Devoir surveillé n° 8.

Durée : 1h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Dans cette épreuve, les candidats sont invités à illustrer, s'ils le jugent nécessaire, leurs réponses avec un dessin.

Exercice

Soit f la fontion définie sur $\mathbb{R}^*$ et telle que : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \dfrac{2}{x}$.

Dans le plan muni du repère orthonormé direct usuel : $(O;\ \overrightarrow{i};\ \overrightarrow{j})$ on note : $F(2;\ 2)$, $A(2;\ 1)$ et $B(2;\ 0)$ et $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de le fonction f dans le plan.

1. Vérifier que $A \in \mathcal{C}_f$ et déterminer une équation de la tangente en A à $\mathcal{C}_f$. On notera T_A cette tangente dans la suite de l'exercice.
2. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de F sur T_A.
3. Soit C le point de coordonnées $\left(\frac{8}{5};\ \frac{6}{5}\right)$. Donner une représentation paramétrique de la médiatrice Δ de $[CB]$.
4. Déterminer des équations cartésiennes des cercles de rayon 2, passant par C et dont le centre est sur la droite Δ. On appellera dans la suite $\mathcal{C}$ le cercle de centre l'origine du repère et de rayon 2.
5. Soit maintenant $t \in]0;\ 2\pi[$ et $M(2\cos(t);\ 2\sin(t))$. Vérifier que $M \in \mathcal{C}$ et donner une équation cartésienne de la perpendiculaire à (FM) passant par M que l'on notera $\mathcal{D}$.
6. On note T_{x_0} la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x_0 et on admet que T_{x_0} a pour équation cartésienne : $x + \dfrac{x_0^2}{2}y - 2x_0 = 0$. Montrer que $\mathcal{D}$ est parallèle à T_{x_0} si et seulement si :
$$x_0^2 = \frac{2(1-\sin(t))}{1-\cos(t)}.$$
7. On pose : $A = \dfrac{\cos(t)+\sin(t)-1}{1-\cos(t)}$. Justifier que A est bien défini et que $A^2 = \dfrac{2(1-\sin(t))}{1-\cos(t)}$. En déduire que $\mathcal{D}$ est tangente à $\mathcal{C}_f$ en un point de $\mathcal{C}_f$ dont on précisera l'abscisse.

⋆⋆⋆
FIN
⋆⋆⋆

Correction de l'exercice :

1. Nous avons $x_A = 2$ et $y_A = 1$ donc ; $y_A = \dfrac{2}{x_A}$ ce qui prouve que $A \in \mathcal{C}_f$.

   Une équation réduite de la tangente en A est : $y = f'(x_A)(x - x_A) + f(x_A)$. Or : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = -\dfrac{2}{x^2}$ donc une équation réduite est : $y = -\dfrac{2}{2^2}(x-2) + 1 \Leftrightarrow$ $\boxed{x + 2y - 4 = 0.}$

2. Soit $H(x;\ y)$ le projeté orthogonal de F sur T_A. Alors $\overrightarrow{FH}$ est un vecteur orthogonal à T_A donc colinéaire à $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Ainsi, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que : $\overrightarrow{FH} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   Par conséquent $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = 2t + 2 \end{cases}$. De plus $M \in T_A$ donc : $x + 2y - 4 = 0 \Leftrightarrow$ $(t+2) + 2(2t+2) - 4 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{2}{5}$. Au final : $\boxed{M\left(\dfrac{8}{5};\ \dfrac{6}{5}\right).}$

3. Par définition $\frac{5}{2}\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur orthogonal à Δ donc $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ. De plus, si l'on note I le milieu de $[CB]$ alors $I \in \Delta$. Or $I(\frac{9}{5};\ \frac{3}{5})$, donc $M(x;\ y) \in \Delta \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}\ /\ \overrightarrow{IM} = t\overrightarrow{u}$ ce qui donne : $\boxed{\begin{cases} x = \frac{9}{5} + 3t \\ y = \frac{3}{5} + t \end{cases}}$ comme représentation paramétrique de Δ.

4. Soit $\mathcal{C}$ un cercle de rayon 2, passant par C et dont le centre Ω est sur la droite Δ. Ainsi $x_\Omega = \frac{9}{5} + 3t$ et $y_\Omega = \frac{3}{5} + t$. De plus $\Omega C^2 = 4 \Leftrightarrow (-1/5 + 3t)^2 + (\frac{3}{5} + t)^2 = 4 \Leftrightarrow t^2 = \frac{9}{25}$. Les deux valeurs de t possibles sont donc :

   - $t = -\frac{3}{5}$ ce qui donne pour centre le point de coordonnées $(0;\ 0)$ et donc : $\boxed{x^2 + y^2 = 4}$ comme équation cartésienne.
   - $t = \frac{3}{5}$ ce qui donne pour centre le point de coordonnées $(18/5;\ 6/5)$ et donc : $\boxed{(x - \dfrac{18}{5})^2 + (y - \dfrac{6}{5})^2 = 4}$ comme équation cartésienne.

5. Soit maintenant $t \in]0;\ 2\pi[$ et $M(2\cos(t);\ 2\sin(t))$.

   On constate que $x_M^2 + y_M^2 = 4(\cos^2(t) + \sin^2(t)) = 4$ ce qui prouve que $\boxed{M \in \mathcal{C}.}$

   Par définition, $\overrightarrow{FM}\begin{pmatrix} 2(\cos(t) - 1) \\ 2(\sin(t) - 1) \end{pmatrix}$ est un vecteur orthogonal à $\mathcal{D}$. De plus $M \in \mathcal{D}$. Ainsi : $N(x;\ y) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{FM} = 0 \Leftrightarrow (x - 2\cos(t))(\cos(t) - 1) = 0 + (y - 2\sin(t))(\sin(t) - 1) = 0$ ce qui donne au final comme équation cartésienne, après simplifications :

$$\boxed{(1 - \cos(t))x + (1 - \sin(t))y - 2(\cos(t) + \sin(t) - 1) = 0.}$$

6. On note T_{x_0} la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x_0 et on admet que T_{x_0} a pour équation cartésienne : $x + \dfrac{x_0^2}{2}y - 2x_0 = 0$. Un vecteur orthogonal à $\mathcal{D}$ est donc $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{x_0^2}{2} \end{pmatrix}$. Un vecteur orthogonal à $\mathcal{D}$ étant $\begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ 1 - \sin(t) \end{pmatrix}$, on en déduit que $\mathcal{D}$ est parallèle à T_{x_0} si et seulement si $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{x_0^2}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ 1 - \sin(t) \end{pmatrix} = 0\right]$. Or $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{x_0^2}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ 1 - \sin(t) \end{pmatrix}\right] = (1 - \sin(t)) - (1 - \cos(t))\frac{x_0^2}{2}$. Par ailleurs $t \in]0;\ 2\pi[$ donc $1 - \cos(t) \neq 0$. Il s'ensuit que $\mathcal{D}$ est parallèle à T_{x_0} si et seulement si :

$$(1 - \sin(t)) = (1 - \cos(t))\frac{x_0^2}{2} \Leftrightarrow \boxed{x_0^2 = \frac{2(1 - \sin(t))}{1 - \cos(t)}.}$$

7. On pose : $A = \dfrac{\cos(t) + \sin(t) - 1}{1 - \cos(t)}$.

   Comme $t \in]0;\ 2\pi[$ alors $1 - \cos(t) \neq 0$ ce qui justifie que $\underline{A \text{ est bien défini}}$. De plus :

$$\begin{aligned}\boxed{A^2} &= \frac{(\cos(t)+\sin(t)-1)^2}{(1-\cos(t))^2}\\ &= \frac{\cos^2(t)+\sin^2(t)+1+2\cos(t)\sin(t)-2\cos(t)-2\sin(t)}{(1-\cos(t))^2}\\ &= \frac{2+2\cos(t)\sin(t)-2\cos(t)-2\sin(t)}{(1-\cos(t))^2}\\ &= \frac{2(1-\cos(t))+2\cos(t)\sin(t)-2\sin(t)}{(1-\cos(t))^2}\\ &= \frac{2(1-\cos(t))-2\sin(t)(1-\cos(t))}{(1-\cos(t))^2}\\ &= 2\frac{(1-\cos(t))(1-\sin(t))}{(1-\cos(t))^2}\\ &\boxed{= 2\frac{1-\sin(t)}{1-\cos(t)}.}\end{aligned}$$

Posons alors : $x_0 = \dfrac{\cos(t)+\sin(t)-1}{1-\cos(t)}$. Alors d'après ce calcul : $x_0^2 = \dfrac{2(1-\sin(t))}{1-\cos(t)}$ ce qui prouve que T_{x_0} et $\mathcal{D}$ sont parallèles. On veut maintenant prouver qu'elles sont confondues. Or $\mathcal{D}$ a pour équation cartésienne : $(1-\cos(t))x+(1-sin(t))y-2(\cos(t)+\sin(t)-1) = 0 \Leftrightarrow x + \dfrac{1-\sin(t)}{1-\cos(t)}y - 2\dfrac{\cos(t)+\sin(t)-1}{1-\cos(t)} = 0$. Par ailleurs : $x_0 = \dfrac{\cos(t)+\sin(t)-1}{1-\cos(t)}$ et $x_0^2 = \dfrac{2(1-\sin(t))}{1-\cos(t)}$. Une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ est donc également : $x + \dfrac{x_0^2}{2}y - 2x_0 = 0$. Or, ceci est d'après l'énoncé une équation cartésienne de T_{x0}. Ainsi $\underline{\mathcal{D}\text{ et }T_{x_0}}$ ont même équation cartésienne donc sont confondues !

On a ainsi prouvé que $\mathcal{D}$ est une tangente à la courbe réprésentative de f au point d'abscisse $\boxed{x_0 = \dfrac{\cos(t)+\sin(t)-1}{1-\cos(t)}.}$

⋆ ⋆ ⋆

FIN

⋆ ⋆ ⋆