Devoir surveillé n^{o} 7.

Durée : 2 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Dans cette épreuve, les candidats sont invités à illustrer, s'ils le jugent nécessaire, leurs réponses avec un dessin.

Exercice

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul.
   (a) Quand dit-on que E est de dimension finie ?
   (b) Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs. Quand dit-on que $\mathcal{F}$ est une famille libre ? une famille génératrice de E ?
   (c) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Quand dit-on que F et G sont deux espaces supplémentaires de E ?
2. On se place dans $\mathbb{R}^4$ et on note : $F = \{(x;\ y;\ z;\ t) \in \mathbb{R}^4 \ / x + y + z + t = 0\}$.
   (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
   (b) On admet également que $H_1 = \left\{(x;\ y;\ z;\ t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ \left\{ \begin{array}{l} x + y = 0 \\ z + t = 0 \end{array} \right. \right\}$ et $H_2 = \mathrm{Vect}((1;\ 1;\ -1;\ -1))$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$. Montrer que H_1 et H_2 sont des sous-espaces vectoriels de F puis que $H_1 \oplus H_2 = F$.
3. On pose : $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ AM = MA\}$.
   (a) Montrer que $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et calculer sa dimension.
   (b) En déduire : $C(A) = \mathrm{Vect}(I_2, A)$.
4. On note $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $F = \{f \in E \ / \ \int_0^1 x f(x)\, dx = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}})$.
   (a) Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
   (b) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
   (c) Montrer que $F \oplus G = E$.
5. On se place dans $\mathbb{R}_3[X]$ et on note :
   $$F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \ / \ P(-1) = P(0) = P(1)\} \text{ et } G = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \ / \ P'(-1) = P'(0) = P'(1)\}.$$
   (a) Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_3[X]$ puis calculer $\dim(F)$ et $\dim(G)$.
   (b) F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$?
   (c) Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_3[X]$.
6. Soient a, b et c trois réels deux à deux distincts et $P_1 = (X-a)(X-c)$, $P_2 = (X-b)(X-c)$ et $P_3 = (X-a)(X-b)$. Montrer que (P_1, P_2, P_3) forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$ puis préciser les coordonnées de $1 + X + X^2$ dans cette base.
7. Calculer $\mathrm{rg}(x \mapsto 1, x \mapsto \cos(x), x \mapsto \cos(2x), x \mapsto \sin^2(x))$.
8. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $F_1, \dots, F_r$ ($r \in \mathbb{N}^*$) tels que $\forall i \in [\![1;\ r]\!]$, $\dim(F_i) = n - 1$. Montrer, en procédant par récurrence sur r, que $\dim \left(\bigcap_{i \in [\![1;\ r]\!]} F_i \right) \geq n - r$.
9. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n ($n \geq 3$) et H un sous-espace vectoriel de dimension $n - 2$.
   (a) Justifier l'existence d'une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que $H = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{n-2})$.
   (b) Posons $H_1 = H + \mathrm{Vect}(e_{n-1})$ et $H_2 = H + \mathrm{Vect}(e_n)$. Montrer que $H_1 \cap H_2 = H$.

⋆ ⋆ ⋆
FIN
⋆ ⋆ ⋆

Correction de l'exercice :

1. (a) Cf. cours
   (b) Cf. cours
   (c) Cf. cours
2. On se place dans $\mathbb{R}^4$ et on note : $F = \{(x;\ y;\ z;\ t) \in \mathbb{R}^4\ /x + y + z + t = 0\}$.
   (a) Cf. fiche méthode
   (b) Pour montrer que H_1 est un sous-espace vectoriel de F, on montre que :

   - $H_1 \subset F$: ce qui est le cas car si $(x;\ y;\ z;\ t) \in H_1$, alors $x+y=0$ et $z+t=0$ donc $x+y+z+t=0$.
   - Le vecteur nul appartient à H_1, ce qui est la cas puisque H_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ d'après l'énoncé.
   - H_1 est stable par combinaison linéaire d'élemnts de H_1, ce qui est la cas puisque H_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ d'après l'énoncé.

   On fait de même avec H_2 :

   - $H_2 \subset F$: Soit $(x;\ y;\ z;\ t) \in H_2$, alors $\exists\lambda \in \mathbb{R}\ /x = -\lambda,\ y = -\lambda,\ z = \lambda, t = \lambda$. En sommant nous aontenons $x + y + z + t = 0$.
   - Le vecteur nul appartient à H_1, ce qui est la cas puisque H_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ d'après l'énoncé.
   - H_1 est stable par combinaison linéaire d'élemnts de H_1, ce qui est la cas puisque H_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ d'après l'énoncé.

   Montrons maintenant que $H_1 \cap H_2 = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$. On procède par double inclusion :

   - $H_1 \cap H_2 \subset \{0_{\mathbb{R}^4}\}$: Soit $u = (x;\ y;\ z;\ t) \in H_1 \cap H_2$. Alors : $\exists\lambda \in \mathbb{R}\ /x = -\lambda,\ y = -\lambda,\ z = \lambda, t = \lambda$ car $u \in H_2$. Or $u \in H_1$ donc $x + y = 0$ ce qui entraîne $-2\lambda = 0$ soit $\lambda = 0$. Par conséquent : $x = y = z = t = 0$.
   - L'inclusion $\{0_{\mathbb{R}^4}\} \subset H_1 \cap H_2$ est évidente car l'intersection de sous-espaces vectoriels est par paropriété un sous-espace vectoriel donc a le vecteur nul par définition d'un sous-espace vectoriel.

   Par ailleurs $\dim(H_2) = 1$ car H_2 est une droite vectorielle par définition. Calculons alors $\dim(H_1)$: soit donc $u = (x;\ y;\ z;\ t) \in H_1$. Alors, $x = -y$ et $z = -t$ donc $u = y(-1;\ 1; 0;\ 0) + t = (0;\ 0;\ -1;\ 1)$ ce qui prouve que $u \in \text{Vect}(u_1, u_2)$ avec $u_1 = (-1;\ 1; 0;\ 0)$ et $u_2 = (0;\ 0;\ -1;\ -1)$. Ainsi : $H_1 \subset \text{Vect}(u_1, u_2)$. de plus, $u_1 \in H_1$ et $u_2 \in H_2$ donc $\text{Vect}(u_1, u_2) \subset H_1$ puisque H_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Au final, par double inclusion : $H_1 = \text{Vect}(u_1, u_2)$.

   On en déduit que (u_1, u_2) est une famille génératrice de H_1. Elle est de plus libre car si $au_1 + bu_2 = 0$ alors $(-a;\ a;\ -b;\ b) = (0;\ 0;\ 0;\ 0)$ ce qui entraîne $a = b = 0$.

   La famille (u_1, u_2) est donc libre et gératrice de H_1 donc est une base de H_1. Comme cette base est constituée de deux éléments on en déduit $\dim(H_1) = 2$.

   Ainsi $H_1 \cap H_2 = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$ et $\dim(H_1) + \dim(H_2) = \dim(F) = 3$ (La preuve de $\dim(F) = 3$ est laissée au lecteur !) donc par caractérisation des supplémentaires en dimension finie $\boxed{H_1 \oplus H_2 = F.}$
3. (a) Cf. TD
   (b) On constate que $I_2 \in C(A)$ car $AI_2 = I_2A = A$. De même : $A \in C(A)$. Or, $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ d'après la question précédente. Ainsi : $\boxed{\text{Vect}(I_2, A) \subset C(A).}$ De plus $\boxed{\dim(\text{Vect}(I_2, A)) = \dim(C(A)) = 2.}$ En effet, la dimension de $C(A)$ a été calculée à la question précédente et $\dim(\text{Vect}(I_2, A)) = \text{rg}(I_2, A) = 2$ par liberté de la famille (si $aI_2 + bA = 0$ alors : $\begin{pmatrix} a-b & -2b \\ b & a+2b \end{pmatrix} = 0_2$ donc nécessairement $a = b = 0$). On déduit donc des deux points précédents que $\boxed{C(A) = \text{Vect}(I_2, A).}$
4. (a) On montre que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. En effet, l'inclusion $E \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est évidente, la fonction nulle est con,itnue sur $\mathbb{R}$ et par propriétés une combinaison linéaire de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ est encore continue sur $\mathbb{R}$.

Puisque E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, par propriété E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

(b)
- $F \subset E$ est évident.
- La fonction nulle appartient à F car $\int_0^1 0\,dx = 0$.
- Soient f_1 et f_2 deux fonctions continues telles que $\int_0^1 xf_1(x)\,dx = 0$ et $\int_0^1 xf_2(x)\,dx = 0$. Posons $g = \lambda f_1 + \mu f_2$. Alors, par linéarité de l'intégrale : $\int_0^1 xg(x)\,dx = \lambda \int_0^1 xf_1(x)\,dx + \mu \int_0^1 xf_2(x)\,dx = \lambda \times 0 + \mu \times 0 = 0$. On en déduit que $g \in F$.

Les trois points précédents étant vérifiés, on en déduit que : F est un sous-espace vectoriel de E.

Puisque $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} \in E$, par propriété $\mathrm{Vect}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}})$ est un sous-espace vectoriel de E.

(c) Montrons que $F \cap G = \{0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}\}$. On procède par double inclusion :

- $F \cap G \subset \{0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}\}$: Soit $f \in F \cap G$. Alors : $\exists \lambda \in \mathbb{R} \,/\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda x$ car $f \in G$. Or $f \in F$ donc $\int_0^1 xf(x)\,dx = 0$ ce qui entraîne $\frac{1}{2}3\lambda = 0$ soit $\lambda = 0$. Par conséquent : $f = 0$.
- L'inclusion $\{0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}\} \subset F \cap G$ est évidente car l'intersection de sous-espaces vectoriels est par paropriété un sous-espace vectoriel donc a le vecteur nul par définition d'un sous-espace vectoriel.

Montrons que $F + G = E$. L'inclusion $F + G \subset E$ étant évidente dans la mesure où $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E, il suffit de montrer que $E \subset F + G$. Soit donc $g \in E$. On montre l'existence de $f_1 \in F$ et $f_2 \in G$ par analyse synthèse :

- **Analyse :** Si $f_1 \in F$ et $f_2 \in G$ sont tels que $f = f_1 + f_2$, alors $\forall x \in \mathbb{R}, f_2(x) = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme $\int_0^1 xf_1(x)\,dx = 0$, par linéarité de l'intégrale : $\int_0^1 xf(x)\,dx = \frac{1}{3}\lambda$. On en déduit : $f_2 : x \mapsto \left(3\int_0^1 xf(x)\,dx\right)x$ et $f_1 : x \mapsto f(x) - \left(\int_0^1 xf(x)\,dx\right)x$.
- **Synthèse :** Posons : $f_1 = x \mapsto f(x) - \left(\int_0^1 xf(x)\,dx\right)x$ et $f_2 : x \mapsto \left(\int_0^1 xf(x)\,dx\right)x$. Alors, directement $f_2 \in G$ et $f = f_1 + f_2$. Il nous reste à montrer que $f_1 \in F$ ce qui est bien le cas puisque : $\int_0^1 xf_1(x)\,dx = \int_0^1 xf(x)\,dx - \left(3\int_0^1 xf(x)\,dx\right)\int_0^1 x^2\,dx = 0$.

Nous avons donc bien prouvé l'existence de $f_1 \in F$, $f_2 \in G$ telsd que $f = f_1 + f_2$.

Finalement $F \cap G = \{0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}\}$ et $F + G = E$ donc $F \oplus G = E$ par caractérisation des supplémentaires.

5. On se place dans $\mathbb{R}_3[X]$ et on note :

$$F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \,/\, P(-1) = P(0) = P(1)\} \text{ et } \{P \in \mathbb{R}_3[X] \,/\, P'(-1) = P'(0) = P'(1)\}.$$

(a)
- $F \subset \mathbb{R}_3[X]$ est évident.
- Le polynôme nul a bien la même valeur en 0, -1 et 1.
- Soient P_1 et P_2 deux éléments de $\mathbb{R}_3[X]$ tels que : $P_1(-1) = P_1(0) = P_1(-1)$ et $P_2(-1) = P_2(0) = P_2(-1)$. Posons $P = \lambda P_1 + \mu P_2$. Alors $P(-1) = \lambda P_1(-1) + \mu P_2(-1) = \lambda P_(0) + \mu P_2(0) = P(0$. De même on montre que $P(1) = P(0)$. Au final $P(-1) = P(0) = P(1)$ ce qui prouve que $P \in F$.

On en déduit que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$. Calculons maintenant la dimension de F :

Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ tel que $P \in F$. Alors : $P(1) = P(-1)$ donc : $a + c = 0$. De plus $P(1) = P(0)$ donc $a + b + c = 0$. Ainsi $c = 0$ et

$a+b=0$ ce qui entraîne $P = aX^3 - aX + d = a(X^3 - X) + d$. On en déduit $P \in \text{Vect}(1, X^3 - X)$. ce qui prouve $F \subset \text{Vect}(1, X^3 - X)$. L'autre inclusion est évidente car $1 \in F$ et $X^3 - X^2 \in F$ et car F est un sous-espace vectoriel de E. Par double inclusion : $F = \text{Vect}(1, X^3 - X)$.

On en déduit que $(1, X^3 - X^2)$ est génératrice de F. Elle est de plus libre car de degrés échelonnés. C'est donc une base de F consituée de deux éléments ce qui pouve que $\boxed{\dim(F) = 2.}$.

De la même façon G est un sous-espace vectoriel de dimension 2 avec $(1, X)$ pour base.

(b) $1 \in F \cap G$ donc $\boxed{F \cap G \neq \{0_{\mathbb{R}[X]}\}}$ ce qui prouve que F et G ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.

(c) On complète la famille libre $(1, X^3 - X^2)$ avec les éléments de la famille génératrice $(1, X, X^2, X^3)$. On voit qu'en rajoutant 1 et X on obtient encore une famille libre $(1, X^3 - X, X, X^2)$ car de degrés échelonnés (quitte à les réorganiser selon les degrés croissants). Oon a donc une famille libre de taille maximale donc une base de $\mathbb{R}_3[X]$ (car $\dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4$.)

Par propriété, $\text{Vect}(1, X^3 - X) \oplus \text{Vect}(1, X) = \mathbb{R}_3[X]$ ce qui prouve que $H = \text{Vect}(1, X)$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_3[X]$.

6. Soient $(\alpha;\ \beta;\ \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3 = 0$. Alors en évaluant en a on obtient $(a-b)(a-c)\alpha = 0$ soit $\alpha = 0$ car $a \neq b$ et $a \neq c$ par hypothèse. De la même façon, en évaluant en b et c on obtient $\beta = \gamma = 0$. Au final la famille (P_1, P_2, P_3) est libre. Or elle est contituée de trois éléments et $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$ donc cette famille est libre de taille maximale, donc une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Soient $(\alpha;\ \beta;\ \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3 = 1 + X + X^2$. Alors en évaluant en a on obtient : $\alpha = \dfrac{1+a+a^2}{(a-b)(a-c)}$. De même en évaluant en β et γ on obtient : $\beta = \dfrac{1+b+b^2}{(b-a)(b-c)}$ et $\gamma = \dfrac{1+c+c^2}{(c-a)(c-b)}$.

7. Comme $\sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$, on constate que $x \mapsto \sin^2(x) \in \text{Vect}(x \mapsto 1, x \mapsto \cos(x), x \mapsto x \mapsto \cos(2x))$. Ainsi $\text{Vect}((x \mapsto 1, x \mapsto \cos(x), x \mapsto x \mapsto \cos(2x), x \mapsto \sin^2(x))) = \text{Vect}((x \mapsto 1, x \mapsto \cos(x), x \mapsto x \mapsto \cos(2x))$ donc $\text{rg}(x \mapsto 1, x \mapsto \cos(x), x \mapsto x \mapsto \cos(2x), x \mapsto \sin^2(x)) = \text{rg}(x \mapsto 1, x \mapsto \cos(x), x \mapsto x \mapsto \cos(2x))$. Or la famille $(x \mapsto 1, x \mapsto \cos(x), x \mapsto x \mapsto \cos(2x))$ est libre.

En effet soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ a + b\cos(x) + c\cos(2x) = 0$. Alors en évaluant en 0 on obtient $a + b + c = 0$, en évaluant en $\frac{\pi}{2}$ on obtient $a - c = 0$, puis en évaluant en π nous avons : $a - b + c = 0$. La première et la dernière relation entraînent $b = 0$. Ainsi $a = c$ et $a = -c$ donc $a = -a \Rightarrow a = 0$. Il s'ensuit $c = -a = 0$.

Par liberté de la famille, $\text{rg}(x \mapsto 1, x \mapsto \cos(x), x \mapsto x \mapsto \cos(2x)) = 3$ ce qui prouve que $\boxed{\text{rg}(x \mapsto 1, x \mapsto \cos(x), x \mapsto x \mapsto \cos(2x), x \mapsto \sin^2(x)) = 3.}$

8.
- **Initialisation :** Pour $r = 1$, nous avons $\dim(F_1) = n - 1$ donc $\dim(F_1) \geq n - 1$.
- **Hérédétité :** On suppose pour un certain $r \in \mathbb{N}^*$ que $\dim\left(\bigcap_{i \in [\![1;\ r]\!]} F_i\right) \geq n - r$

  et on veut montrer que $\dim\left(\bigcap_{i \in [\![1;\ r]\!]+1} F_i\right) \geq n - r - 1$. Posons $H = \bigcap_{i \in [\![1;\ r]\!]} F_i$.

  Alors $\bigcap_{i \in [\![1;\ r]\!]+1} F_i = H \cap F_{r+1}$. Ainsi : $\dim\left(\bigcap_{i \in [\![1;\ r]\!]+1} F_i\right) = \dim(H \cap F_{r+1})$.
  Or, par Grassmann, $\dim(H \cap F_{r+1}) = \dim(H) + \dim(F_{r+1}) - \dim(F + F_{r+1})$.

  Or par :
  — Par hypothèse de récurrence, $\dim(H) = n - r$.
  — Par hypothèse : $\dim(F_{r+1}) = n - 1$
  — $H + F_{r+1} \subset E$ donc $\dim(H + F_{r+1}) \leq n$.
  On en déduit : $\dim(H \cap F_{r+1}) \geq n - r + n - 1 - n$ c'est à dire $\dim(H \cap F_{r+1} \geq n - r - 1$ ce qui prouve l'hérédité.

9. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n ($n \geq 3$) et H un sous-espace vectoriel

de dimension $n-2$.

(a) H est de dimension finie en tant que sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie. Par propriété, il admet donc une base. Cette dernière est constituée de $n-2$ éléments car par hypothèse : $\dim(H) = n-2$.

D'après le théorème de la base incomplète il est possible de compléter cette famille en une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E (car $\dim(E) = n$).

On en déduit l'existence d'une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que $H = \text{Vect}(e_1, \ldots, e_{n-2})$.

(b) Par double inlcusion :

- $H \subset H_1$ et $H \subset H_2$ sont évidents. Ainsi, si $x \in H$, alors $x \in H_1$ et $x \in H_2$ donc $x \in H_1 \cap H_2$ ce qui prouve que $H \subset H_1 \cap H_2$.
- Soit $x \in H_1 \cap H_2$. Alors $x \in H_1$ donc $x = \sum_{k=1}^{n-2} \alpha_k e_k + a e_{n-1}$. De même $x = \sum_{k=1}^{n-2} \beta_k e_k + b e_n$ car $x \in H_2$. En faisant la différence des deux égalités il s'ensuit : $\sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_k - \beta_k) e_k + a e_{n-1} - b e_n = 0_E$. Or $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E donc est libre. Nécessairement : $a = 0$ et $-b = 0$. Comme $a = 0$, nous avons $x = \sum_{k=1}^{n-2} \alpha_k e_k$ ce qui prouve que $x \in H$.

Par double inclusion : $\boxed{H = H_1 \cap H_2.}$

⋆ ⋆ ⋆
FIN
⋆ ⋆ ⋆