Devoir surveillé n° 7.

Durée : 2 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Dans cette épreuve, les candidats sont invités à illustrer, s'ils le jugent nécessaire, leurs réponses avec un dessin.

Exercice 1

1. (a) Donnez les valeurs de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$.
   (b) Montrer que $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \dfrac{1-\cos(x)}{x}$ admet un prolongement de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ que l'on précisera.
2. (a) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que pour tout $k \geq 1$,
   $$\frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq 2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) \leq \frac{1}{\sqrt{k}}.$$
   (b) En déduire que que la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ tend vers $+\infty$.

Exercice 2

Soit $r_0 \in \mathbb{R}$. On pose : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -r_0^2 & 2r_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $B = A - r_0 I_2$.

1. (a) Calculer B^2 puis B^n pour $n \geq 2$.
   (b) En déduire une expression simple de A^n pour tout entier naturel n.
2. On pose : (u_n) une suite de réels telle que $\forall n \in \mathbb{N}, au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$, avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que : $a \neq 0$ et $b^2 - 4ac = 0$.
   (a) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2r_0 u_{n+1} - r_0^2 u_n$ avec $r_0 = -\dfrac{b}{2a}$.
   (b) On pose : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$. Montrer que : $X_{n+1} = AX_n$.
   (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n X_0$.
   (d) On pose : $\mu = u_0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $(\lambda + \mu) r_0 = u_1$. Déduire des questions précédentes que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda n + \mu) r_0^n.$$
   (e) Quel résultat vient-on de démontrer ?

Exercice 3

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on note $S = A^T A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
2. (a) En vous aidant de la définition du produit matriciel vu en cours quelle est l'expression du coefficient (i,i) de S en fonction des coefficients de la matrice A ?
   (b) En déduire que si $S = 0_n$ alors $A = 0_n$.
3. Montrer que si $A \in GL_n(\mathbb{R})$ alors : $S \in GL_n(\mathbb{R})$. Que vaut alors S^{-1} en fonction de A^{-1} ?

4. On suppose dans cette question que $S \in GL_n(\mathbb{R})$ et on veut montrer que $A \in GL_n(\mathbb{R})$. On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = 0_{n1}$.
   (a) Que peut-on dire du système homogène associé à S ?
   (b) Montrer que $SX = 0_{n1}$ puis conclure.
5. On note dans cette question $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ et on veut prouver l'existence de $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tel que $S = A^T A$. On pose : $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que P est inversible, calculer P^{-1} puis P^T.
   (b) Vérifier que $P^{-1}SP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ puis déterminer $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^T B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.
   (c) Proposer alors une matrice A répondant à la problématique.

Exercice 4

(Q 1) (a) Soit $\alpha \neq 0$. Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x+\alpha}$ définie sur $\mathbb{R} - \{-\alpha\}$. Pourquoi f est de classe $\mathcal{C}^\infty$? Calculer $f^{(n)}$ pour tout n.

(b) Calculer alors $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ et en déduire que

$$\boxed{\forall x \in]-\alpha;\alpha[,\ S_n \underset{n\to+\infty}{\to} f(x)}$$

(Q 2) Soit $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$.

(a) Pourquoi f est classe $\mathcal{C}^\infty$?

(b) Rappeler la formule de Leibniz.

(c) On note $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_n = f^{(n)}(0)$. En utilisant $\forall x \in \mathbb{R}, (1+x^2)f(x) = 1$, montrer que :

$$\forall n \geq 2, u_n + n(n-1)u_{n-2} = 0.$$

(d) Calculer u_1 puis montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, u_{2k+1} = 0$.

(e) Calculer u_0 puis montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, u_{2k} = (-1)^k (2k)!$.

(f) Calculer alors $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{u_{2k}}{(2k)!} x^{2k}$ et montrer que

$$\boxed{\forall x \in]-1;1[\ ,\ S_n \underset{n\to+\infty}{\to} f(x)}$$

⋆⋆⋆
FIN
⋆⋆⋆

Correction de l'exercice 1:

1. (a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

   (b) Soit $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ telle que : $\forall x\in\mathbb{R}^*,\ f(x)=\dfrac{1-\cos(x)}{x}$. On commence par montrer que f admet un prolongement par continuité sur $\mathbb{R}$. Pour ceci :

   - f est continue sur $\mathbb{R}^*$ par quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$.
   - Comme $f(x)=x\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$, d'après la question précédente et par opérations usuelles sur les limites nous avons : $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.

   Par propriétés f admet un prolongement par continuité sur $\mathbb{R}$ en posant $f(0)=0$. On veut maintenant montrer que ce prolongement par continuité (encore noté f) est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Pour ceci on vérifie les trois points suivants :

   - f est continue sur $\mathbb{R}$ d'après précédemment.
   - f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ par opérations usuelles et $\forall x\in\mathbb{R}^*,\ f'(x)=\dfrac{x\sin(x)-(1-\cos(x))}{x^2}=\dfrac{\sin(x)}{x}-\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$.
   - D'après la première question et par somme de limites : $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=-\dfrac{1}{2}$.

   Les trois points ci-dessus étant vérifiés, par propriété $\underline{f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$.

2. (a) Posons $f(t)=2\sqrt{t}$ et soit $k\in\mathbb{N}^*$. Sur $I=[k;\ k+1]$ f est dérivable et $\forall t\in I,\ f'(t)=\dfrac{1}{\sqrt{t}}$. Par décroissance de la fonction inverse :
   $\forall t\in I, \dfrac{1}{k+1}\leq f'(t)\leq\dfrac{1}{k}$. Ainsi d'après l'inégalité des accroissements finis :
   $\dfrac{1}{k+1}\leq f(k+1)-f(k)\leq\dfrac{1}{k}$ ce qui s'écrit encore :
   $$\frac{1}{\sqrt{k+1}}\leq 2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})\leq\frac{1}{\sqrt{k}}.$$

   (b) Puisque $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ 2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})\leq\frac{1}{\sqrt{k}}$ on en déduit :
   $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$. Or :
   $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})=2\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})=2(\sqrt{n+1}-1)$ par télescopage. On en déduit : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ U_n\geq 2(\sqrt{n+1}-1)$. Comme par opérations usuelles : $\lim\limits_{n\to+\infty}2(\sqrt{n+1}-1)=+\infty$ par encadrement : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=+\infty.}$

Correction de l'exercice 2:

Soit $r_0\in\mathbb{R}$. On pose : $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -r_0^2 & 2r_0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $B=A-r_0I_2$.

1. (a) Par calcul matriciel $B^2=0_2$ donc pour tout $n\geq 2$, puis $B^n=B^2B^{n-2}=0_2$.

   (b) $A=r_0I_2+B$ et : $r_0I_2B=B(r_0I_2)=r_0B$ donc d'après la formule du binôme :
   $A^n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}r_0^{n-k}B^k$. Or, d'après la question précédente, $B^n=0_2$ si $n\geq 2$.
   Donc :
   $$A^n=r_0^nI_2+nr_0^{n-1}B=\boxed{\begin{pmatrix}(1-n)r_0^n & nr_0^{n-1}\\ -nr_0^{n+1} & (1+n)r_0^n\end{pmatrix}}.$$

2. On pose : (u_n) une suite de réels telle que $\forall n\in\mathbb{N}, au_{n+2}+bu_{n+1}+cu_n=0$, avec $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tels que : $a\neq 0$ et $b^2-4ac=0$.

   (a) Alors : $u_{n+2}=-\dfrac{b}{a}u_{n+1}-\frac{c}{a}u_n$ car $a\neq 0$. De plus, $-\frac{b}{a}=2r_0$ et $b^2=4ac$, donc $\frac{c}{a}=\frac{1}{4}\left(\frac{b}{a}\right)^2=r_0^2$. On en déduit :
   $\forall n\in\mathbb{N},\ \boxed{u_{n+2}=2r_0u_{n+1}-r_0^2u_n}$ avec $r_0=-\dfrac{b}{2a}$

   (b) On pose : $X_n=\begin{pmatrix}u_n\\ u_{n+1}\end{pmatrix}$.

Par calcul matriciel : $AX_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ -r_0^2 u_n + 2r_0 u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$ d'après la question précédente. Or $X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$ par définition. D'où : $\boxed{X_{n+1} = AX_n.}$

(c) Par récurrence :
- **Initialisation :** $A^0 X_0 = I_2 X_0 = X_0$.
- **Hérédité :** Si pour un certain $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$, alors : $AX_n = AA^n X_0 = A^{n+1}X_0$. Or : $X_{n+1} = AX_n$ d'après la question précédente. On en déduit : $X_{n+1} = A^{n+1}X_0$ ce qu'il fallait vérifier.

(d) On pose : $\mu = u_0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $(\lambda + \mu)r_0 = u_1$.

D'après la question précédente et connaissant l'expression simple de A^n en focntion de n, nous avons :
$X_n = \begin{pmatrix} r_0^n(1-n)u_0 + nr_0^{n-1}u_1 \\ -nr_0^{n+1}u_0 + r_0^n(1+n)u_1 \end{pmatrix}$. Or, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ donc par ide,tification :
$u_n = r_0^n(1-n)u_0 + nr_0^{n-1}u_1 = nr_0^{n-1}(u_1 - r_0u_0) + u_0r_0^n$. Or $\mu = u_0$ et $(\lambda+\mu)r_0 = u_1$, donc par différence : $u_1 - r_0u_0 = \lambda r_0$. Par ailleurs : $u_0 = \mu$, ce qui donne en remplaçant dans l'expression précédente :
$u_n = nr_0^{n-1}\lambda r_0 + \mu r_0^n = \boxed{(\lambda n + \mu)r_0^n.}$

(e) On vient de démontrer le théorème de l'expression simple des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 lorsque le discriminant de l'équation caractéristiques est nul.

Correction de l'exercice 3:

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on note $S = A^TA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Par propriétés de la transposition en on déduit : $S^T = A^T(A^T)^T = A^TA = S$ ce qui prouve que $\boxed{S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}).}$
2. (a) Par définition : $S_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2$ car $[A^T]_{ki} = [A]_{ik}$ par définition de la transposition.

   (b) Par hypothèse, $S = 0_n$ donc $\forall i \in [\![1;\ n]\!],\ S_{ii} = 0$ c'est à dire :
   $\forall i \in [\![1;\ n]\!], \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 = 0$. Or, $a_{ik} \geq 0$ car $a_{ik} \in \mathbb{R}$ puisque $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par hypothèse. De plus une somme de nombre réels positifs est nulle si et seulement si tous les termes sont nuls. On en déduit : $\forall i \in [\![1;\ n]\!],\ \forall k \in [\![1;\ n]\!], a_{ik}^2 = 0 \Leftrightarrow a_{ik} = 0$. Les coefficients de A sont donc tous nuls ce qui prouve que A est nulle. Ainsi nécessairement : $\boxed{A = 0_n.}$
3. Si $A \in GL_n(\mathbb{R})$ alors par propriétés $A^T \in GL_n(\mathbb{R})$ et par produit de matrices inversibles : $A^TA \in GL_n(\mathbb{R})$. De plus $(A^TA)^{-1} = A^{-1}(A^T)^{-1} = A^{-1}(A^{-1})^T$, toujours par propriété sdes matrices incersibles. Au final : $\boxed{S \in GL_n(\mathbb{R}).}$ et $\boxed{S^{-1} = A^{-1}(A^{-1})^T.}$
4. On suppose dans cette question que $S \in GL_n(\mathbb{R})$ et on veut montrer que $A \in GL_n(\mathbb{R})$. On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = 0_{n1}$.

   (a) Par caractérisation des matrices inversibles le <u>système homogène associé à S n'admet que la solution nulle.</u>

   (b) Par hypothèse : $AX = 0_{n1}$ donc en multipliant à gauche par A^T on en déduit : $A^TAX = A^T0_{n1}$ c'est à dire $SX = 0_{n1}$ car $A^T0_{n1} = 0_{n1}$. Ainsi $SX = 0_{n1}$ donc $X = 0_{n1}$ conformément à la question précédente. Nous avons prouvé que : $AX = 0_{n1} \Rightarrow X = 0_{n1}$ ce qui prouve que le système homogène associé à A n'admet que la solution nulle. Toujours par caractérisation des matrices inversibles, $\boxed{A \in GL_n(\mathbb{R}).}$
5. On note dans cette question $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ et on veut prouver l'existence de $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tel que $S = A^TA$. On pose : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) La résolution du système $PX = B$ prouve l'inversibilité de la matrice P ainsi que : $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}}$.

On constate directement que $\boxed{P^{-1} = P^T.}$

(b) Par calcul matriciel $P^{-1}SP = P^TSP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Posons alors $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On constate que $B \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ donc $B^TB = B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

(c) Posons alors $A = PBP^{-1} = PBP^T$. Alors : $A^T = PBP^T$ par propriétés de la transposition donc : $A^TA = PBP^TPBP^T$. Comme $P^T = P^{-1}$ nous avons $PP^T = I_3$ donc $A^TA = PB^2P^T = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}P^{-1}$. Or, d'après précédemment : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = P^{-1}SP$. Ainsi : $A^TA = PP^{-1}SPP^{-1} = S$.

On a donc prouvé que : $\boxed{A = PBP^{-1} =}$ est telle que $A^TA = B$ donc répond à la problématique.

Correction de l'exercice 4:

(Q 1) (a) Soit $\alpha \neq 0$. Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x+\alpha}$ définie sur $\mathbb{R} - \{-\alpha\}$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en tant que fonction rationnelle. Puis, $f(x) = (x+\alpha)^{-1}$; $f'(x) = (-1)(x+\alpha)^{-2}$ $f^{(2)} = (-1)(-2)(x+\alpha)^{-3}$. On conjecture que $\forall x \in \mathbb{R} - \{-\alpha\}$, $f^{(n)}(x) = (-1)^n n!(x+\alpha)^{-n-1}$ et on le démontre par récurrence.

i. L'initialisation a été faite au rang $n = 0,\ n = 1, n = 2$.

ii. Supposons que $f^{(n)}(x) = (-1)^n n!(x+\alpha)^{-n-1}$ à un rang $n \geq 0$ fixé quelconque. Alors $f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x) = (-1)^n n!(-n-1)(x+\alpha)^{-n-2} = (-1)^{n+1}(n+1)!(x+\alpha)^{-[n+1]-1}$. Ainsi, l'hérédité est démontrée.

iii. Par le théorème de récurrence, on a montré que $\forall n \in \mathbb{N}$,$\forall x \in \mathbb{R} - \{-\alpha\}$, $f^{(n)}(x) = (-1)^n n!(x+\alpha)^{-n-1}$.

(b) Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \cancel{k!}\alpha^{-k-1}}{\cancel{k!}}x^k \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{\alpha}(-\frac{x}{\alpha})^k \\ &= \frac{1}{\alpha}\begin{cases} \frac{1-(-\frac{x}{\alpha})^{n+1}}{1+\frac{x}{\alpha}} & \text{si } -\frac{x}{\alpha} \neq 1 \\ n+1 & \text{si } (-\frac{x}{\alpha}) = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Puisque $\left|(-\frac{x}{\alpha})^{n+1}\right| = \left(\frac{|x|}{|\alpha|}\right)^{n+1} \to 0$ si $\frac{|x|}{|\alpha|} < 1$, on en déduit que $\forall x \in]-\alpha;\alpha[$, $S_n \to_{n\to+\infty} \frac{1}{\alpha} \times \frac{1}{1+\frac{x}{\alpha}} = \frac{1}{\alpha+x} = f(x)$, ce qu'il fallait démontrer.

(Q 2) Soit $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$.

(a) La fonction f est classe $\mathcal{C}^\infty$ en tant que fonction rationnelle.

(b) Pour u et v deux fonctions n fois dérivable sur un intervalle, alors uv est n fois dérivables et

$$(u \times v)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(k)} \times v^{(n-k)}$$

(c) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $u : x \mapsto 1 + x^2$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Par la formule de Leibniz,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(k)}(x) f^{(n-k)}(x) = 0$$

Puisque $u'(x) = 2x$, $u''(x) = 2; \forall n \geq 3, u^{(k)}(x) = 0$, on obtient :

$$\binom{n}{0} u(x) f^{(n)}(x) + \binom{n}{1} u'(x) f^{(n-1)}(x) + \binom{n}{2} u''(x) f^{(n-2)}(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 + x^2) f^{(n)}(x) + 2nx f^{(n-1)}(x) + \frac{n(n-1)}{2} \times 2 f^{(n-2)}(x) = 0$$

Ainsi,

$$f^{(n)}(0) + n(n-1) f^{(n-2)}(0) = 0$$

ce qu'il fallait démontré.

(d) Pour $u_1 = f'(0) = 0$. Effectuons une récurrence pour montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, u_{2k+1} = 0$.

i. Pour $k = 0$, on a $u_1 = 0$.

ii. On suppose que $u_{2k+1} = 0$ pour un rang $k \in \mathbb{N}$ fixé quelconque. Alors par la question 2c,

$$u_{2[k+1]+1} = u_{2k+3} = -(2k+3)(2k+3-1)u_{2k+1} = 0$$

par l'hypothèse de récurrence.

iii. Par le théorème de récurrence, on a donc montré que $\forall k \in \mathbb{N}, u_{2k+1} = 0$.

(e) Pour $u_0 = 1$. Effectuons une récurrence pour montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, u_{2k} = (-1)^k (2k)!$.

i. Pour $k = 0$, on a $u_0 = 1$.

ii. On suppose que $u_{2k+1} = 0$ pour un rang $k \in \mathbb{N}$ fixé quelconque. Alors par la question 2c,

$$u_{2[k+1]} = u_{2k+2} = -(2k+2)(2k+2-1)u_{2k} = (-1)(2k+2)(2k+1) \times (-1)^k (2k)! = (-1)^{k+1}(2k+2)!$$

par l'hypothèse de récurrence.

iii. Par le théorème de récurrence, on a donc montré que $\forall k \in \mathbb{N}, u_{2k} = (-1)^k (2k)!$.

(f) $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{u_{2k}}{(2k)!} x^{2k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \cancel{(2k)!}}{\cancel{(2k)!}} x^{2k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} = \sum_{k=0}^{n} (-x^2)^k = \frac{1-(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}$. Ainsi, $\forall x \in]-1;1[$, $(-x^2)^{n+1} \to_{n\to+\infty} 0$ et donc $S_n \to_{n\to+\infty} \frac{1}{1+x^2} = f(x)$.

⋆ ⋆ ⋆

FIN

⋆ ⋆ ⋆