Devoir surveillé nº 8.

Durée: 3h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Dans cette épreuve, les candidats sont invités à illustrer, s'ils le jugent nécessaire, leurs réponses avec un dessin.

Lycée Déodat de Séverac Mathématiques PTSI

Exercice 1

- 1. Calculer $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} \frac{1}{x\sqrt{1+x}}\right)$.
- 2. Déterminer $\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{2\sqrt{3}\sin(x) 3}{2\cos(x) 1}$.
- 3. Déterminer un équivalent en $+\infty$ et en 0 de $\frac{1}{\sqrt{x+2}} \frac{2}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x}}$.
- 4. Montrer que la fonction f d'expression $f(x) = x\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}$ admet une asymptote en $+\infty$ dont on donnera une expression. Préciser la position locale de la courbe représentative de f par rapport à son asymptote en $+\infty$.

Exercice 2

Soit n un entier naturel non nul. On définit pour tout nombre réel x la fonction f_n par $f_n(x) = x^5 + nx - 1$.

- 1. Montrer que pour pour tout entier naturel n non nul, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution réelle que l'on notera u_n .
- 2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 < u_n < \frac{1}{n}$.
- 3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel que l'on notera ℓ .
- 4. Montrer que $u_n \sim \frac{1}{n}$.
- 5. On pose : $v_n = \frac{1}{n} u_n$. Montrer que $v_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ puis déterminer un équivalent simple de v_n .
- 6. Montrer que $u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^{\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$, où a, b et α sont des réels que l'on précisera.

Exercice 3

On considère dans cette question $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A \neq 0_2$ et $A^2 = 0_2$. On pose $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et considère l'application $f : E \to E$ définie par : f(M) = AM.

- 1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$.
- 2. Justifier les points suivants :
 - (i) A n'est pas inversible.
 - (ii) $A \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$.

f est-elle injective? surjective?

- 3. Montrer que $\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Ker}(f)$.
- 4. En déduire que $rg(f) \le 2$, puis les deux valeurs possibles pour rg(f).
- 5. (a) On suppose rg(f) = 1. Montrer que Im(f) = Vect(A).
 - (b) On suppose rg(f) = 2. Montrer que Im(f) = Ker(f).
- 6. (a) On considère uniquement dans cette question $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 , déterminer une base de Im(f), de Ker(f) et calculer rg(f).

(b) On considère uniquement dans cette question $A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 , déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$, de $\mathrm{Ker}(f)$ et calculer $\mathrm{rg}(f)$.

Exercice 4

On note $E=\mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$ et pour $f\in E$ on pose, pour tout réel $x:\varphi(f)(x)=\int_0^x e^{x-t}f(t)\ dt$

- 1. Pourquoi φ est-elle bien définie?
- 2. Soit $f \in E$. Justifier que $\varphi(f)$ est de classe C^1 sur $\mathbb R$ et que $\varphi(f)' = \varphi(f) + f$.
- 3. Justifier que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.
- 4. (a) Montrer que $\operatorname{Im}(\varphi) \subset \{f \in E \ / f(0) = 0\}$.
 - (b) Soit $f \in E$ tel que f(0) = 0. Montrer que $\varphi(f') = \varphi(f) + f$.
 - (c) Montrer que $\operatorname{Im}(\varphi) = \{ f \in E / f(0) = 0 \}.$
- 5. Étudier l'injectivité de φ . L'application φ est-elle surjective?
- 6. (a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Résoudre l'équation différentielle (E_λ) : $\lambda y' (\lambda + 1)y = 0$.
 - (b) On note S_{λ} l'ensemble des solutions de (E_{λ}) . Montrer que $\operatorname{Ker}(\varphi \lambda id_E) \subset S_{\lambda}$.
 - (c) Montrer que $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \operatorname{Ker}(\varphi \lambda i d_E) = \{0_E\}.$

FIN

Correction de l'exercice 1:

1. Nous avons: $\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x\sqrt{1+x}} = \frac{x\sqrt{1+x} - \ln(1+x)}{x\sqrt{1+x}\ln(1+x)}$.

Par équivalents usuels : $x\sqrt{1+x}\ln(1+x) \sim_0 x^2$.

De plus: $x\sqrt{1+x} - \ln(1+x) = x + \frac{1}{2}x^2 + o_0(x^2) - (x - \frac{1}{2}x^2 + o_0(x^2)) = x^2 + o_0(x^2)$ donc: $x\sqrt{1+x} - \ln(1+x) \sim_0 x^2$.

Ainsi, par quotient : $\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x\sqrt{1+x}} \sim_0 1$ ce qui prouve que : $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x\sqrt{1+x}}\right) = 1.$

2. Posons : $x=\frac{\pi}{3}+h$. En utilisant le formulaire de trigonométrie nous avons : $\frac{2\sqrt{3}\sin(x)-3}{2\cos(x)-1}=\frac{3(\cos(h)-1)+\sqrt{3}\sin(h)}{\cos(h)-1-\sqrt{3}\sin(h)}.$ On constate alors que :

 $3(\cos(h) - 1) + \sqrt{3}\sin(h) = \sqrt{3}h + o_0(h) \operatorname{donc} 3(\cos(h) - 1) + \sqrt{3}\sin(h) \sim_0 \sqrt{3}h.$

De même : $\cos(h) - 1 - \sqrt{3}\sin(h) \sim_0 -\sqrt{3}h$.

Par quotient : $\frac{3(\cos(h)-1)+\sqrt{3}\sin(h)}{\cos(h)-1-\sqrt{3}\sin(h)} \sim_0 -1$. On en déduit : $\frac{2\sqrt{3}\sin(x)-3}{2\cos(x)-1} \sim_{\frac{\pi}{3}} -1$ ce qui prouve au final que : $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{2\sqrt{3}\sin(x)-3}{2\cos(x)-1} = -1$.

3. • Étude en $+\infty$. Nous avons : $\frac{1}{\sqrt{x+2}} - \frac{2}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\left(1 + \frac{2}{x}\right)^{-1/2} - 2\left(1 + \frac{2}{x}\right)^{-1/2} + 1 \right)$. On se concentre alors sur l'expression : $\left(1 + \frac{2}{x}\right)^{-1/2} - 2\left(1 + \frac{2}{x}\right)^{-1/2} + 1$ donc on obtient un équivalent simple à l'aide de développements limités en posant : $x = \frac{1}{h}$. En effet l'ex-

pression devient : $(1+2h)^{-1/2} - 2(1+h)^{-1/2} + 1 = \frac{3}{4}h^2 + o_0(^2) \sim_0 \frac{3}{4}h^2$. Par conséquent : $\left(1+\frac{2}{x}\right)^{-1/2} - 2\left(1+\frac{2}{x}\right)^{-1/2} + 1 \sim_{+\infty} \frac{3}{4x^2}$ et donc par produit : $\frac{1}{\sqrt{x+2}} - \frac{2}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \sim_{+\infty} \frac{3}{4x^2\sqrt{x}}.$

- Étude en 0. Puisque $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sqrt{x+2}} \frac{2}{\sqrt{x+1}}\right) = -\frac{3}{2}$ et $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ on en déduit : $\frac{1}{\sqrt{x+2}} \frac{2}{\sqrt{x+1}} = o_0\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ ce qui prouve que : $\frac{1}{\sqrt{x+2}} \frac{2}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \sim_0 \frac{1}{\sqrt{x}}$.
- Posons $x=\frac{1}{h}$. L'expression devient alors : $\frac{1}{h}\sqrt{\frac{1+2h}{1+h}}$. Or : $\sqrt{\frac{1+2h}{1+h}}=\sqrt{1+2h}\times(1+h)^{-1/2}=(1+h-\frac{1}{2}h^2+o_0(h^2))(1-\frac{1}{2}h+\frac{3}{8}h^2+o_0(h^2))=1+\frac{1}{2}h-\frac{5}{8}h^2+o_0(h^2)$. Ainsi : $\frac{1}{h}\sqrt{\frac{1+2h}{1+h}}=\frac{1}{h}+\frac{1}{2}-\frac{5}{8}h+o_0(h)$. Au final : $f(x)=x+\frac{1}{2}-\frac{5}{8x}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$. On en déduit : $f(x)-(x+\frac{1}{2})\sim_{+\infty}-\frac{5}{8x}$, ce qui prouve, d'une part que $\lim_{x\to+\infty}f(x)-(x+\frac{1}{2})=0$ donc que la droite d'équation $y=x+\frac{1}{2}$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f, et d'autre part que la courbe représentative de f est en dessous de son asymptote sur un voisinage de $+\infty$ puisque $\forall x\in\mathbb{R}^+_+, -\frac{5}{8x}<0$.

Correction de l'exercice 2:

1. La fonction f_n est polynômiale donc dérivable sur $\mathbb R$ et $\forall x \in \mathbb R$, $f_n'(x) = 5x^4 + n$. Ainsi $\forall x \in \mathbb R$, $f_n'(x) > 0$ puisque n > 0. On constate alors que f_n est strictement croissante sur $\mathbb R$. Elle est de plus continue (car dérivable) ce qui assure que f_n réalise une bijection de $\mathbb R$ vers $f(\mathbb R) = \lim_{x \to -\infty} f_n(x)$; $\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = \mathbb R$. Comme $f_n(x) = 0$. Partient à $f_n(\mathbb R)$ on en déduit l'existence et l'unicite de $f_n(x) = 0$.

- 2. Comme $f_n(0) = -1$ et $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^5}$ on constate que $f_n(0)f_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0$. Or, f_n est continue donc elle admet au moins un zéro dans l'intervalle $\left]0; \ \frac{1}{n}\right[$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Or, l'unique zéro de f_n est u_n d'après la question précédente. On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < u_n < \frac{1}{n}$.
- 3. Nous avons : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < u_n < \frac{1}{n}$ et $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc par théorème d'encadrement $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.
- 4. Puisque $f_n(u_n)=0$ nous avons : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ nu_n=1-u_n^5.$ Or $\lim_{n\to+\infty}(1-u_n^5)=1$ car $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$ d'après la question précédente. On en déduit $1-u_n^5\sim 1$. Ainsi $nu_n\sim 1$ et par produit des équivalents : $u_n\sim \frac{1}{n}$.
- 5. Puisque : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $nu_n = 1 u_n^5$ on en déduit : $nv_n = u_n^5$. Ainsi $\lim_{n \to +\infty} nv_n = 0$ ce qui prouve que $v_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

D'autre part nous avons $\forall n \in \mathbb{N}^*, nv_n = \left(\frac{1}{n} - v_n\right)^5 \Leftrightarrow n^6v_n = (1 - nv_n)^5$. Or $\lim_{n \to +\infty} nv_n = 0$ d'après précédemment donc : $\lim_{n \to +\infty} (1 - nv_n)^5 = 1$. On en déduit : $n^6v_n \sim 1$ c'est à dire : $v_n \sim \frac{1}{n^6}$.

6. Par proriété : $v_n = \frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)$ donc $\frac{1}{n} - u_n = \frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)$ ou encore : $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right).$

Correction de l'exercice 3:

- 1. Par propriété du produit matriciel, si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, alors : $AM \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Ainsi, $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 - Soient $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors : $f(M + \lambda N) = A(M + \lambda N) = AM + \lambda AN$. Donc, $f(M + \lambda N) = f(M) + \lambda f(N)$, ce qui prouve que f est une application linéaire.

Les deux points précédents prouvent que $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$.

- 2. (i) Par hypothèse : $A^2 = 0_2$, donc quel que soit $X \in \mathbb{R}^2$, $A(AX) = 0_{\mathbb{R}^2}$. Puisque $A \neq 0_2$, on sait qu'il existe $X_1 \in \mathbb{R}^2$ tel que $AX_0 \neq 0_{\mathbb{R}^2}$. En posant $X_1 = AX_0$, nous avons alors $AX_1 = 0_{\mathbb{R}^2}$ ce qui prouve que le système homogène associé à A admet une solution non nulle, et donc que A n'est pas inversible.
 - (ii) Nous avons : $f(A) = A^2 = 0_2$, donc $A \in \text{Ker}(f)$. D'autre part, $f(I_2) = AI_2 = A$ donc $A \in \text{Im}(f)$. Ainsi, $A \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$.

 $\operatorname{Ker}(f) \neq \{0_2\}$, donc f n'est pas injective. De plus, f est en endomorphisme en dimension finie donc f n'est pas surjective.

- 3. $f \circ f(M) = f(f(M)) = f(AM) = A(AM) = A^2M = O_2$ car $A^2 = O_2$. Ceci étant vrai pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on en déduit : $f \circ f = 0$.
 - Soit $M \in \text{Im}(f)$, c'est à dire tel que M = f(N), avec $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors : $f(M) = f(f(N)) = (f \circ f)N = 0_2$, car $f \circ f = 0_2$. Par conséquent , si $M \in \text{Im}(f)$, alors $M \in \text{Ker}(f)$, ce qui prouve que : $\boxed{\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)}$.
- 4. D'après la question précédente, $\dim(\operatorname{Im}(f)) \leq \dim(\operatorname{Ker}(f)) \Leftrightarrow \operatorname{rg}(f) \leq \dim(\operatorname{Ker}(f))$. Or, d'après le théorème du rang, $\dim(\operatorname{Ker}(f)) + \operatorname{rg}(f) = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 4$, $\operatorname{donc} : \dim(\operatorname{Ker}(f)) = 4 \dim(\operatorname{Im}(f))$. Ainsi, $\operatorname{rg}(f) \leq \dim(\operatorname{Ker}(f)) \Leftrightarrow \operatorname{rg}(f) \leq 4 \operatorname{rg}(f) \Leftrightarrow 2\operatorname{rg}(f) \leq 4 \Leftrightarrow \boxed{\operatorname{rg}(f) \leq 2}$.

Par ailleurs, f est non nulle donc $\operatorname{rg}(f) \geq 1$. On en déduit que $\operatorname{rg}(f) = 1$ ou $\operatorname{rg}(f) = 2$.

5. (a) On sait que $A \in \operatorname{Im}(f)$ donc $\operatorname{vect}(A) \subset \operatorname{Im}(f)$ car $\operatorname{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. D'autre part, $\dim(\operatorname{vect}(A) = 1 = \operatorname{rg}(f)$ par hypothèse. Par conséquent : $\operatorname{vect}(A) = \operatorname{Im}(f)$.

- (b) Par hypothèse $\operatorname{rg}(f)=2$, donc d'après le théorème du rang, $\dim(\operatorname{Ker}(f))=4-\operatorname{rg}(f)=2$. D'autre part, $\operatorname{Im}(f)\subset\operatorname{Ker}(f)$. Or, $\dim(\operatorname{Im}(f))=\dim(\operatorname{Ker}(f))=2$ donc forcément : $\overline{\operatorname{Im}(f)=\operatorname{Ker}(f)}$.
- 6. (a) Le calcul matriciel donne : $A^2 = 0_2$.
 - Calcul de $\operatorname{Ker}(f)$. Soit $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(f)$. Alors :

$$f(M) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0_2$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow M = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow M \in \text{vect} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ et $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de $\operatorname{Ker}(f)$. D'autre part, cette famille est libre d'après les calculs précédents, donc \mathcal{F} est une base de $\operatorname{Ker}(f)$.

- D'après ci-dessus, $\dim(\operatorname{Ker}(f))=2$, donc d'après le théorème du rang, $\lceil \operatorname{rg}(f)=4-\dim(\operatorname{Ker}(f))=2. \rceil$
- D'après 5.(b), on en déduit que $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Ker}(f) = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$
- Le calcul matriciel donne : $A^2 = 0_2$.
- Calcul de $\operatorname{Ker}(f)$. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(f)$. Alors :

$$f(M) = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0_{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a - \frac{c}{2} & b - \frac{d}{2} \\ 2a - c & 2b - d \end{pmatrix} = O_{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a - \frac{c}{2} = 0 \\ b - \frac{d}{2} = 0 \\ 2a - c = 0 \\ 2b - d = 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - c = 0 \\ 2b - d = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - c = 0 \\ 2b - d = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 2a \\ d = 2b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow M = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow M \in \text{vect} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right).$$

Ainsi, $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right)$ et $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de $\operatorname{Ker}(f)$. D'autre part, cette famille est libre d'après les calculs précédents, donc $\boxed{\mathcal{F}}$ est une base de $\operatorname{Ker}(f)$.

- D'après 5.(b), on en déduit que $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Ker}(f) = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)$.

Correction de l'exercice 4:

1. Puisque $f \in E$, $t \mapsto e^{-t}f(t)$ est continue. Alors $\int_0^x \mapsto e^{-t}f(t) \ dt$ est définie car l'intégrale d'une fonction continue est définie. Par conséquent $x \mapsto$

$$e^x \int_0^x e^{-t} f(t) \ dt$$
 également ce qui correspond à l'expression de $\varphi(f)$.

- 2. Par le théorème fondamental du calcul intégral : $x \mapsto \int_0^x \mapsto e^{-t} f(t) \ dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb R$ et sa dérivée a pour expression : $e^{-x} f(x)$. Ainsi, par produit : $x \mapsto e^x \int_0^x e^{-t} f(t) \ dt$ est de classe C^1 et a pour expression : $e^x \int_0^x e^{-t} f(t) \ dt + f(x)$. Ceci prouve que $\varphi(f)$ est de classe C^1 sur $\mathbb R$ et $\varphi(f)' = \varphi(f) + f$.
- 3. Par linéarité de l'intégrale φ est linéaire. On montre de plus, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi(f) \in C^n(\mathbb{R})$ ce qui prouve que $\varphi(f) \in C^\infty(\mathbb{R})$.
 - Initialisation. Puisque $\varphi(f)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} , $\varphi(f)$ est en particulier continue ce qui prouve que la propriété est vraie pour n=0.
 - Hérédité. Pour un certain $n \in \mathbb{N}$ on suppose que $\varphi(f)$ est de classe C^n sur \mathbb{R} . Or, d'après précédemment, $\varphi(f)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} et $\varphi(f)' = \varphi(f) + f$. Or, par hypothèse d erécurrence, $\varphi \in C^n(\mathbb{R})$. De plus $f \in E$ donc $f \in C^n(R)$. Par somme : $\varphi(f)' \in C^n(\mathbb{R})$ ce qui prouve que $\varphi(f) \in C^{n+1}(\mathbb{R})$. L'hérédité est prouvée.

Au final : φ est linéaire et pour $f \in E$, $\varphi(f) \in E$ ce qui prouve que $\varphi(f) \in \mathcal{L}(E)$.

- 4. (a) Soit $h \in \operatorname{Im}(\varphi)$. Alors il existe $f \in E$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, \ h(x) = \int_0^x e^{x-t} f(t) \ dt$. En particulier $h(0) = \int_0^0 e^{-t} f(t) \ dt = 0$ ce qui prouve que $h \in \{f \in E / f(0) = 0\}$. Par conséquent : $\operatorname{Im}(\varphi) \subset \{f \in E / f(0) = 0\}$.
 - (b) Soit $f \in E$ tel que f(0) = 0. Puisque $f \in E$, f' également donc $\varphi(f')$ est défini et $\forall x \in \mathbb{R}, \ \varphi(f')(x) = \int_0^x e^{x-t} f'(t) \ dt = e^x \int_0^x e^{-t} f'(t) \ dt$; Or, par intégration par parties : $\int_0^x e^{-t} f'(t) \ dt = [e^{-t} f(t)]_0^x + \int_0^x e^{-t} f(t) \ dt$. De plus, f(0) = 0 par hypothèse. Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}, \ \varphi(f')(x) = f(x) + e^x \int_0^x e^{-t} f(t) \ dt = f(x) + \varphi(f)(x)$. Ceci étant vrai pour tout réel x, au final : $\varphi(f') = \varphi(f) + f$.

(c) Nous avons montré ci-dessus que $\operatorname{Im}(\varphi)\subset\{f\in E\ /f(0)=0\}$. Montrons l'inclusion réciproque. Soit donc $f\in E$ tel que f(0)=0. D'après la question précédente nous avons $\varphi(f')+\varphi(f)+f$, donc par linéarité de φ , $f=\varphi(f'-f)$ ce qui prouve que $f\in\operatorname{Im}(\varphi)$ puisque $f'-f\in E$ par opérations usuelles sur les fonctions de classe C^∞ .

Par double inclusion, $\operatorname{Im}(\varphi) = \{ f \in E / f(0) = 0 \}.$

5. Soit $f \in \operatorname{Ker}(\varphi)$. Alors $\varphi(f) = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$. Donc $\varphi(f)' = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$. Or, $\varphi(f)' = \varphi(f) + f$. On en déduit $f = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$. Par conséquent $\operatorname{Ker}(\varphi) \subset \{0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}\}$. L'autre inclusion est évidente cer $\operatorname{Ker}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel puisque φ est linéaire. Au final, par double inclusion, $\operatorname{Ker}(\varphi) = \{0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}\}$. Par caractérisation de l'injectivité des applications linéaires, on en déduit que φ est injective.

D'après la question précédente $\text{Im}(\varphi) \neq E$ donc φ n'est pas surjective.

6. (a)
$$S_{\lambda} = \left\{ x \mapsto C \exp\left(\frac{\lambda + 1}{\lambda}\right), C \in \mathbb{R} \right\}.$$

- (b) Soit $f \in \text{Ker}(\varphi \lambda i d_E)$. Alors $\varphi(f) = \lambda f$. Donc $\varphi(f)' = \lambda f'$. Or, $\varphi(f)' = \varphi(f) + f$. Ainsi $\varphi(f) + f = \lambda f'$. De plus $\varphi(f) = \lambda f$. Au final : $\lambda f' (\lambda + 1)f = 0$ ce qui prouve que $f \in S_{\lambda}$. Ainsi, $\text{Ker}(\varphi \lambda i d_E) \subset S_{\lambda}$.
- (c) La cas où $\lambda=0$ a déjà été traité précédemment. Soit donc $\lambda\in\mathbb{R}^*$ tel que $f\in \mathrm{Ker}(\varphi-\lambda if_E)$. Alors $\varphi(f)=\lambda f$. Or $\varphi(f)(0)=0$ donc f(0)=0 puisque $\lambda\neq 0$. De plus, $f\in S_\lambda$ d'après la question précédente. Ainsi, $\exists C\in\mathbb{R}\ /\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=C\exp\left(\frac{\lambda+1}{\lambda}\right)$. Or, f(0)=0 donc nécessairement C=0 ce qui prouve que f est nulle. On en déduit : $\mathrm{Ker}(\varphi-\lambda id_E)\subset \{0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}\}.$ L'autre inclusion est évidente cer $\mathrm{Ker}(\varphi-\lambda id_E)$ est un sous-espace vectoriel puisque $\varphi-\lambda id_E$ est linéaire. Au final, par double inclusion, $\overline{\mathrm{Ker}(\varphi-\lambda id_E)}=\{0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}\}.$

FIN

Année 2024-2025 5 / 5