Devoir surveillé n° 5 – partie1.

Durée : 2 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Dans cette épreuve, les candidats sont invités à illustrer, s'ils le jugent nécessaire, leurs réponses avec un dessin.

Exercice 1

Les questions suivantes sont indépendantes

1. Étudier la continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction d'expression : $f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$.
2. Soit $f : [0;\ 1] \to [0;\ 1]$ continue. Montrer qu'il existe $c \in [0;\ 1]$ tel que $f(c) = c$.
3. On note α un réel tel que : $0 < \alpha < 1$ et on considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1-\alpha}{(n+1)^\alpha} \leq (n+1)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha} \leq \frac{1-\alpha}{n^\alpha}$.
   (b) En déduire $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.
4. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{4}(x^3 - 3x)$. On note (u_n) la suite définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{+1} = f(u_n)$.
   (a) Déterminer le tableau de variations de f, on notera $x_- < x_+$ les deux extremums locaux. Préciser les points fixes de f que l'on notera $\ell_- < \ell_0 < \ell_+$.
   (b) On suppose $u_0 > \ell_+$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > \ell_+$ puis préciser la monotonie ainsi que le comportement asymptotique de (u_n).
   (c) Faire de même si $u_0 < \ell_-$.
   (d) On note $I = [x_-;\ x_+]$ et on suppose $u_0 \in I$. Montrer que I est un intervalle stable pour f et $\forall (a;\ b) \in I^2,\ |f(b) - f(a)| \leq \frac{3}{4}|b-a|$. Qu'en déduit-on pour le comportement asymptotique de (u_n) ?
   (e) On suppose $u_0 = 2$. Déterminer le comportement asymptotique de (u_n).

Exercice 2

On considère $I =]-1;\ 1[$ et f la fonction, définie sur I, et telle que : $\forall x \in I,\ f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$.

1. Justifier l'existence de $0 < \eta < 1$ tel que : $\forall x \in [-\eta;\ \eta],\ 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} > 0$.
2. On admet l'inégalité classique : $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$. En déduire :
   $\forall x \in [-\eta;\ \eta],\ e^x \leq \frac{1}{1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}}$.
3. Déduire des inégalités précédentes les inégalités suivantes :
$$\forall x \in [-\eta; \eta], \frac{x^3(10 - 9x + 4x^2 - x^3)}{12(1-x)(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6})} \leq \frac{1}{1-x} - e^x - \frac{x^2}{2} \leq \frac{x^3(5+x)}{6(1-x)}.$$
4. En déduire la valeur de $\lim_{x\to0} \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{1-x} - e^x\right)$.
5. Justifier que f est de classe C^∞ sur $I - \{0\}$.
6. Montrer que f admet un prolongement par continuité sur I que l'on précisera.
7. Montrer que le prolongement est de classe C^1 sur I.

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en 0 et telle que $f(0) = 0$. On note : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$ et ε un réel strictement positif.

1. Justifier l'existence de $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in [-\eta;\ \eta],\ |f(x) - xf'(0)| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}|x|$.
2. Justifier l'existence de $N_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq N_1$, $0 \leq \dfrac{1}{n} \leq \eta$ puis $\forall k \in [\![0;\ n]\!]$, $0 \leq \dfrac{k}{n^2} \leq \eta$ si $n \geq N_1$.
3. En déduire : pour tout $n \geq N_1$, $\left|S_n - \dfrac{n+1}{2n} f'(0)\right| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}\dfrac{n+1}{2n} \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.
4. Justifier l'existence de $N_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq N_2$, $\left|\dfrac{n+1}{2n} f'(0) - \dfrac{f'(0)}{2}\right| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.
5. En déduire l'existence de $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq N$, $\left|S_n - \dfrac{f'(0)}{2}\right| \leq \varepsilon$. Qu'en déduit-on ?
6. On pose : $f(t) = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$. Donner alors la valeur de $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} S_n$.

⋆ ⋆ ⋆
FIN
⋆ ⋆ ⋆

Devoir surveillé n° 5 – partie2.

Durée : 2 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Dans cette épreuve, les candidats sont invités à illustrer, s'ils le jugent nécessaire, leurs réponses avec un dessin.

Exercice 1

On note f la fonction définie sur $I =]-\infty;\ 1[$ par : $\forall x \in I, f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.

1. Montrer que f est de classe C^∞ sur I.
2. Montrer, en procédant par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in I$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{(2n)!}{n!} \dfrac{1}{4^n(1-x)^{\frac{1}{2}+n}}$.
3. Sans récurrence, proposer une expression simple de la dérivée n-ème de $\dfrac{1}{1-x}$.
4. Énoncer la formule de Leibniz puis déduire des deux questions précédentes une expression simple de : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}$.

Exercice 2

On cherche à déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $MA = 2MB$ où A et B sont deux points du plan tels que : $AB = \ell$, avec $\ell > 0$.

1. On note G le point du plan tel que : $\overrightarrow{AG} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{AB}$. Montrer que : $\overrightarrow{GA} - 4\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$.
2. Développer et justifier $||\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}||^2$ ainsi que : $||\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}||^2$
3. En déduire : $MA = 2MB \Leftrightarrow MG^2 = \frac{4}{9}\ell^2$.
4. Quel ensemble obtient-on ? Faire un dessin.

Exercice 3

1. On considère $A(1;\ 1)$, $B(2;\ 4)$, $C\left(-\frac{1}{2};\ \frac{1}{4}\right)$ et on note $\mathcal{P}$ l'ensemble des points appartenant à la courbe d'équation $y = x^2$.
   (a) Déterminer une équation cartésienne puis une représentation paramétrique de la médiatrice de $[AB]$.
   (b) Donner une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ passant par A, B et C. On rappelle que le centre d'un tel cercle est forcément sur les médiatrices de $[AB]$ et $[BC]$. (*On pourra utiliser la relation :* $17^2 + 19^2 = 650$)
   (c) On note D le quatrième point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec la parabole. Montrer que l'abscisse de D est solution de l'équation :
   $$x^4 - \frac{23}{4}x^2 + \frac{9}{4}x + \frac{5}{2} = 0.$$
   (*On pourra utiliser* $27^2 = 729$.)
   (d) En déduire l'abscisse de D et vérifier que $x_A + x_B + x_C + x_D = 0$.
2. On souhaite généraliser ce résultat. On note donc dorénavant $A(x_A;\ y_A)$, $B(x_B;\ y_B)$, $C(x_C;\ y_C)$ et $D(x_D; y_D)$ quelconques appartenant à l'ensemble $\mathcal{P}$. On suppose par ailleurs que A, B, C et D sont sur un même cercle.

(a) Montrer, en vous aidant de la forme générale d'une équation cartésienne de cercle, que x_A, x_B, x_C et x_D sont les solutions d'une équation de la forme :

$$x^4 + Ax^2 + Bx + C = 0.$$

(b) On note $P : x \mapsto x^4 + Ax^2 + Bx + C$. Justifier que : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x - x_A)(x - x_B)(x - x_C)(x - x_D)$.

(c) Donner une expression du coefficient en x^3 de $(x - x_A)(x - x_B)(x - x_C)(x - x_D)$. En déduire que $x_A + x_B + x_C + x_D = 0$.

Exercice 4

On note E l'ensemble des fonctions y de classes C^∞ sur $\mathbb{R}_+$ telles que : $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $y''(t) + e^t y(t) = 0$. On admet que si $y \in E$ est tel que $y(0) = y'(0) = 0$ alors $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ y(t) = 0$. On note f une fonction non nulle de E telle que $f(0) = 0$.

1. Justifier que $f'(0) \neq 0$.
2. On veut montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $f(t) \neq 0$. On raisonne par l'absurde.

(a) Écrivez l'assertion mathématique correspondant à ce qu'on doit supposer dans notre raisonnement par l'absurde.

(b) On note $\ell = \text{Inf}\{t \in \mathbb{R}_+^* \ / \ f(t) = 0\}$. Justifier l'existence de ℓ.

(c) En déduire l'existence de (t_n) telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ell \leq t_n \leq \ell + \dfrac{1}{n+1}$ et $f(t_n) = 0$.

(d) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = \ell$. En déduire que $f(\ell) = 0$.

(e) En déduire l'existence de (c_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \ell < c_n < t_n$ et $f'(c_n) = 0$. En déduire $f'(\ell) = 0$.

(f) Montrer que $\ell = 0$ est impossible.

(g) On suppose donc $\ell > 0$. En déduire l'existence de $t_0 \in]0;\ \ell[$ tel que $f(t_0) = 0$ et aboutir à une contradiction.

⋆ ⋆ ⋆
FIN
⋆ ⋆ ⋆

Correction de l'exercice 1:

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ car $\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor \leq x$.

   Comme la fonction partie entière est continue sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$, par somme et composition de fonctions continues f est continue sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$.

   Soit $k \in \mathbb{Z}$. Alors $\lim\limits_{x \to k^+} \lfloor x \rfloor = k$ donc $\lim\limits_{x \to k^+} f(x) = k = f(k)$. On en déduit que f est continue à droite en k. De même : $\lim\limits_{x \to k^-} \lfloor x \rfloor = k-1$ donc $\lim\limits_{x \to k^-} f(x) = k - 1 + \sqrt{k-(k-1)} = k = f(k)$. On en déduit que f est également continue à gauche en k. Au final, f est continue à droite et à gauche en k donc est continue en k. Ceci étant vrai pour tout $k \in \mathbb{Z}$, f est continue sur $\mathbb{Z}$.

   Au final f est continue sur $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ donc est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Cf. exercice de la fiche méthode.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et notons $f : t \mapsto t^{1-\alpha}$ avec $t > 0$. La fonction f est dérivable sur $]n;\ n+1[$ et est continue sur $[n;\ n+1]$. De plus, $\forall t \in]n;\ n+1[,\ f'(t) = (1-\alpha)\dfrac{1}{t^\alpha}$. Ainsi, par décroissance de $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ (car $\alpha > 0$), et puisque $1 - \alpha > 0$, nous en déduisons : $\forall t \in]n;\ n+1[,\ \dfrac{1-\alpha}{(n+1)^\alpha} \leq f'(t) \leq \dfrac{1-\alpha}{n^\alpha}$. D'après l'inégalité des accroissements finis : $\dfrac{1-\alpha}{(n+1)^\alpha} \leq f(n+1) - f(n) \leq \dfrac{1-\alpha}{n^\alpha}$. Au final :

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1-\alpha}{(n+1)^\alpha} \leq (n+1)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha} \leq \frac{1-\alpha}{n^\alpha}$$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [\![1;\ n]\!]$. D'après la question précédente :

   $(k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha} \leq \dfrac{1-\alpha}{k^\alpha}$ donc en sommant nous en déduisons : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1-\alpha}{k^\alpha}$. Or par télescopage $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}\right) = (n+1)^{1-\alpha} - 1$. Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (1-\alpha)S_n \geq (n+1)^{1-\alpha} - 1$. Or $1 - \alpha > 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n \geq \dfrac{1}{1-\alpha}\left((n+1)^{1-\alpha} - 1\right)$. Il ne nous reste plus qu'à constater que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{1-\alpha}\left((n+1)^{1-\alpha} - 1\right) = +\infty$ car $1 - \alpha > 0$ pour conclure, par théorème d'encadrement, que : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$.

4. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{4}(x^3 - 3x)$. On note (u_n) la suite définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{+1} = f(u_n)$.

   (a) La fonction f est polynômiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{3}{4}(x^2 - 1)$. Nous avons donc :

x	$-\infty$		x_-		x_+		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

   avec $x_- = -1$ et $x_+ = -1$.
   La résolution de $f(x) = x$ mène aux trois solutions : $\ell_- = -\sqrt{7}$, $\ell_0 = 0$ et $\ell_+ = \sqrt{7}$.

   (b) Par croissance de f sur $]\ell_+;\ +\infty[$, $x > \ell_+ \Rightarrow f(x) > \ell_+$. On démontre alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > \ell_+$.

   - **Initialisation.** $u_0 > \ell_+$ par hypothèse ce qui prouve que la propriété est vraie pour $n = 0$.
   - **Hérédité.** Si, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > \ell_+$, alors par stricte croissance de f sur $[\ell_+;\ +\infty[$, $f(u_n) > \ell_+$. Ainsi $u_{n+1} > \ell_+$, ce qui prouve l'hérédité.

On remarque par ailleurs que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - x = \frac{1}{4}x(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})$ donc $\forall x \in]\ell_+;\ +\infty[,\ f(x) > x$ ce qui prouve que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq u_n$. La suite (u_n) est donc croissante donc soit elle converge, soit elle tend vers $+\infty$.

Supposons par l'absurde que cette suite converge. Alors, par continuité de f, sa limite est un point fixe de f donc soit ℓ_-, soit ℓ_0, soit ℓ_+. Absurde car $u_0 > \ell_+$ et, par croissance de (u_n), $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq u_0$ donc par passage à la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geq u_0$.

Par l'absurde, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

(c) De la même façon $]-\infty;\ \ell_-[$ est un intervalle stable pour f, f est croissante sur cet intervalle stable et $\forall x \in]-\infty;\ \ell_-[,\ f(x) - x < 0$. Ainsi, (u_n) est décroissante et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_0 < \ell_-$ donc nécessairement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

(d) Soit $x \in [x_-;\ x_+]$. Par décroissance de f sur cet intervalle, $f(x_+) \leq f(x) \leq f(x_-)$. Ainsi $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$ donc $f(x) \in I$. Ceci prouve que I est un intervalle stable pour f.

De plus f est dérivable sur $[x_-;\ x_+]$ et $\forall x \in [x_-;\ x_+],\ |f'(x)| = \frac{3}{4}(1-x^2) \leq \frac{3}{4}$ car $x^2 \geq 0$. Ainsi, d'après l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle $[x_-;\ x_+], \forall (x;\ y) \in I^2,\ |f(y) - f(x)| \leq \frac{3}{3}|x-y|$.

Comme $u_0 \in [x_-;\ x_+]$ et que ce-dernier est un intervalle stable, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [x_-;\ x_+]$. En particulier, l'inégalité précédente appliquée à $y = u_n$ et $x = \ell_0$ donne : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \ell_0| \leq \frac{3}{4}|u_n - \ell_0|$. Par récurrence (laissée au lecteur), $\forall n \in \mathbb{N}\ 0 \leq |u_n - \ell_0| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n |u_0 - \ell_0|$. Au final, par encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \ell_0| = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell_0$.

(e) Si $u_0 = 2$, on constate que $u_1 = \frac{2}{3}$ donc $u_1 \in [x_-;\ x_+]$. D'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in [x_-;\ x_+]$. On se ramène donc à la question précédente c'est à dire : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Correction de l'exercice 2:

1. Nous avons $\lim\limits_{x\to 0}(1 - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6}) = 1$. Comme $\lim\limits_{x\to 0}(1 - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6}) > 0$, par propriété il existe $\eta_1 > 0$ tel que pour tout $x \in [-\eta_1;\ \eta_1],\ 1 - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} > 0$. Si $\eta_1 < 1$ alors $\eta = \eta_1$ convient et si $\eta \geq 1$ alors en particulier $\forall x \in [-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}],\ 1 - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} > 0$. Dans ce cas $\eta = \frac{1}{2}$ convient. Au final, il existe $\eta \in]0;\ 1[$ tel que $\forall x \in [-\eta;\ \eta],\ 1 - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} > 0$.

2. Puisque $\forall x \in \mathbb{R},\ -x \in \mathbb{R}$, l'inégalité précédente donne : $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} \geq 1 - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6}$. Or, si $x \in [-\eta;\ eta]$ alors $1 - x + fracx^2 2 - \dfrac{x^3}{6} > 0$ d'après la question précédente et donc par passage à l'inverse on en déduit : $e^x \leq \dfrac{1}{1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}}$.

3. Ainsi, $\forall x \in [-\eta;\ \eta], \dfrac{1}{1-x} - e^x - \frac{x^2}{2} \geq \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}} - \dfrac{x^2}{2}$ ce qui donne l'inégalité $\forall x \in [-\eta;\ \eta],\ \dfrac{x^3(10 - 9x + 4x^2 - x^3)}{12(1-x)(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6})} \leq \dfrac{1}{1-x} - e^x - \frac{x^2}{2}$ après mise au même dénominateur.

   De même, comme $\forall x \in [-\eta;\ \eta], e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6}$ alors : $\dfrac{1}{1-x} - e^x - \dfrac{x^2}{2} \leq \dfrac{1}{1-x} - (1 + x + x^2) - \dfrac{x^3}{6} \Leftrightarrow \dfrac{1}{1-x} - e^x - \frac{x^2}{2} \leq \dfrac{x^3(5+x)}{6(1-x)}$ après mise au même dénominateur.

4. Soit $x \in [-\eta;\ \eta] - \{0\}$. En divisant par $x^2 > 0$ les inégalités précédentes on en déduit : $\forall x \in [-\eta;\ \eta] - \{0\}, \dfrac{x(10 - 9x + 4x^2 - x^3)}{12(1-x)(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6})} \leq \dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{1}{1-x} - e^x - \dfrac{x^2}{2}\right) \leq \dfrac{x(5+x)}{6(1-x)}$. Or par opérations usuelles $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3(10 - 9x + 4x^2 - x^3)}{12(1-x)(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6})} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(5+x)}{6(1-x)} = 0$. Ainsi par théo-

rème d'encadrement : $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{1-x}-e^x-\frac{x^2}{2}\right) = 0$. De plus : $\forall x \in [-\eta;\ \eta]-\{0\}$, $\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{1-x}-e^x-\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{1-x}-e^x\right)-\frac{1}{2}$. Au final, par opérations usuelles $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{1-x}-e^x\right)=\frac{1}{2}$.

5. Par quotient de fonctions de classe C^∞ sur $I-\{0\}$ dont le dénominateur ne s'annule pas, f est est de classe C^∞ sur $I-\{0\}$.

6. Comme $C^\infty(I-\{0\},\mathbb{R}) \subset C(I-\{0\},\mathbb{R})$ on en déduit que f est continue sur $I-\{0\}$. Par ailleurs par limite usuelle $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$. Ainsi, $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$. Les deux points précédents étant vérifiés on en déduit que f admet $\tilde{f}$: $\left\{\begin{array}{l} I\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \left\{\begin{array}{l} f(x) \text{ si } x\in I-\{0\} \\ 1 \text{ si } x=0\end{array}\right.\end{array}\right.$ comme prolongement par continuité sur $]-1;\ 1[$.

7. Notons encore f le prolongement obtenu. Alors, comme $C^\infty(I-\{0\},\mathbb{R}) \subset C^1(I-\{0\},\mathbb{R})$ on en déduit que f est de classe C^1 sur $I-\{0\}$. De plus f est, par définition d'un prolongement par continuité sur I, continue sur I.

   Enfin $\forall x \in I-\{0\}$, $f'(x) = (1-x)\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{1-x}-e^x\right)$. Comme d'après 3 $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{1-x}-e^x\right) = \frac{1}{2}$, on en déduit que $\lim_{x\to 0} f'(x) = \frac{1}{2}$ par opérations usuelles. Les trois points précédents étant vérifiés, d'après le théorème de prolongement de classe C^1, la fonction f est e classe C^1 sur I.

Correction de l'exercice 3:

On considère ε un réel strictement positif.

1. Puisque f est dérivable en 0 et puisque $f(0)=0$, par définition du taux d'accroissement, nous avons $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=f'(0)$. Par définition de la limite avec $\frac{\varepsilon}{2}>0$, cela veut dire qu'il existe $\eta>0$ tel que : $\forall x\in\mathbb{R}^*\cap[-\eta;\ \eta]=[-\eta;\ \eta]-\{0\}$, $\left|\frac{f(x)}{x}-f'(0)\right|\leq\frac{\varepsilon}{2}$. En multipliant par $|x|$ on en déduit :
   $\forall x\in[-\eta;\ \eta]-\{0\}$, $|f(x)-f'(0)x|\leq\frac{\varepsilon}{2}|x|$. Il ne nous reste plus qu'à constater que pour $x=0$ cette inégalité est toujours vérifiée car $f(0)=0$. Au final :

$$\boxed{\forall x\in[-\eta;\ \eta],\ |f(x)-f'(0)x|\leq\frac{\varepsilon}{2}|x|.}$$

2. Puisque $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$, par définition de la limite d'une suite avec $\eta>0$, il existe $N_1\in\mathbb{N}^*$ (car $\frac{1}{n}$ n'est pas définie en 0) tel que pour tout $n\geq N_1$, $\left|\frac{1}{n}\right|\leq\eta\Leftrightarrow\boxed{0\leq\frac{1}{n}\leq\eta}$ car $\frac{1}{n}>0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

   Pour $k\in[\![1;\ n]\!]$, $0\leq\frac{k}{n^2}\leq\frac{1}{n}$ donc, puisque pour tout $n\geq N_1$, $\frac{1}{n}\leq\eta$, on en déduit : $\boxed{\forall k\in[\![1;\ n]\!], 0\leq\frac{k}{n^2}\leq\eta}$ pour $n\geq N_1$.

3. Soit $n\geq N_1$. Alors puisque $x=\frac{k}{n^2}\in[-\eta;\ \eta]$, d'après 1,

$$\left|f\left(\frac{k}{n^2}\right)-f'(0)\frac{k}{n^2}\right|\leq\frac{\varepsilon}{2}\frac{k}{n^2}.$$

   Ceci étant vrai pour tout $k\in[\![1;\ n]\!]$, on en déduit :

$$\sum_{k=0}^{n}\left|f\left(\frac{k}{n^2}\right)-f'(0)\frac{k}{n^2}\right|\leq\sum_{k=0}^{n}\frac{\varepsilon}{2}\frac{k}{n^2}.$$

   Or, par inégalité triangulaire :

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n^2}\right)-f'(0)\frac{k}{n^2}\right)\right|\leq\sum_{k=0}^{n}\left|f\left(\frac{k}{n^2}\right)-f'(0)\frac{k}{n^2}\right|,$$

donc :

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n^2}\right)-f'(0)\frac{k}{n^2}\right)\right| \leq \sum_{k=0}^{n}\frac{\varepsilon}{2}\frac{k}{n^2}.$$

Il ne nous reste plus qu'à constater que :
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{\varepsilon}{2}\frac{k}{n^2} = \frac{\varepsilon}{2}\frac{(n+1}{2n}$ car $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$,

et par linéarité de la somme :
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n^2} - f'(0)\frac{k}{n^2}\right) = S_n - f'(0)\frac{n+1}{2n}$, pour en déduire :

$$\boxed{\forall n \geq N_1,\ \left|S_n - \frac{n+1}{2n}f'(0)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}\frac{n+1}{2n}.}$$

Enfin, $\dfrac{n+1}{2n} \leq 1$ car $n+1 \leq 2n$ puisque $n \in \mathbb{N}^*$. On en déduit :

$$\boxed{\forall n \geq N_1,\ \left|S_n - \frac{n+1}{2n}f'(0)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.}$$

4. Puisque, $\dfrac{n+1}{2n} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2n}$, par opérations usuelles : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n}f'(0) = \frac{f'(0)}{2}$, donc par définition de la limite avec $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq N_2$, $\boxed{\left|\dfrac{n+1}{2n}f'(0) - \dfrac{f'(0)}{2}\right| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}.}$
5. Poson $N = \max(N_1, N_2) \in \mathbb{N}^*$. Alors pour tout $n \geq N$, $\left|S_n - \dfrac{f'(0)}{2}\right| \leq \left|S_n - \dfrac{n+1}{2n}f'(0)\right| + \left|\dfrac{n+1}{2n}f'(0) - \dfrac{f'(0)}{2}\right|$ par inégalité triangulaire. Or, d'après 3, si $n \geq N$, $\left|S_n - \dfrac{n+1}{2n}f'(0)\right| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ et d'après 4, $\left|\dfrac{n+1}{2n}f'(0) - \dfrac{f'(0)}{2}\right| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. Ainsi :

$$\forall n \geq N,\ \boxed{\left|S_n - \frac{f'(0)}{2}\right| \leq \varepsilon.}$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, par définition de la limite, on en déduit que : $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{f'(0)}{2}.}$

6. On pose : $f(t) = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$.
f est bien évidemment définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$ par opérations usuelles, donc en particulier en 0. Or, puisque $\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} - \dfrac{t^2}{(1+t^2)^{3/2}}$, en particulier : $\boxed{f'(0) = 1.}$ On en déduit : $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2}.}$

⋆ ⋆ ⋆
FIN
⋆ ⋆ ⋆

Correction de l'exercice 1:

1. Par opérations usuelles f est de classe C^∞ sur I.

2. Notons $\mathcal{P}(n)$ « $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = \dfrac{(2n)!}{n!}\dfrac{1}{4^n(1-x)^{\frac{1}{2}+n}}$ ». On procède par récurrence faible :

   - **Initialisation.** Pour $n=0$, $\dfrac{0!}{0!}\dfrac{1}{4^0(1-x)^{\frac{1}{2}+0}} = f(x)$ ce qui prouve que la propriété est vraie pour $n=0$.
   - **Hérédite.** Pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on suppose : $\forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = \dfrac{(2n)!}{n!}\dfrac{1}{4^n(1-x)^{\frac{1}{2}+n}}$. Alors, car $\forall x \in I,\ f^{(n+1)}(x) = (f_n)'(x)$ et par calculs de dérivées usuelles : $\forall x \in I,\ f^{(n+1)}(x) = \dfrac{(2n)!}{n!}\dfrac{\frac{1}{2}+n}{4^n(1-x)^{\frac{1}{2}+n+1}}$. Enfin : $\dfrac{(2n+2)!}{(n+1)!}\times\dfrac{1}{4^{n+1}} = \dfrac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)\times(n)!44^n} = \dfrac{(2n)!}{n!4^n}\times(\frac{1}{2}+n)$. On en déduit : $\forall x \in I,\ f^{(n+1)}(x) = \dfrac{(2n+2)!}{(n+1)!}\dfrac{1}{4^{n+1}(1-x)^{\frac{1}{2}+n+1}}$, ce qui prouve l'hérédité.

3. $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}-1,\ g^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$, avec $g : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$.

4. Si f et g sont n-fois dérivable sur I, alors fg est n-fois dérivable sur I et $\forall x \in I,\ (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$.

   Nous partons alors de l'égalité : $\forall x \in I,\ f(x)\times f(x) = g(x)$, ce qui donne en appliquant Leibniz et en utilisant les deux questions précédentes :

$$\begin{aligned}
\forall x \in I,\quad \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(2k)!}{k!}\frac{1}{4^k(1-x)^{\frac{1}{2}+k}}\frac{(2n-2k)!}{(n-k)!}\frac{1}{4^{n-k}(1-x)^{\frac{1}{2}+n-k}}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{(2k)!}{k!}\frac{(2n-2k)!}{(n-k)!}\frac{1}{4^n(1-x)^{1+n}}\\
&= \frac{n!}{4^n(1-x)^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}\frac{(2k)!}{(k!)^2}\frac{(2n-2k)!}{((n-k)!)^2}\\
&= \frac{n!}{4^n(1-x)^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}
\end{aligned}$$

En particulier, pour $x=0$ nous en déduisons la relation :
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} = 4^n.$

Correction de l'exercice 2:

1. Par Chasles, $\overrightarrow{AG} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AG} + \frac{4}{3}\overrightarrow{GB} \Leftrightarrow -\frac{1}{3}\overrightarrow{AG} - \frac{4}{3}\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$. En remarquant que $\overrightarrow{GA} = -\overrightarrow{AG}$ et en multipliant par 3, nous en déduisons :
$\boxed{\overrightarrow{GA} - 4\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}.}$

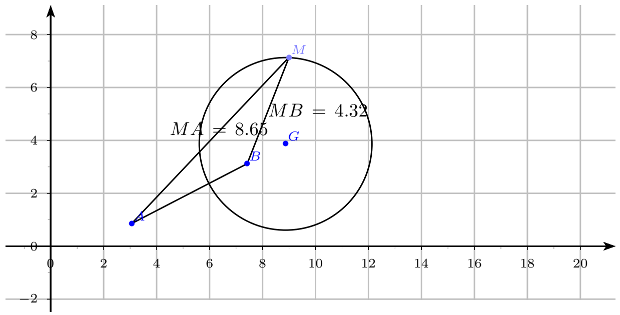
2. $$\begin{aligned}
||\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}||^2 &= (\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}).(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})\\
&= \overrightarrow{MG}.\overrightarrow{MG} + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GA}\\
&= \boxed{MG^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA} + GA^2.}
\end{aligned}$$
   De même : $\boxed{||\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}||^2 = MG^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB} + GB^2.}$

3. Ainsi : $$\begin{aligned}
MA = 2MB &\Leftrightarrow MA^2 = 4MB^2\\
&\Leftrightarrow ||\overrightarrow{MA}||^2 = 4||\overrightarrow{MB}||^2\\
&\Leftrightarrow ||\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}||^2 = 4||\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}||^2\\
&\Leftrightarrow MG^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA} + GA^2 = 4(MG^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB} + GB^2)\\
&\Leftrightarrow 3MG^2 - 2\overrightarrow{MG}.(\overrightarrow{GA} - 4\overrightarrow{GB}) = -4GB^2 + GA^2.
\end{aligned}$$

Or, d'après ci-dessus : $\overrightarrow{GA} - 4\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$. De plus : $\overrightarrow{AG} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{AB}$, donc : $AG = \frac{4}{3}\ell$. Enfin, $\overrightarrow{GA} - 4\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$ donc $\overrightarrow{GB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{GA}$ et par conséquent : $GB = \frac{1}{4}\frac{4}{3}\ell = \frac{1}{3}\ell$. En injectant tout ceci, on obtient au final :

$3MG^2 = -\frac{4}{9}\ell^2 + \frac{16}{9}\ell^2 \Leftrightarrow \boxed{MG^2 = \dfrac{4}{9}\ell^2.}$.

4. On reconnaît alors un cercle de centre G et de rayon $\frac{2}{3}\ell$.



Correction de l'exercice 3:

1. (a) Notons $I(\frac{3}{2}; \frac{5}{2})$ le milieu de $[AB]$. Alors si $M(x;\ y)$ nous avons : $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = x + 3y - 9$. Ainsi une équation cartésienne de la médiatrice de $[AB]$ est : $x + 3y - 9 = 0$. Une représentation paramétrique est donc $\begin{cases} x = 9 - 3t \\ y = t \end{cases}$

   (b) De la même façon une équation cartésienne de la médiatrice de $[BC]$ est : $2x + 3y - \frac{63}{8} = 0$. Les coordonnées du centre $\Omega(a;\ b)$ du cercle sont donc telles que $2a + 3b = \frac{63}{8}$ et $a = 9 - 3t$, $b = t$ ce qui donne $t = \frac{27}{8}$ soit $a = -\frac{9}{8}$ et $b = \frac{27}{8}$. D'autre part $R^2 = \Omega A^2 = (1-a)^2 + (1-b)^2 = \dfrac{325}{32}$. Au final, une équation du cercle circonscrit est $\left(x + \frac{9}{8}\right)^2 + \left(y - \frac{27}{8}\right)^2 = \frac{325}{32}$.

   (c) Notons x l'abscisse du point D. Puisque D appartient à la parabole d'équation $y = x^2$, nous avons donc $y_D = x^2$. De plus D appartient au cercle précédent. Nécessairement : $\left(x + \frac{9}{8}\right)^2 + \left(x^2 - \frac{27}{8}\right)^2 = \frac{325}{32}$ ce qui donne en développant :

$$x^4 - \frac{23}{4}x^2 + \frac{9}{4}x + \frac{5}{2} = 0.$$

   Le polynôme précédent admet donc 1 et 2 comme racines. On peut donc le factoriser par $(x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$ ce qui, par division euclidienne, entraîne :
   $x^4 - \dfrac{23}{4}x^2 + \dfrac{9}{4}x + \frac{5}{2} = (x^2 - 3x + 2)(x^2 + 3x + \frac{5}{4})$.

   L'abscisse de D est donc solution de l'équation de degré 2 : $x^2 + 3x + \frac{5}{4} = 0$ dont les racines sont $-\frac{1}{2}$ et $-\frac{5}{2}$. Comme $-\frac{1}{2}$ correspond à l'abscisse de C on en déduit que l'abscisse de D est $-\frac{5}{2}$ ce qui donne : $D\left(-\frac{5}{2};\ \frac{25}{4}\right)$.

   (d) Par calcul direct : $x_A + x_B + x_C + x_D = 0$.

2. On note $A(x_A;\ y_A)$, $B(x_B;\ y_B)$, $C(x_C;\ y_C)$ et $D(x_D; y_D)$ quelconques appartenant à l'ensemble $\mathcal{P}$. On suppose par ailleurs que A, B, C et D sont sur un même cercle.

   (a) Une équation du cercle est de la forme : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ où R est le rayon du cercle et $(a;\ b)$ sont les coordonnées du centre du cercle.

   Les coordonnées $(x;\ y)$ des points d'intersection du cercle avec $\mathcal{P}$ sont donc solutions du système : $\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \\ y = x^2 \end{cases}$. Ainsi :
   $(x-a)^2 + (x^2 - b)^2 = R^2$ ce qui, en développant, est bien de la forme : $x^4 + Ax^2 + Bx + C = 0$.

   (b) Puisque x_A, x_B, x_C et x_D vérifient l'équation précédente on en déduit que $P(x)$ est factorisable par $(x-x_A)(x-x_B)(x-x_C)(x-x_D)$. Comme les deux polynômes ont même degré nécessairement :
   $P(x) = \lambda(x-x_A)(x-x_B)(x-x_C)(x-x_D)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

   Les coefficients de plus haut degré étant tous deux égaux à 1 nécessairement $\lambda = 1$. Au final :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x-x_A)(x-x_B)(x-x_C)(x-x_D)$$

(c) Par développement on constate que le coeficient en x^3 de $(x-x_A)(x-x_B)(x-x_C)(x-x_D)$ est $-(x_A+x_B+x_C+x_D)$.

Or le coefficient en x^3 de $P(x)$ est 0. Ces deux expressions étant égales, on en déduit que :
$x_A+x_B+x_C+x_D=0;$

Correction de l'exercice 4:

1. Si $f'(0)=0$, alors nous avons $f\in E$ et $f(0)=f'(0)=0$ et donc $\forall t\in\mathbb{R}_+,\ f(t)=0$ d'après l'énoncé. Ainsi f est la fonction nulle ce qui est contraire aux hypothèses. Par conséquent $f'(0)\neq 0$.
2. (a) Par l'absurde on suppose qu' il existe $t\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $f(t)=0$.
   (b) D'après la question précédente l'ensemble $A=\{t\in\mathbb{R}_+^*\ /\ f(t)=0\}$ est non vide. Comme il est minoré par 0 sa borne inférieure existe forcément. On note $\ell=\mathrm{Inf}\{t\in\mathbb{R}_+^*\ /\ f(t)=0\}$.
   (c) Soit $n\in\mathbb{N}$. Puisque $\ell+\dfrac{1}{n+1}>\ell$ alors il existe, ℓ étant le plus grand des minorants de A, $t_n\in A$ tel que $\ell\leq t_n\leq \ell+\dfrac{1}{n+1}$. En effet, sinon $\ell+\dfrac{1}{n+1}$ serait un minorant de A ce qui est impossible par maximalite de ℓ. Comme $t_n\in A$, par définition $f(t_n)=0$.
   (d) Par encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty}t_n=\ell$. Or f est continue en ℓ. Ainsi par caractérisation séquentielle nous avons : $\lim\limits_{n\to+\infty}f(t_n)=f(\ell)$. Par ailleurs $\forall n\in\mathbb{N},\ f(t_n)=0$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}f(t_n)=0$. Au final, nous obtenons : $f(\ell)=0$.
   (e) f étant de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$, elle est dérivable sur $]\ell;\ t_n[$, continue sur $[\ell;\ t_n]$ et $f(\ell)=f(t_n)=0$ donc d'après le théorème de Rolle : il existe $c_n\in]\ell;\ t_n[$ tel que $f'(c_n)=0$.

   De la même façon $\lim\limits_{n\to+\infty}c_n=\ell$ par encadrement. De plus f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, f' est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}f'(c_n)=f'(\ell)$ ce qui entraîne $f'(\ell)=0$ car $\forall n\in\mathbb{N},\ f'(c_n)=0$.
   (f) si $\ell=0$ alors $f(0)=f'(0)=0$ ce qui est impossible d'après la première question.
   (g) Comme $f(0)=f(\ell)=0$ l'application du théorème de Rolle fournit l'existence de $t_1\in]0;\ \ell[$ tel que $f'(t_1)=0$. Mais alors $f'(t_1)=f'(\ell)=0$ donc l'application du théorème de Rolle sur f' entraîne l'existence de $t_0\in]t_1;\ \ell[$ tel que $f''(t_0)=0$. Or $\forall t\in\mathbb{R}_+,\ f''(t)+e^tf(t)=0$. Ainsi, dans la mesure où $e^{t_0}>0$, nous en déduisons $f(t_0)=-\dfrac{f''(t_0)}{e^{t_0}}=0$. Par conséquent $t_0\in A$. Cependant $t_0<\ell$. Contradiction car $\forall t\in A,\ t\geq\ell$.

⋆⋆⋆
FIN
⋆⋆⋆