car $y < 2/\sqrt{3}$. On a exactement deux solutions :

$$\frac{-1 \pm \sqrt{\frac{4 - 3y^2}{y^2}}}{2} = \frac{-y \pm \sqrt{4 - 3y^2}}{2y} \text{ car } y \text{ est positif.}$$

Cherchons celle qui est strictement supérieure à $-1/2$:

$$\frac{-y \pm \sqrt{4 - 3y^2}}{2y} > \frac{-1}{2} \Leftrightarrow -y \pm \sqrt{4 - 3y^2} > -y \Leftrightarrow \pm \sqrt{4 - 3y^2} > 0$$

Ainsi, la seule solution qui convient est $\frac{-y + \sqrt{4 - 3y^2}}{2y}$.

On a montré :

$$\forall y \in]0; 2/\sqrt{3}[, \exists! x \in] -1/2; +\infty[, f(x) = y \Leftrightarrow x = \frac{-y + \sqrt{4 - 3y^2}}{2y}$$

L'application réciproque de f restreinte à cet intervalle est

$$f^{-1}: \begin{matrix}]0; 2/\sqrt{3}[& \rightarrow &] -1/2; +\infty[\\ y & \mapsto & \frac{-y + \sqrt{4 - 3y^2}}{2y} \end{matrix}$$

2. Sur cet intervalle f est alors croissante strictement et est continue. Par le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $] -\infty; -1/2[$ à valeurs dans $] \lim_{-\infty} f; f(-1/2)[=]0; 2/\sqrt{3}[$.

Déterminons son application réciproque. Soit $y \in]0; 2/\sqrt{3}[$. On cherche $x \in] -\infty; -1/2[$ tel que $f(x) = y$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} = y \Leftrightarrow 1/y^2 = x^2 + x + 1 \text{ car } y > 0, x^2 + x + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x + (1 - 1/y^2) = 0$$

Le discriminant de cette équation d'inconnue x et de paramètre y est égal à $1 - 4(1 - 1/y^2) = \frac{4 - 3y^2}{y^2} > 0$ car $y < 2/\sqrt{3}$. On a exactement deux solutions :

$$\frac{-1 \pm \sqrt{\frac{4 - 3y^2}{y^2}}}{2} = \frac{-y \pm \sqrt{4 - 3y^2}}{2y} \text{ car } y \text{ est positif.}$$

Cherchons celle qui est strictement inférieure à $-1/2$:

$$\frac{-y \pm \sqrt{4 - 3y^2}}{2y} < \frac{-1}{2} \Leftrightarrow -y \pm \sqrt{4 - 3y^2} < -y \Leftrightarrow \pm \sqrt{4 - 3y^2} < 0$$

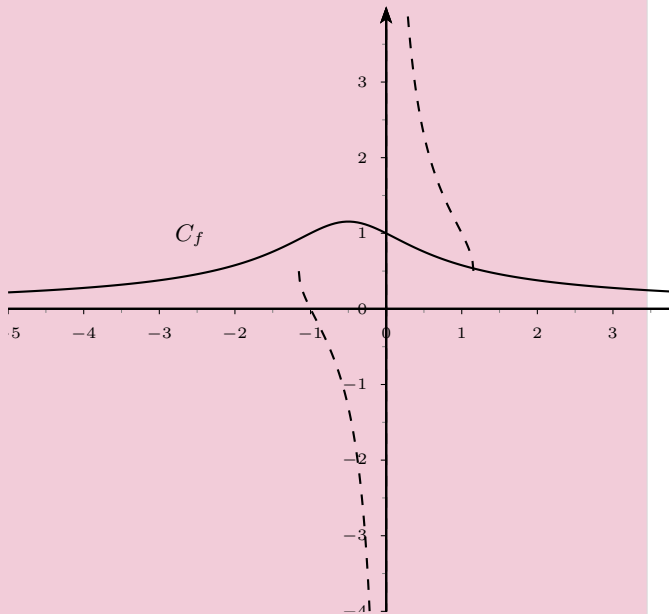
Ainsi, la seule solution qui convient est $\frac{-y - \sqrt{4 - 3y^2}}{2y}$.

On a montré :

$$\forall y \in]0; 2/\sqrt{3}[, \exists ! x \in]-\infty; -1/2[, f(x) = y \Leftrightarrow x = \frac{-y}{2}$$

L'application réciproque de f restreinte à cet intervalle est

$$f^{-1} :]0; 2/\sqrt{3}[\rightarrow]-\infty; -1/2[\\ y \mapsto \frac{-y + \sqrt{4 - 3y^2}}{2y}$$



Correction de l'exercice 15 :

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ puisque une exponentielle étant strictement positive, le dénominateur ne s'annule pas. Étudions sa monotonie. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions dérivables.

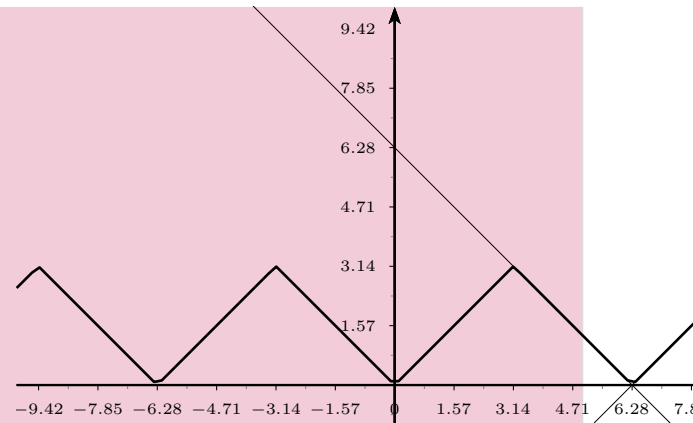
$$f'(x) = \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} \\ = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} > 0$$

La fonction f est donc strictement croissante et continue. Par le théorème de la bijection, **elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R}) =]\lim_{-\infty} f; \lim_{+\infty} f[=]-1; 1[$.**

2. Le calcul montre que $g \circ f = id_{\mathbb{R}}$ et $f \circ g = id_{]-1; 1[}$. Par unicité de l'application réciproque et sa définition (elle vérifie $f^{-1} \circ f = id_E$ et $f \circ f^{-1} = id_F$), on en déduit que g est l'application réciproque de f .

Correction de l'exercice 17 :

1. La représentation graphique de $x \mapsto \text{Arcos}(\cos(x))$ est la suivante :



Le problème de cet exercice est que l'on sait que $\text{Arcos}(\cos(x)) = x$ si et seulement si $x \in [0; \pi]$. On doit donc s'y ramener.

En s'aidant du cercle trigonométrique, pour $x \in [\pi; 2\pi]$, $2\pi - x \in [0; \pi]$ et $\cos(x) = \cos(2\pi - x)$.

$$\text{Arcos}(\cos(x)) = \text{Arcos}(\cos(2\pi - x)) = 2\pi - x.$$

De même, $x \in [2\pi; 3\pi] \Leftrightarrow x - 2\pi \in [0; \pi]$.

$$\text{Arcos}(\cos(x)) = \text{Arcos}(\cos(x - 2\pi)) = x - 2\pi.$$

2. $x \in [\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}] \Leftrightarrow x - 2\pi \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ et $\sin(x) = \sin(x - 2\pi)$. Ainsi,

$$\text{Arcsin}(\sin(x)) = \text{Arcsin}(\sin(x - 2\pi)) = x - 2\pi$$

Correction de l'exercice 19 :

Pour ce type d'équation, soit on procède par équivalence, soit par Analyse-Synthèse.

- (a) Les termes de l'équation sont définis si et seulement si $x \in [-1; 1]$. On remarque que les deux nombres appartiennent à $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Les deux nombres sont donc égaux

si et seulement si leurs sinus le sont.  On peut aussi appliquer la fonction tan.

$$\begin{aligned} \text{Arcsin} x &= \text{Arctan} 2x \Leftrightarrow \sin(\text{Arcsin}(x)) = \sin(\text{Arctan}(2x)) \\ &\Leftrightarrow x = \tan(\text{Arctan}(2x)) \cos(\text{Arctan}(2x)) \\ &\Leftrightarrow x = 2x \frac{1}{\sqrt{1+(2x)^2}} \\ &\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{1+4x^2}} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{1+4x^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Ces nombres appartiennent de plus à $[-1; 1]$. Ainsi,

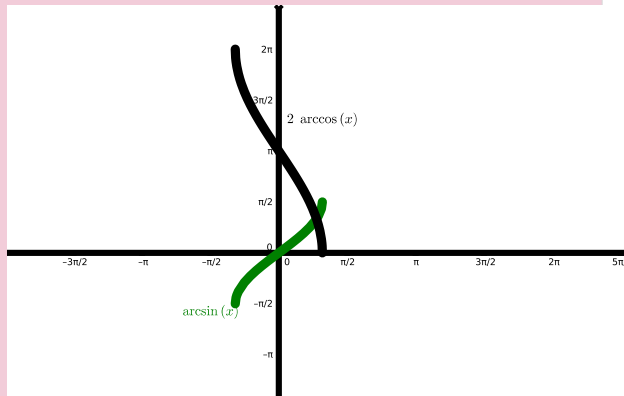
$$S = \{0; \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\}.$$

- (b) Les termes de l'équation sont définis si et seulement si $x \in [-1; 1]$. Avant d'appliquer la fonction cos (ou sin), on étudie les deux nombres : $\text{Arcsin} x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ tandis que $2\text{Arcos} x \in [0; 2\pi]$. Pour que l'égalité soit possible, il faut que $x \in [0; 1]$. Soit donc $x \in [0; 1]$. Alors $\text{Arcsin} x \in [0; \frac{\pi}{2}]$ et $2\text{Arcos} x \in [0; \pi]$. Donc deux nombres de cet intervalle sont égaux si et seulement si

leurs cosinus le sont.

$$\begin{aligned} \text{Arcsin } x = 2\text{Arcos } x &\Leftrightarrow \cos(\text{Arcsin}(x)) = \cos(2\text{Arcos } x) \\ &\Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = 2x^2 - 1 \\ &\Leftrightarrow 1-x^2 = (2x^2-1)^2 \text{ et } 2x^2-1 \\ &\Leftrightarrow 1-x^2 = 4x^4-4x^2+1 \text{ et } |x| \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\Leftrightarrow 0 = 4x^4-3x^2 \text{ et } |x| \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } |x| \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$S = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}.$$



Correction de l'exercice 21 :

- ☐ Domaine de définition : $f(x)$ a un sens si et seulement si $2x+1 \in [-1; 1] \Leftrightarrow x \in [-1; 0]$.
☐ Domaine de dérivabilité. La fonction Arcos est dérivable sur $] -1; 1[$ (Ouvrez bien les yeux sur les crochets précédents). Donc f est dérivable sur $[-1; 0]$ privé des réels x tels que $2x-1 = \pm 1$, donc privé des réels -1 et 0 .
☐ Dérivée : $\forall x \in] -1; 0[$ (Ouvrez bien les yeux sur les crochets précédents) :

$$f'(x) = 2 \times \text{Arcos}'(2x+1) = \frac{-2}{\sqrt{1-[2x-1]^2}} = \frac{-2}{\sqrt{4x-4x^2}}$$

La fonction dérivée est donc strictement négative et la fonction f est strictement décroissante sur $[-1; 0]$.

- ☐ D'où le tableau de variations :

x	-1	0
$f(x)$	π	0

- ☐ Courbe représentative.

- ☐ Domaine de définition : $f(x)$ a un sens si et seulement si $\frac{x-1}{x+1} \in [-1; 1]$. On étudie donc la fonction $u : x \rightarrow \frac{x-1}{x+1}$. On obtient les variations suivantes

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$u(x)$	1	$+\infty$	$-\infty$	1

Finalement, $\mathcal{D}_f = [0; +\infty[$.

- ☐ Domaine de dérivabilité. La fonction Arcsin est dérivable sur $] -1; 1[$ (Ouvrez bien les yeux sur les crochets précédents). Donc f est dérivable sur $[0; +\infty[$ privé des réels x tels que $\frac{x-1}{x+1} = \pm 1$, donc privé du réel 0 .
☐ Dérivée : $\forall x \in]0; +\infty[$ (Ouvrez bien les yeux sur les crochets précédents) :

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} \times \text{Arcsin}'\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{2}{(x+1)^2} \times \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}}$$

La fonction dérivée est donc strictement positive et la fonction f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

- ☐ D'où le tableau de variations :

x	0	$+\infty$
$f(x)$	$-\pi/2$	$\pi/2$

- ☐ Courbe représentative.