Devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 6.

Durée : 1 heure

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Dans cette épreuve, les candidats sont invités à illustrer, s'ils le jugent nécessaire, leurs réponses avec un dessin.

Exercice 1

- Questions de « cours »-

1. Montrer, à l'aide la caractérisation séquentielle de la limite, que $x \mapsto \cos(x^2)$ n'a pas de limite en $+\infty$.
2. Étudier la continuité sur $\mathbb{R}$ de f définie par : $f(x) = \begin{cases} e^x \text{ si } x \leq 0 \\ 1 + \frac{x^2}{2} \text{ si } x > 0 \end{cases}$.
3. Montrer que f définie sur $]0;\ 1[\cup]1;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x-1}$ admet un prolongement par continuité sur $]0;\ +\infty[$ que l'on précisera et déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
4. À l'aide de la définition de la limite montrer que : $(x+1)^2$ tend vers 4 en 1.
5. Soit $f : [a;\ b] \to [a;\ b]$ une fonction continue. Montrer que f admet au moins un point fixe.

Exercice 2

1. On considère la fonction f définie sur $]0;\ +\infty[$ par : $f(x) = 2\left(\ln(x) + \dfrac{1}{x}\right)$ et on pose $g(x) = f(x) - x$.
   (a) Donner les tableaux de variations de f et g en précisant les limites aux bords du domaine de définition.
   (b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution que l'on notera α (que l'on ne cherchera pas à expliciter), puis vérifier que $\alpha > 1$.
   (c) Montrer que : $\forall x \in [1;\ \alpha],\ f(x) \in [1;\ \alpha]$ et $f(x) \geq x$.
2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq \alpha$.
   (b) Montrer que (u_n) est croissante.
   (c) En déduire que (u_n) converge vers un réel que l'on précisera.
3. Vérifier que : $\forall x \in]\alpha;\ +\infty[,\ f(x) > \alpha$ et $f(x) \leq x$. En déduire le comportement de la suite lorsque $u_0 > \alpha$.
4. Quel est le comportement de la suite lorsque $u_0 \in]0;\ 1[$?

⋆ ⋆ ⋆
FIN
⋆ ⋆ ⋆

Correction de l'exercice 1:

1. Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{2\pi n}$ et $v_n = \sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$. On constate que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty.}$

   Or, si l'on note $f(x) = \cos(x^2)$ alors $\cos(u_n) = \cos(2\pi n) = 1$ et $\cos(v_n) = \cos(2\pi n + \pi/2) = 0$ par conséquent : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = 1}$ et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n) = 0.}$

   Ainsi, (u_n) et (v_n) sont deux suites tendant vers $+\infty$ mais dont leurs images par f n'ont pas la même limite. Ceci assure que f n'a pas de limite en $+\infty$.

2. - Sur $\mathbb{R}_-*$ $f = \exp$ donc f est continue.
   - Sur $\mathbb{R}_+*$ f est polynômiale donc f est continue.
   - $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = e^0 = 1$ car $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = e^x$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1 + \dfrac{0^2}{2} = 1$ car $\forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ f(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$. De plus $f(0) = e^0 = 1$ par définition de exp. Au final : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$ donc f est continue à droite et à gauche de 0 donc en 0.

   f est finalement continue sur $\mathbb{R}$.

3. - Par quotient de fonctions continues, f est continue sur $]0;\ 1[\cup]1;\ +\infty[$.
   - Par limite usuelle : $\boxed{\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = 1.}$

   Ainsi f admet un prolongement par continuité sur $]0;\ +\infty[$ d'expression : $\tilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x)}{x-1} \text{ si } x \in]0;\ 1[\cup]1;\ +\infty[\\ 1 \text{ si } x = 1 \end{cases}.$

   Si $x > 1$, $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x} \times \dfrac{1}{1 - 1/x}$. Or par croisssances comparées $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 1$ donc par opérations usuelles : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$

4. Soit $\varepsilon > 0$ et considérons $x \in [0;\ 2]$ (qui est de la forme $[1-\eta_1;\ 1+\eta_1]$ avec $\eta_1 = 1$ donc est un voisinage de 1).
   - $|f(x) - 4| = |x-1||x+3|$ donc : $|f(x) - 4| \leq 5|x-1|$ si $x \in [0;\ 2]$.
   - $5|x-1| \leq \varepsilon \Leftrightarrow x \in \left[1 - \frac{\varepsilon}{5};\ 1 - + \frac{\varepsilon}{5}\right]$.
   - Posons $\eta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{5}\right)$. Alors $\eta > 0$ et $\forall x \in [1-\eta;\ 1+\eta]$, $|f(x) - 4| \leq 5|x-1| \leq \varepsilon$.

   Au final, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in [1-\eta;\ 1+\eta]$, $|f(x) - 4| \leq \varepsilon$ ce qui prouve que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 4$ par définition de la limite en un point.

5. Cf. fiche méthode.

Correction de l'exercice 2:

1. (a) Par opérations élémentaires, f est dérivable sur $]0;\ +\infty[$ et $\forall x \in]0;\ +\infty[$, $f'(x) = 2\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right) = \boxed{2\left(\dfrac{x-1}{x^2}\right).}$ $f'(x)$ est donc du signe de $x - 1$. On en déduit le tableau de variations ci-dessous :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

   En effet :
   - $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$ par opérations usuelles ;
   - $f(x) = \dfrac{2}{x}(x\ln(x) + 1)$. Or, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty.}$

On pose : $g(x) = f(x) - x$. De même que f, g est dérivable sur $]0;\ +\infty[$ et pour tout $x \in]0;\ +\infty[$, $g'(x) = f'(x) - 1 = \boxed{\dfrac{1}{x^2}(2x - 2 - x^2).}$ Or le trinôme : $-x^2 + 2x - 2$ a un discriminant strictement négatif et un coefficient dominant égal à -1. Ce dernier est donc toujours strictement négatif, ce qui prouve que $\forall x \in]0;\ +\infty[$, $g'(x) < 0$. Nous en déduisons que g est strictement décroissante.
De plus,

- $\boxed{\lim_{x \to 0^+} g(x) = +\infty}$ par somme ;
- $\boxed{\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty}$ en écrivant : $g(x) = x\left(2\dfrac{\ln(x)}{x} + \dfrac{2}{x^2} - 1\right)$ et en utilisant la croissance comparée : $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.

On en déduit le tableau de variations ci-dessous :

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

(b) g est strictement décroissante et continue sur $]0;\ +\infty[$ donc induit une bijection de $]0;\ +\infty[$ vers : $]\lim_{x \to +\infty} g(x);\ \lim_{x \to 0^+} g(x)[=] - \infty;\ +\infty[$. Or, $0 \in] - \infty;\ +\infty[$, donc l'équation $g(x) = 0$ admet bien une unique solution que l'on notera α dans la suite du problème.
Nous vérifions immédiatement que $g(1) = f(1) - 1 = 1$ donc est strictement positive. Or, $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, donc nécessairement $\alpha \in]1;\ +\infty[\Leftrightarrow \alpha > 1$.

(c) D'après le tableau de variations de f, nous constatons que si $x \in [1;\ \alpha]$, alors $2 \leq f(x) \leq f(\alpha)$. Or $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = \alpha$. Puisque $2 \geq 1$, nous avons bien $1 \leq f(x) \leq \alpha$.

D'autre part, d'après le tableau de variations de g : $\forall x \in [1;\ \alpha]$, $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq x$.

2. (a) On note $\mathcal{P}(n)$ ´ $1 \leq u_n \leq \alpha$ ˇ et on procède par récurrence pour montrer que cette propriété est vraie pour tout entier naturel n.

   - **Initialisation :** Pour $n = 0$, nous avons bien $1 \leq u_0 \leq \alpha$ d'après l'énoncé ce qui prouve l'initialisation.
   - **Hérédité :** Pour un certain $n \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose que $1 \leq u_n \leq \alpha$ et on veut montrer que $1 \leq u_{n+1} \leq \alpha$.
   Or, si $1 \leq u_n \leq \alpha$, d'après 2(b)?, nous avons : $1 \leq f(u_n) \leq \alpha$. Puisque $f(u_n) = u_{n+1}$, nous en déduisons bien que ; $1 \leq u_{n+1} \leq \alpha$, ce qui prouve l'hérédité.

   Par récurrence, nous avons donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq u_n \leq \alpha.}$

   (b) On note $\mathcal{P}(n)$ ´ $u_n \leq u_{n+1}$ ˇ et on procède par récurrence pour montrer que cette propriété est vraie pour tout entier naturel n.

   - **Initialisation :** D'après , si $1 \leq x \leq \alpha$, , alors $f(x) \geq x$. Or $1 \leq u_0 \leq \alpha$, donc $f(u_0) \geq u_0 \Leftrightarrow u_1 \geq u_0$. Ceci prouve que la propriété est vraie pour $n = 0$.
   - **Hérédité :** Pour un certain $n \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose que $u_n \leq u_{n+1}$ et on veut montrer que $u_{n+1} \leq u_{n+2}$.
   Or, si $u_n \leq u_{n+1}$ nous avons $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$ car $u_n \in [1;\ \alpha]$ et puisque f est croissante sur $[1;\ \alpha]$. Mais, par hypothèse : $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$, donc l'hérédité est prouvée.

   Par récurrence, nous avons donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq u_{n+1} \Leftrightarrow (u_n) \text{ est croissante.}}$

   (c) (u_n) est croissante et majorée par α donc converge vers un point fixe de f. Or, l'unique point fixe de f est α donc nécessairement, (u_n) converge vers α.

3. D'après le tableau de variations de f, et puisque $f(\alpha) = \alpha$, si $x \in]\alpha;\ +\infty[$, alors $f(x) > \alpha$.

   D'après le tableau de variations de g, si $x \in]\alpha;\ +\infty[$, alors $g(x) \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq x$.

En reprenant les idées ci-dessus, si $u_0 > \alpha$, alors $f(u_0) > \alpha$ et ainsi de suite en utilisant le principe de récurrence. Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n > \alpha.}$

De même que ci-dessus, puique g est négative sur $]\alpha;\ +\infty[$ $f(u_0) \leq u_0 \Leftrightarrow u_1 \leq u_0$, et puisque f est croissante sur ce même intervalle, nous avons : $f(u_1) \leq f(u_0) \Leftrightarrow u_2 \leq u_1$, et ainsi de suite en utilisant le principe de récurrence. Donc $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui prouve que (u_n) est décroissante. Or, elle est minorée par α donc converge vers l'unique point fixe de f, qui est α.

4. D'après le tableau de variations de f, $\forall x \in]0;\ 1[$, $f(x) > 1$. Ainsi, $u_1 = f(u_0) > 1$. On distingue alors deux cas :

- $u_1 \in]1;\ \alpha[$. On se ramène donc à l'étude précédente faite en 2, mais à partir du rang 1 : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ est alors croissante et majorée donc converge vers l'unique point fixe de f qui est α.
- $u_1 \in]\alpha;\ +\infty[$. On se ramène donc à l'étude précédente faite en 3, mais à partir du rang 1 : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ est alors décroissante et majorée donc converge vers l'unique point fixe de f qui est α.

⋆ ⋆ ⋆
FIN
⋆ ⋆ ⋆