Devoir surveillé n^o 9.

Durée : 3 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Dans cette épreuve, les candidats sont invités à illustrer, s'ils le jugent nécessaire, leurs réponses avec un dessin.

Exercice 1

On note $F(x) = \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\, dt$.

1. Montrer que F est définie sur $D = \mathbb{R}_+^*$.
2. En vous aidant d'encadrement, montrer que $\lim_{x \to 0^+} F(x) = \ln(2)$.
3. Justifier que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, F'(x)$.
4. Montrer que $\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$.
5. Tracer l'allure de la courbe représentative de F.

Exercice 2

On pose, pour $n \geq 1$, $u_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{3k-1}{3k}$.

1. On pose, pour $n \geq 2$, $v_n = n^{1/3} u_{n-1}$ Déterminer deux constantes α et β telles que : $\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) \sim \frac{\alpha}{n^\beta}$.
2. Montrer que $\sum_{n \geq 2} (\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n))$ converge.
3. En déduire un équivalent simple de u_n puis la nature de $\sum_{n \geq 1} u_n$.

Exercice 3

Soit $a > 0$.

1. Justifier la convergence de $\sum_{n \geq 0} e^{-a\sqrt{n}}$. On note $S(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-a\sqrt{n}}$.
2. Calculer $\int_0^n e^{-a\sqrt{t}}\, dt$ à l'aide du changement de variable $u = \sqrt{t}$.
3. En vous aidant d'une comparaison série/intégrale, proposer un encadrement de $\sum_{k=0}^{n} e^{-a\sqrt{k}}$.
4. En déduire $S(a) \sim_{0^+} \frac{2}{a^2}$.

Exercice 4

1. **Étude de deux applications.**
On note $\mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur à 2. On confondra dans ce problème les polynômes et leurs fonctions polynomiales associées. On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On définit les applications :
$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & \frac{1}{2}\Big(P(\dfrac{X+1}{2}) + P(\dfrac{X}{2})\Big) \end{array}$$
$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(1) \end{array}$$
On rappelle que $f^0 = id_{\mathbb{R}_2[X]}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, f^{n+1} = f \circ f^n$.
   (a) Vérifier que f est à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$ et qu'elle est linéaire.
   (b) Montrer que φ est linéaire.
   (c) Écrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ en écrivant les calculs intermédiaires.
   (d) L'application f est-elle injective ? surjective ?
   (e) Donner une base de $\ker(\varphi)$. Quelle est sa dimension ?
   (f) L'application φ est-elle injective ? surjective ?

2. **Calcul des puissances d'une matrice.**
On note I_3 la matrice identité et A la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 1/8 \\ 0 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$
Enfin, on note $\mathcal{B}'$ la famille $(1, 1-2X, 6X^2-6X+1)$.
   (a) Justifier que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) Écrire Q la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
   (c) Justifier que Q est inversible et calculer son inverse.
   (d) Écrire D la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ en donnant les calculs intermédiaires.
   (e) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$ et donner ces 9 coefficients.
   (f) Pour $P = a + bX + cX^2$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, déterminer $f^n(P)$ en fonction de a, b, c, n.
   (g) En déduire que $\varphi(f^n(P)) \to_{n\to+\infty} \int_0^1 P(t)\,dt$.

3. **Une autre preuve du résultat précédent.**
   (a) Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \forall n \in \mathbb{N}^*, f^n(P) = \dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)$.
   (b) En déduire, en utilisant un théorème d'analyse que l'on citera précisément,
$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \lim_{n\to+\infty} \varphi(f^n(P)) = \int_0^1 P(t)\,dt.$$

Correction de l'exercice 1:

1. La fonction $t \mapsto \frac{e^t}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$. Or, si $x > 0$, $[x;\ 2x] \subset \mathbb{R}_+^*$. Par conséquent $\int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\, dt$ a un sens quel que soit $x > 0$ ce qui prouve que F est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Pour tout $t \in [x;\ 2x]$, $e^x \leq e^t \leq e^{2x}$. Donc $\frac{e^x}{t} \leq \frac{e^t}{t} \leq \frac{e^{2x}}{t}$. Par croissance de l'intégrale on en déduit : $\int_x^{2x} \frac{e^x}{t}\, dt \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\, dt \leq \int_x^{2x} \frac{e^{2x}}{t}\, dt$.

   De plus : $\int_x^{2x} \frac{e^x}{t}\, dt = e^x \int_x^{2x} \frac{1}{t}\, dt = e^x[\ln(t)]_x^{2x} = e^x(\ln(2x) - \ln(x)) = e^x \ln(2)$.
   De la même façon : $\int_x^{2x} \frac{e^x}{t}\, dt = e^{2x}\ln(2)$. On en déduit :
   $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ e^x \ln(2) \leq F(x) \leq e^{2x}\ln(2)$. Or, $\lim_{x\to 0^+} e^x \ln(2) = \lim_{x\to 0^+} e^{2x}\ln(2) = 1$ donc par théorème d'encadrement : $\boxed{\lim_{x\to 0^+} F(x) = \ln(2).}$

3. Notons G une primitive de $t \mapsto \frac{e^t}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (G existe car $t \mapsto \frac{e^t}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$). Par propriété G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ G'(x) = \frac{e^x}{x}$. Or, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ F(x) = G(2x) - G(x)$. Donc, par opérations usuelles, F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et par composition : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \boxed{F'(x) =} 2G'(2x) - G'(x) = 2\frac{e^{2x}}{2x} - \frac{e^x}{x} = \boxed{\frac{e^x(e^x-1)}{x}.}$

4. Nous avons d'après ci-dessus, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ F(x) \geq e^x \ln(2)$. Or $\lim_{x\to+\infty} e^x\ln(2) = +\infty$ donc par encadrement $\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty.}$

5. D'après 3, F est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

   Par équivalents usuels $F'(x) \sim_{0^+} 1$. Or F est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}_+$ car F admet une limite en 0^+. On obtient donc une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, continue sur $\mathbb{R}_+$ et telle que $\lim_{x\to 0^+} F'(x) = 1$. D'après le théorème de limite de la dérivée, F est dérivable en 0 et $F'(0) = 1$. On en déduit une tangente en 0 d'équation $y = \ln(2) + x$.

   Le tracé est laissé au lecteur.

Correction de l'exercice 2:

1. Nous avons $\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{3n-1}{3n}$ donc : $\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = \frac{1}{3}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{3n}\right)$.

   Or, $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\ln\left(1-\frac{1}{3n}\right) = -\frac{1}{3n} + \frac{1}{18n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Par somme de développements limités,
   $\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = -\frac{1}{9n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. On en déduit : $\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) \sim \frac{-1/9}{n^2}$.

2. D'après précédemment : $\ln(v_n) - \ln(v_{n+1}) \sim \frac{1/9}{n^2}$. D'autre part : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1/9}{n^2} > 0$ et d'après le critère de Riemann, $\sum_{n\geq 1} \frac{1/9}{n^2}$ converge. Par critère de comparaison des séries à termes positifs on en déduit que $\sim_{n\geq 2} (\ln(v_n) - \ln(v_{n+1}))$ converge. Par linéarité, $\boxed{\sum_{n\geq 1}(\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)).}$

3. Par propriété des séries télescopiques, $\ln(v_n)$ converge vers C donc par composition par $\exp$, $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$ avec $\ell = e^C \in \mathbb{R}_+^*$. De la même façon $\lim_{n\to+\infty} v_{n+1} = \ell$. Or, $\ell \neq 0$ donc : $v_{n+1} \sim \ell \Leftrightarrow (n+1)^{1/3}u_n \sim \ell \Leftrightarrow u_n \sim \frac{\ell}{(n+1)^{1/3}}$. Enfin, puisque $n+1 \sim n$, par passage à la puissance α, $(n+1)^\alpha \sim n^{1/3}$. On en déduit au final : $\boxed{u_n \sim \frac{\ell}{n^{1/3}}.}$ Or $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{\ell}{n^{1/3}} > 0$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{\ell}{n^{1/3}}$ diverge d'après le critère de

Riemann. Par comparaison des séries à termes positifs, $\boxed{\sum_{n\geq 1} u_n \text{ diverge.}}$

Correction de l'exercice 3:

1. Par croissances comparées $\lim_{n\to+\infty} n^4 e^{-an} = 0$ car $a > 0$. Ainsi, par changement de variable $\lim_{n\to+\infty} n^2 e^{-a\sqrt{n}} = 0$. La suite de terme général $n^2 e^{-a\sqrt{n}}$ étant convergente elle est bornée donc en particulier majorée. Ceci entraîne l'existence de $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ e^{-a\sqrt{n}} \leq \frac{C}{n^2}$. De plus, par la critère de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{C}{n^2}$ converge. Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $e^{-a\sqrt{n}} \geq 0$. Par critère de comparaison des séries à termes positifs on en déduit que $\boxed{\sum_{n\geq 0} e^{-a\sqrt{n}} \text{ converge.}}$
2. Posons $u = \sqrt{t}$, alors pour $t_0 = 0$ nous avons $u_0 = 1$ et pour $t_1 = n$ nous avons $u_1 = \sqrt{n}$. Par ailleurs, puisque $t = u^2$, $\frac{dt}{du} = 2u$ donc $dt = 2u\ du$. Par changement de variable on en déduit :

   $\int_0^n e^{-a\sqrt{t}}\ dt = 2\int_0^{\sqrt{n}} ue^{-u}\ du$. D'autre part, par intégration par parties :

   $\int_0^{\sqrt{n}} ue^{-au}\ du = [-\frac{u}{a}e^{-au}]_0^{\sqrt{n}} + \frac{1}{a}\int_0^{\sqrt{n}} e^{-u}\ du = -\frac{\sqrt{n}e^{-a\sqrt{n}}}{a} - \frac{1}{a^2}[e^{-au}]_0^{\sqrt{n}} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^2}e^{-a\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n}e^{-a\sqrt{n}}}{a}$.

   Au final, $\boxed{\int_0^n e^{-a\sqrt{t}}\ dt = \frac{2}{a^2} - \frac{2e^{-a\sqrt{n}}}{a^2}\left(1 + a\sqrt{n}\right).}$
3. La fonction $t \mapsto e^{-a\sqrt{t}}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ donc $\forall t \in [k;\ k+1], e^{-a\sqrt{k+1}} \leq e^{-a\sqrt{t}} \leq e^{-a\sqrt{k}}$. Par croissance de l'intégrale on en déduit : $e^{-a\sqrt{k+1}} \leq \int_k^{k+1} e^{-a\sqrt{t}}\ dt \leq e^{-a\sqrt{k}}$.

   Puisque $\forall k \in \mathbb{N},\ \int_k^{k+1} e^{-a\sqrt{t}}\ dt \leq e^{-a\sqrt{k}}$ nous avons, en sommant et par Chasles, : $\int_0^{n+1} e^{-a\sqrt{t}}\ dt \leq \sum_{k=0}^{n} e^{-a\sqrt{k}}$.

   De la même façon, $\forall k \in \mathbb{N},\ e^{-a\sqrt{k+1}} \leq \int_k^{k+1} e^{-a\sqrt{t}}\ dt$ donc $\forall k \geq 1,\ e^{-a\sqrt{k}} \leq \int_{k-1}^{k} e^{-a\sqrt{t}}\ dt$. Alors, en sommant et par Chasles, : $\sum_{k=1}^{n} e^{-a\sqrt{k}} \leq \int_0^n e^{-a\sqrt{t}}\ dt$.

   Or, pour $n \geq 1, \sum_{k=0}^{n} e^{-a\sqrt{k}} = 1 + \sum_{k=1}^{n} e^{-a\sqrt{k}}$ d'où $\forall n \geq 1,\ \sum_{k=0}^{n} e^{-a\sqrt{k}} \leq 1 + \int_0^n e^{-a\sqrt{t}}\ dt$ par Chasles et par positivité de l'intégrale.

   En accord avec l'expression précédente, nous en déduisons l'encadrement :

   $$\boxed{\frac{2}{a^2} - \frac{2e^{-a\sqrt{n+1}}}{a^2}\left(1 + a\sqrt{n+1}\right) \leq \sum_{k=0}^{n} e^{-a\sqrt{k}} \leq 1 + \frac{2}{a^2} - \frac{2e^{-a\sqrt{n}}}{a^2}\left(1 + a\sqrt{n}\right).}$$
4. Puisque $\sum_{n\geq 0} e^{-a\sqrt{n}}$ converge, de somme notée $S(a)$, nous avons : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} e^{-a\sqrt{k}} = S(a)$. Par ailleurs : $\frac{2e^{-a\sqrt{n}}}{a^2}\left(1 + a\sqrt{n}\right). \sim \frac{2}{a}\sqrt{n}e^{-a\sqrt{n}}$ donc par croissances comparées $\lim_{n\to+\infty} \frac{2e^{-a\sqrt{n}}}{a^2}\left(1 + a\sqrt{n}\right) = 0$. De même : $\lim_{n\to+\infty} \frac{2e^{-a\sqrt{n+1}}}{a^2}\left(1 + a\sqrt{n+1}\right) = 0$. Ainsi, en passant à la limite l'inégalité précédente nous en déduisons l'encadrement : $\frac{2}{a^2} \leq S(a) \leq 1 + \frac{2}{a^2}$.

En divisant par $\frac{2}{a^2} > 0$ il vient : $1 \leq \frac{S(a)}{\frac{2}{a^2}} \leq 1 + \frac{a^2}{2}$. Par théorème d'encadrement on en déduit $\lim_{a \to 0^+} \frac{S(a)}{\frac{2}{a^2}} = 1$ ce qui prouve au final que : $\boxed{S(a) \sim_{0^+} \frac{2}{a^2}.}$

Correction de l'exercice 4:

Problème I : Algèbre et Géométrie

A. Étude de deux applications

1. Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$, alors $f(P) = \frac{1}{2}[a(\frac{X}{2})^2 + b\frac{X}{2} + c + a(\frac{X+1}{2})^2 + b\frac{X+1}{2} + c] = \frac{a}{4}X^2 + \frac{a+2b}{4}X + \frac{a}{8} + \frac{b}{4} + c \in \mathbb{R}_2[X]$ donc f est à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$.
Par ailleurs soient $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f(\lambda P + Q) = \frac{1}{2}[\lambda P(\frac{X}{2}) + Q(\frac{X}{2}) + \lambda P(\frac{X+1}{2}) + Q(\frac{X+1}{2})] = \lambda\frac{1}{2}[P(\frac{X}{2}) + P(\frac{X+1}{2})] + \frac{1}{2}[Q(\frac{X}{2}) + Q(\frac{X+1}{2})] = \lambda f(P) + f(Q)$ donc f est linéaire.

2. Soient $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$, $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\varphi(\lambda P + Q) = \lambda P(1) + Q(1) = \lambda\varphi(P) + \varphi(Q)$ donc φ est linéaire.

3. $f(1) = 1$ donc la première colonne de la matrice est $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$f(X) = \frac{1}{2}X + \frac{1}{4}$ donc la deuxième colonne de la matrice est $\begin{pmatrix}1/4\\1/2\\0\end{pmatrix}$

$f(X^2) = \frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{4}X + \frac{1}{8}$ donc la troisième colonne de la matrice est $\begin{pmatrix}1/8\\1/4\\1/4\end{pmatrix}$

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix}1 & 1/4 & 1/8\\0 & 1/2 & 1/4\\0 & 0 & 1/4\end{pmatrix}$

4. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est triangulaire sans élément nul sur la diagonale donc elle est inversible donc f est bijectif (donc injectif et surjectif).

5. Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$.
$\varphi(P) = 0 \iff a + b + c = 0 \iff a = -b - c \iff P = (-b-c)X^2 + bX + c = b(X - X^2) + c(1 - X^2)$ donc $\mathrm{Ker}\varphi = \mathrm{Vect}(X - X^2, 1 - X^2)$.
Vérifions que $(X - X^2, 1 - X^2)$ est libre : soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1(X - X^2) + \lambda_2(1 - X^2) = 0$, en évaluant en 0 il vient $\lambda_2 = 0$, il reste $\lambda_1(X - X^2) = 0$ d'où $\lambda_1 = 0$.
Donc $(X - X^2, 1 - X^2)$ est libre : c'est donc une base de $\mathrm{Ker}\varphi$ et $\dim(\mathrm{Ker}\varphi) = 2$.

6. Grâce au théorème du rang, $\mathrm{rg}(\varphi) = \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = 1 = \dim(\mathbb{R})$ donc φ est surjective. Mais $\dim(\mathrm{Ker}\varphi) \neq 0$ donc φ n'est pas injective.

B. Calcul des puissances successives d'une matrice

7. Montrons qu'il s'agit d'une famille libre : soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1.1 + \lambda_2(-2X) + \lambda_3(6X^2 - 6X + 1) = 0$

Il vient $6\lambda_3X^2 + (-2\lambda_2 - 6\lambda_3)X + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ d'où $\begin{cases}6\lambda_3 = 0\\-2\lambda_2 - 6\lambda_3 = 0\\\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0\end{cases}$ d'où $\begin{cases}\lambda_3 = 0\\\lambda_2 = 0\\\lambda_1 = 0\end{cases}$

Donc $\mathcal{B}'$ est libre. Puisque $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$, c'est une base.

8. Il s'agit de ranger en colonnes les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$: $Q = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & -2 & -6\\0 & 0 & 6\end{pmatrix}$

9. En effectuant la séquence d'opérations élémentaires $L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2$, $L_3 \leftarrow \frac{1}{6}L_3$, $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3$, $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$ puis $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ on se ramène à la matrice identité. Donc Q est inversible.

En effectuant les mêmes opérations sur la matrice identité on arrive à $Q^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 1/2 & 1/3\\0 & -1/2 & -1/2\\0 & 0 & 1/6\end{pmatrix}$

10. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}f = Q^{-1}.\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}f.Q = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1/2 & 0\\0 & 0 & 1/4\end{pmatrix}$

11. Par propriété des matrices diagonales, $(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}f)^n = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & (1/2)^n & 0\\0 & 0 & (1/4)^n\end{pmatrix}$ puis (par une récurrence facile)

$A^n = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}f)^n = Q.(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}f)^nQ^{-1} =$ (après calcul) $\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2^n}) & \frac{1}{6}(2 + \frac{1}{4^n} - \frac{3}{2^n})\\0 & \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n}\\0 & 0 & \frac{1}{4^n}\end{pmatrix}$

1

12. Les coordonnées de $f^n(P)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont $(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}f)^n.\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$

D'où $f^n(P) = a + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{2^n})b + (\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\frac{1}{4^n} - \frac{1}{2}\frac{1}{2^n})c + (\frac{1}{2^n}b + (\frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n})c)X + c\frac{1}{4^n}X^2$

13. $\varphi(f^n(P)) = (f^n(P))(0) = a + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{2^n})b + (\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\frac{1}{4^n} - \frac{1}{2}\frac{1}{2^n})c$

En faisant tendre n vers $+\infty$ dans la quantité précédente on obtient $a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}$ ce qui vaut $\int_0^1 P$.

C. Une autre preuve du résultat précédent

14. On fixe $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Pour $n = 0$ il vient $\frac{1}{2^0}\sum_{k=0}^{2^0-1} P(\frac{X+k}{2^0}) = P(X) = Id(P) = f^0(P)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $f^n(P) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} P(\frac{X+k}{2^n})$. Alors :

$$f^{n+1}(P) = f^n(f(P)) = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{2^n-1} P(\frac{\frac{X+k}{2^n}}{2}) + P(\frac{\frac{X+k}{2^n}+1)}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{2^n-1} P(\frac{X+k}{2^{n+1}}) + \sum_{k=0}^{2^n-1} P(\frac{X+k+2^n}{2^{n+1}})\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{2^n-1} P(\frac{X+k}{2^{n+1}}) + \sum_{k=2^n}^{2^n+2^n-1} P(\frac{X+k}{2^{n+1}})\right] = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} P(\frac{X+k}{2^{n+1}})\right]$$

donc par récurrence la proposition est prouvée.

15. Rappelons le théorème de convergence des sommes de Riemann : si P est continue sur le segment $[a, b]$ alors
$\lim\limits_{N\to+\infty} \frac{b-a}{N}\sum_{k=0}^{N-1} P(a + k\frac{b-a}{n}) = \int_a^b P(t)\mathrm{d}t$.

Ici $\varphi(f^n(P)) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} P(k/2^n)$: on pose $a = 0$, $b = 1$, $N = 2^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, on peut appliquer le théorème précédent car $x \mapsto P(x)$ est continue (car polynomiale).