# Devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 6.

**Durée : 2 heures**

**Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.**

---

## L'usage de calculatrices est interdit.

## AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Dans cette épreuve, les candidats sont invités à illustrer, s'ils le jugent nécessaire, leurs réponses avec un dessin.

# Exercice 1

*Les questions suivantes sont indépendantes*

1. Factorisez dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

$$P_1 = (X^2 + X + 1)^2 + 1; \quad P_2 = X^4 - 6X^3 + 12X^2 - 10X + 3.$$

   *On pourra remarquer que $P_2$ a 1 pour racine évidente*
2. Donner une équation cartésienne du plan passant par $A(1,1,0)$, $B(0,1,1)$ et $C(1,0,1)$.
3. On note $\mathcal{D}$ la droite passant par $A(1,1,1)$ et $B(2,3,4)$.
   (a) Donner une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$.
   (b) Donner une représentation cartésienne de la droite $\mathcal{D}'$ parallèle à $\mathcal{D}$ et passant par l'origine du repère.
   (c) Calculer la distance de $I(2,-1,0)$ à $\mathcal{D}$.

# Exercice 2

On se place dans le repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On note :

- $S$ la sphère de centre 0 et de rayon 1 ;
- $A$ l'ensemble des points $(x,y,z)$ de l'espace tels que $x + y + z = \frac{1}{2}$ ;
- $S_1$ l'ensemble des points $(x,y,z)$ de l'espace tels que $x^2 - 2x + y^2 - 2y + z^2 - 2z + \dfrac{11}{4} = 0$.

1. Montrer que $S_1$ est une sphère dont on précisera les coordonnées du centre ainsi que son rayon.
2. Montrer que $A \cap S$ est un cercle dont on précisera les coordonnées du centre ainsi que son rayon.
3. On considère $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ un point de $A \cap S$. Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à $S$ en $M_0$ que l'on notera $T_0$.
4. Soit $M_1(1 + \frac{x_0}{2};\ 1 + \frac{y_0}{2};\ 1 + \frac{z_0}{2})$. Vérifier que $M_1 \in S_1$.
5. On note $T_1$ le plan tangent à $S_1$ en $M_1$. Montrer que $T_1 = T_0$.
6. Montrer que $M_1$ appartient en fait à un cercle dont on précisera les coordonnées du centre ainsi que son rayon.

# Exercice 3

On considère l'équation suivante dans $\mathbb{C}[X]$ : $P(2X) = P'(X)P''(X)$. On note $P$ une solution non nulle de cette équation, $d$ son degré et $a$ son coefficient dominant.

1. Quel est le degré de $P(2X)$ ? De $P'P''$ ? En déduire la valeur de $d$.
2. Quel est le coefficient dominant de $P(2X)$ ? De $P'P''$ ? En déduire la valeur de $a$.
3. Déterminer une expression de $P$.
4. Conclure.

# Exercice 4

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $P = (2X-1)^{2n+1} - 1$.

1. Vérifier que $1$ est racine de $P$ et préciser sa multiplicité.
2. Déterminer l'expression du coefficient dominant ainsi que de son coefficient constant.
3. Déterminer l'expression des autres racines complexes de $P$. On exprimera ces dernières le plus simplement possible à l'aide la fonction $\cos$.
4. Soit $k \in [\![1; n]\!]$ et $u_k = \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$. Montrer que $2n+1-k \in [\![n+1;\ 2n]\!]$ et $u_{2n+1-k} = -u_k$.
5. En déduire : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{1}{2^n}$.

⋆ ⋆ ⋆
FIN
⋆ ⋆ ⋆

**Correction de l'exercice 1:**

1. - $P_1$, cf TD.
   - On constate que que $P_2(1) = 0$. On détermine alors sa multiplicité : $P_2' = 4X^3 - 18X^2 + 24X - 10$ donc $P_2'(1) = 0$. Ensuite : $P_2'' = 12X^2 - 36X + 24$ donc $P_2''(1) = 0$. On remarque que $P_2^{(3)}(1) \neq 0$ ce qui prouve que $1$ est racine de $P_2$ de multiplicité $3$.

     Ainsi : $P_2 = (X-1)^3(aX+b)$. L'identification des termes de plus haut degré entraîne $a = 1$ et l'identification des termes de plus bas degré entraîne $3 = -b$. Au final : $\boxed{P_2 = (X-1)^3(X+3).}$
2. $\begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ y-1 & 0 & -1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = x+y+z-2$. Une équation cartésienne du plan demandé est donc : $x+y+z-2 = 0$.
3. On note $\mathcal{D}$ la droite passant par $A(1,1,1)$ et $B(2,3,4)$.

   (a) $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+2t \\ z = 1+3t \end{cases}$

   (b) Soit $M(x;\ y;\ z)$. Alors $\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3y-2z \\ z-3x \\ 2x-y \end{pmatrix}$. Une représentation cartésienne de $\mathcal{D}'$ est donc : $\begin{cases} 2x-y = 0 \\ z-3x = 0 \end{cases}$

   (c) $d(I, \mathcal{D}) = \dfrac{||\overrightarrow{AI} \wedge \overrightarrow{AB}||}{||\overrightarrow{AB}||} = \dfrac{\sqrt{10}}{7}$.

**Correction de l'exercice 2:**

1. $x^2 - 2x + y^2 - 2y + z^2 - 2z + \dfrac{11}{4} = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = \dfrac{1}{4}$. On reconnaît alors une sphère de centre $(1;\ 1;\ 1)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.
2. $S$ est la sphère de centre l'origine du repère et de rayon $1$. $x + y + z = \frac{1}{2}$ est l'équation d'un plan. Or la distance de l'origine au plant est égale à $\dfrac{|-\frac{1}{2}|}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$. Cette distance étant strictement inférieure au rayon de la sphère, par propriété l'intersection est un cercle.
   - Dont le rayon est égal à $\boxed{\sqrt{1 - \dfrac{1}{12}} = \sqrt{\dfrac{11}{12}}.}$
   - Dont le centre est le projeté orthogonal de l'origine sur la sphère. Ainsi, si l'on note $w(a;\ b;\ b)$ le centre du cercle, par propriété $\overrightarrow{Ow} = t\overrightarrow{n}$ avec $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

     On en déduit $a = b = c = t$. Comme $a + b + c = \frac{1}{2}$, au final $a = b = c = \frac{1}{6}$ et donc : $\boxed{w\left(\dfrac{1}{6};\ \dfrac{1}{6};\ \dfrac{1}{6}\right).}$
3. Soit $M_0(x_0;\ y_0;\ y_0) \in A \cap S$. Notons $T_0$ le plan tangent à $S$ en $M_0$. Alors $M \in T_0 \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M}.\overrightarrow{OM_0} = 0$. On obtient alors pour équation cartésienne : $(x-x_0)x_0 + (y-y_0)y_0 + (z-z_0)z_0 = 0 \Leftrightarrow \boxed{xx_0 + yy_0 + zz_0 = 1}$ car $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1$ dans la mesure où $M_0 \in S$.
4. Soit $M_1(1 + \frac{x_0}{2};\ 1 + \frac{x_0}{2};\ 1 + \frac{z_0}{2})$. Alors, en posant $x_1 = 1 + \frac{x_0}{2}$, $y_1 = 1 + \frac{y_0}{2}$ et $z_1 = 1 + \frac{z_0}{2}$, nous constatons que : $(x_1-1)^2 + (y_1-1)^2 + (z_1-1)^2 = \frac{1}{4}(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) = \frac{1}{4}$ ce qui prouve que $M_1 \in S_1$.
5. Il suffit de montrer que $M_1 \in T_0$ et que la $d(1;\ 1;\ 1), T_0) = \dfrac{1}{4}$.

   Or, $x_1x_0 + y_1y_0 + z_1z_0 = x_0 + y_0 + z_0 + \frac{1}{2}(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

   De plus : $d((1,1,1), T_0) = \dfrac{|x_0 + y_0 + z_0 - 1|}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}} = \frac{1}{2}$ car $x_0 + y_0 + z_0 = \frac{1}{2}$ et car $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1$.

   On en déduit donc que $T_0$ est la tangente à la sphère $S_1$ en $M_1$ ce qui prouve que $T_0 = T_1$.

6. $M_1$ appartient à $S_1$ et de plus, puisque $x_1+y_1+z_1=\dfrac{13}{4}$ car $x_0+y_0+z_0=\frac{1}{2}$, on en déduit que $M_1$ appartient au plan $P_1$ d'équation : $x+y+z-\frac{13}{4}=0$. Ainsi, $M_1$ appartient à l'intersection de ces deux ensembles. Par ailleurs, $d((1;\ 1;\ 1),P_1)=\dfrac{1}{4\sqrt{3}}$. Comme cette distance étant strictement inférieure au rayon de la sphère, par propriété l'intersection est un cercle.

   - Dont le rayon est égal à $\sqrt{1-\frac{1}{36}}=\dfrac{\sqrt{35}}{6}$.
   - Dont le centre est le projeté orthogonal de $(1;\ 1;\ 1)$ sur la sphère $S_1$. Ainsi, si l'on note $w(a;\ b;\ b)$ le centre du cercle et $\Omega=(1;\ 1;\ 1)$, par propriété $\overrightarrow{\Omega w}=t\overrightarrow{n}$ avec $\overrightarrow{n}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. On en déduit $a=b=c=1+t$. Comme $a+b+c=\dfrac{13}{4}$, au final $a=b=c=\frac{1}{12}$ et donc : $w\left(\frac{1}{12};\ \frac{1}{12};\ \frac{1}{12}\right)$.

**Correction de l'exercice 3:**

1. $P(2X)$ est de degré $d$.

   Si $P$ est de degré inférieur ou égal à 1, $P'(X)P''(X)$ est de degré $-\infty$, et sinon $P'$ est de degré $d-1$ et $P''$ de degré $d-2$ donc $P'(X)P''(X)$ est de degré $2d-3$.

   la seule solution de degré inférieure ou égal à 1 est nécessairement le polynôme nul, car alors $P'(X)P''(X)=0$. Or $P$ est non nulle par hypothèse. Nécessairement $P$ est de degré supérieur ou égal à 2 et donc $P'P''$ est de degré $2d-3$. D'après la question précédente, et puisque $P(2X)=P'(X)P''(X)$, on en déduit par passage de l'égalité aux degrés que : $d=2d-3$ soit $\boxed{d=3.}$

2. Nous avons donc $P=aX^3+bX^2+cX+d$, où $a\neq 0$ est le coefficient dominant de $P$. Alors $P(2X)$ a pour coefficient dominant $8a$ et $P'P''$ a pour coefficient dominant $3a\times 6a=18a^2$.

   Or $P(2X)=P'P''$ donc : $8a=18a^2 \Leftrightarrow \boxed{a=\dfrac{4}{9}.}$

3. Les questions précédentes nous mènent à $P=\frac{4}{9}X^3+bX^2+cX+d$ avec $(b,c,d)\in\mathbb{C}^3$.

4. Réciproquement soit $P$ de la forme : $P=\frac{4}{9}X^3+bX^2+cX+d$ avec $(b,c,d)\in\mathbb{C}^3$. Alors $P(2X)=P'P''\Leftrightarrow 4bX=2cX+d=8bX^2+4bX+2bc$. Par identification des coefficients on en déduit : $b=c=d=0$.

   Au final le seul polynôme non nul vérifiant $P(2X)=P'(X)P''(X)$ est $P=\frac{4}{9}X^3$.

**Correction de l'exercice 4:**

1. On constate que $P(1)=0$ et, puisque $P'=2(2n+1)(2X-1)^{2n}$, $P'(1)\neq 0$ ce qui prouve que 1 est racine simple de $P$.

2. Par application du binôme de Newton, $P=\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1}2^k(-1)^{k-1}\binom{2n+1}{k}X^k-2$. Le coefficient dominant vaut donc $2^{2n+1}=2\times 4^n$ et le coefficient constant vaut $-2$.

3. Soit $z\in\mathbb{C}$ une racine complexe de $P$. Alors $(2z-1)^{2n+1}=1$. On se ramène donc aux racines $2n+1$-èmes de l'unité en posant : $Z=2z-1$. Comme $Z^{2n+1}=1$, on en déduit l'existence de $k\in[\![0;\ 2n]\!]$ tel que $Z=e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}$. Ainsi : $2z=1+e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}$. Or, par factorisations par l'angle moitié : $1+e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}=e^{\frac{ik\pi}{2n+1}}(e^{\frac{-ik\pi}{2n+1}}+e^{\frac{ik\pi}{2n+1}})=e^{\frac{ik\pi}{2n+1}}2\cos\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)$. Au final :

   les racines complexes, différentes de 1, ont pour expression : $\boxed{e^{\frac{ik\pi}{2n+1}}\cos\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)}$ avec $k\in[\![1;\ 2n]\!]$ car pour $k=0$ on constate que l'on obtient la valeur 1.

4. Nous avons : $u_{2n+1-k}=\cos\left(\dfrac{(2n+1-k)\pi}{2n+1}\right)=\cos\left(\pi-\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)=$

$-\cos\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right) = -u_k$. de plus ; si $1 \leq k \leq n$, alors $-n \leq -k \leq -1$ et donc $n+1 \leq 2n+1-k \leq 2n$.

5. Notons $P$ produit des racines. D'après précédemment : $P = 1 \times \displaystyle\prod_{k=1}^{2n} e^{\frac{ik\pi}{2n+1}} u_k = \prod_{k=1}^{2n} e^{\frac{ik\pi}{2n+1}} \prod_{k=1}^{n} u_k \prod_{k=n+1}^{2n} u_k$. Or :

- $\displaystyle\prod_{k=1}^{2n} e^{\frac{ik\pi}{2n+1}} = \exp\left(\frac{i\pi}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n} k\right) = e^{in\pi} = (-1)^n$ car $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ ;
- Par changement de variable : $\displaystyle\prod_{k=n+1}^{2n} u_k = \prod_{k=1}^{n} u_{2n+1-k} = \prod_{k=1}^{n}(-u_k) = (-1)^n \prod_{k=1}^{n} u_k$.

Ainsi : $\boxed{P = \left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)^2.}$

De plus, d'après les relations coefficients racines, $P = \dfrac{(-1)^{2n+1}a_0}{a_{2n+1}}$ où $a_0 = -2$ et $a_{2n+1} = 2 \times 4^n$. On en déduit :

$$\left(\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)^2 = \frac{1}{4^n} = \left(\frac{1}{2^n}\right)^2.$$

Par positivité de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$ et $\dfrac{1}{2^n}$ on en déduit au final : $\boxed{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{1}{2^n}.}$

⋆ ⋆ ⋆
FIN
⋆ ⋆ ⋆