Devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 4.

Durée : 2 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Dans cette épreuve, les candidats sont invités à illustrer, s'ils le jugent nécessaire, leurs réponses avec un dessin.

Exercice

On note $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \in]0;\ 1[$ et on considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $0 < u_1 < u_0 < 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = (1-a_n)u_{n+1} + a_n u_n$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \in [0;\ 1]$.
2. On considère la suite définie par $P_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} a_k$.
   (a) Étudier la monotonie de (P_n) puis montrer que (P_n) converge vers $L \in [0;\ 1[$.
   (b) On suppose que $L \neq 0$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$.
   (c) On pose dans cette question uniquement $a_n = 1 - \dfrac{1}{n+2}$. Calculer P_n et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$. La réciproque de la question précédente est-elle vraie ?
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - u_{n+1} = -a_n(u_{n+1} - u_n)$ et en déduire $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n = (-1)^n P_{n-1}(u_1 - u_0)$.
4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - u_n = (1-a_n)(u_{n+1} - u_n)$ et en déduire les monotonies de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
5. On suppose : $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = 0$. Montrer que (u_n) converge vers $\ell \in]0;\ 1[$.
6. On suppose : $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n \neq 0$. Montrer que (u_n) n'a pas de limite.
7. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \alpha$ avec $\alpha \in]0;\ 1[$. Donner une expression simple de (u_n) puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Problème

Définitions

- On dit qu'une matrice ligne ou colonne est **stochastique** lorsque ses coefficients sont tous positifs et que la somme de ses coefficients vaut 1. Par exemple, la matrice colonne $\begin{pmatrix} 0,3 & 0,6 & 0,1 \end{pmatrix}$ est stochastique car $0,3 \geq 0,\ 0,6 \geq 0,\ 0,1 \geq 0$ et $0,3 + 0,6 + 0,1 = 1$.
- **On dit qu'une matrice carrée est stochastique lorsque chacune de ses lignes l'est.**

Partie A : des propriétés des matrices stochastiques

Soit $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec **des coefficients positifs ou nuls.**

(Q 1) Montrer que A est stochastique si et seulement si $AX = X \quad (\star)$

(Q 2) Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ et $B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ deux matrices carrées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Rappeler la formule donnant le coefficient ligne $i \in \{1;\cdots;n\}$ colonne $j \in \{1;\cdots;n\}$ de la matrice produit AB.
   (b) En déduire que si les coefficients de A et de B sont positifs alors il en est de même de ceux de AB.
   (c) En utilisant $(\star)$, montrer alors que si A et B sont stochastiques alors la matrice AB l'est aussi.

Partie B : Un exemple avec les matrices de taille $(3,3)$

Dans cette partie, on étudie les trois suites (x_n), (y_n) et (z_n) à valeurs dans $\mathbb{R}$ définies par : $x_0 = y_0 = \frac{1}{2}$, $z_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & (1/3)x_n + (1/2)y_n + (1/6)z_n \\ y_{n+1} & = & \frac{1}{3}x_n + (1/3)y_n + \frac{1}{3}z_n \\ z_{n+1} & = & \frac{1}{3}x_n + \frac{1}{6}y_n + \frac{1}{2}z_n \end{array}\right.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

(Q 1) Montrer que (S) s'écrit sous forme matricielle $X_{n+1} = AX_n$, avec A une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ que l'on précisera.

(Q 2) Justifier que la matrice carrée A est stochastique.

(Q 3) (a) Soit $Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que Q est inversible et calculer Q^{-1}.

(b) En déduire que $A = QDQ^{-1}$, avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}$.

(Q 4) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $X_n = QD^nQ^{-1}X_0$.

(Q 5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Exprimer X_n en fonction de n.

(b) Montrer que le vecteur X_n est stochastique. Vous n'êtes pas obligé d'avoir trouvé l'expression explicite de X_n pour traiter cette question.

(Q 6) Prouver que (x_n) (respectivement (y_n) et (z_n)) converge vers une limite, notée ℓ_x (respectivement ℓ_y et ℓ_z).

(Q 7) Prouver que $L = \begin{pmatrix} \ell_x \\ \ell_y \\ \ell_z \end{pmatrix}$ est stochastique et calculer AL.

Partie C : avec des matrices s'écrivant comme PDP^{-1}

Supposons que la matrice A est stochastique et que $A = PDP^{-1}$ avec $P \in GL_n(\mathbb{R}), D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$. **Le but est de montrer qu'au moins un des coefficients de D est égal à 1 et que tous ses coefficients sont des nombres de l'intervalle $[-1;1]$.**

(Q 1) On reprend $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$. En utilisant $(\star)$, vérifier que $DP^{-1}X = P^{-1}X$.

(Q 2) On note $X' = P^{-1}X := \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$. Montrer que $X' \neq O_{n1}$ puis que : $\forall i \in \{1;\cdots;n\}, x'_i = d_i x'_i$.

(Q 3) En déduire l'existence de $i_0 \in \{1;\cdots;n\}$ tel que $d_{i_0} = 1$.

(Q 4) Soit maintenant $i \in \{1;\cdots;n\}$. Justifier que $D - d_iI_n$ n'est pas inversible et donc que $A - d_iI_n$ non plus.

(Q 5) En déduire qu'il existe $X_i \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $AX_i = d_iX_i$.

(Q 6) On note $X_i = \begin{pmatrix} x_1^{(i)} \\ \vdots \\ x_n^{(i)} \end{pmatrix}$ les coefficients de X_i. On note k_0 tel que $\max\limits_{1\leq k\leq n}(|x_k^{(i)}|) = |x_{k_0}^{(i)}|$. Montrer alors que $|d_i| \leq 1$.

⋆ ⋆ ⋆
FIN
⋆ ⋆ ⋆

Correction de l'exercice :

1. On procède par récurrence double :
   - **Initialisation.** Par hypothèse sur la suite, $u_0 \in [0;\ 1]$ et $u_1 \in [0;\ 1]$.
   - **Hérédité.** Pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on suppose : $u_n \in [0;\ 1]$ et $u_{n+1} \in [0;\ 1]$. Alors $u_{n+2} = (1-a_n)u_{n+1} + a_n u_n$. Or, par hypothèse de récurrence, $0 \leq u_{n+1} \leq 1$. En multipliant par $1 - a_n > 0$ on en déduit : $0 \leq (1-a_n)_{n+1} \leq 1 - a_n$. De même, par hypothèse de récurrence $0 \leq u_n \leq 1$ donc en multipliant par $a_n > 0$ on en déduit : $0 \leq a_n u_n \leq a_n$. En sommant les deux inégalités précédemment obtenues on en déduit : $0 \leq (1-a_n)u_{n+1} + a_n u_n \leq (1-a_n) + a_n$ ce qui prouve que : $0 \leq u_{n+2} \leq 1$ donc l'hérédité.

   Par récurrence double, pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n \leq 1$.

2. (a) On constate que $\forall n \in \mathbb{N}, P_n > 0$ car $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n > 0$. Alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{P_{n+1}}{P_n} = a_{n+1}$ car $P_{n+1} = a_{n+1}P_n$ par Chasles. Commme $a_{n+1} < 1$ par hypothèse : $\dfrac{P_{n+1}}{P_n} \leq 1$. Par positivité de P_n on en déduit : $\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1} \leq P_n$ ce qui prouve que la suite (P_n) est décroissante. Comme elle est minorée par 0 elle converge vers L d'après le théorème de la limite monotone. Par décroissance $L \leq P_0 < 1$ et comme $\forall n \in \mathbb{N}, P_n \geq 0$, par passage à la limite, $L \geq 0$. Au final $\boxed{L \in [0;\ 1[}$.

   (b) On suppose $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = L$ avec $L \neq 0$. On remarque que pour tout entier naturel n non nul, $a_{n+1} = \dfrac{P_{n+1}}{P_n}$. Or, par hypothèse $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = L$ et par propriété des suires extraites $\lim\limits_{n\to+\infty} P_{n+1} = L$. Comme $L \neq 0$, par quotient de limites on en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n+1} = 1$. Nécessairement $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1.}$

   (c) Si $a_n = 1 - \dfrac{1}{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}$ par télescopage $P_n = \dfrac{1}{n+2}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = 0$. Pourtant $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$. La réciproque de la question précédente n'est donc pas vraie.

3. Puisque $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = (1-a_n)u_{n+1} + a_n u_n$ nous avons $u_{n+2} - u_{n+1} = -a_n u_{n+1} + a_n u_n = -a_n(u_{n+1} - u_n)$.

   Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n = (-1)^n P_{n-1}(u_1 - u_0)$.
   - **Initialisation.** Comme $u_2 - u_1 = -a_0(u_1 - u_0)$ d'après l'égalité précédente l'initialisation, est vérifiée.
   - **Hérédité.** Pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose : $u_{n+1} - u_n = (-1)^n P_{n-1}(u_1 - u_0)$. Alors, en utilisant l'égalité précédente on en déduit : $u_{n+2} - u_{n+1} = -a_n(u_{n+1} - u_n)$. En utilisant l'hypothèse de récurrence on en déduit : $u_{n+2} - u_{n+1} = -a_n(-1)^n P_{n-1}(u_1 - u_0)$. Or, $(-1)^n(-1) = (-1)^{n+1}$ et $P_{n-1}a_n = P_n$. Donc : $u_{n+2} - u_{n+1} = (-1)^{n+1}P_n(u_1 - u_0)$.

   Par récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n = (-1)^n P_n(u_1 - u_0).}$

4. Puisque $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = (1-a_n)u_{n+1} + a_n u_n$ nous avons $\forall n \in \mathbb{N},,\ u_{n+2} - u_n = (1-a_n)u_{n+1} + a_n u_n - u_n = (1-a_n)(u_{n+1} - u_n)$.

   D'apès la question précédente on en déduit : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - u_n = (1-a_n)a_n(-1)^n P_n(u_1 - u_0).}$

   Alors, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n+2} - u_{2n} = (1 - a_{2n})a_{2n}P_{2n}(u_1 - u_0)$. Comme $u_1 - u_0 < 0$ et que toutes les autres grandeurs sont positives, on en déduit $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n+2} - u_{2n} < 0$ ce qui prouve que la suite (u_{2n}) est décroissante.

   De même $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n+3} - u_{2n+1} = -(1 - a_{2n+1})a_{2n+1}P_{2n+1}(u_1 - u_0)$ donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n+3} - u_{2n+1} > 0$ ce qui prouve que la suite (u_{2n+1}) est croissante.

5. D'après précédemment : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n+1} - u_{2n} = P_{2n}(u_1 - u_0)$. Or, par hypothèse $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = 0$ donc par propriété des suites extraites $\lim\limits_{n\to+\infty} P_{2n} = 0$. Ainsi, par opérations élémentaires $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} - u_{2n}) = 0$. Au final, (u_{2n}) est décroissante, (u_{2n+1}) est croissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} - u_{2n}) = 0$. Ceci assure que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes donc convergent vers un même réel ℓ. De plus $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n+1} \leq \ell u_{2n}$ donc $u_1 \leq \ell \leq u_0$ ce qui prouve que $\boxed{\ell \in]0;\ 1[.}$ Enfin, les suites

extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite, par propriété (u_n) converge.

6. Ici (a_{2n}) est décroissante et minorée par 0 car $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n > 0$. Elle converge donc vers un limite ℓ_1.
De même (a_{2n}) est croissante et majorée par 1 car $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n < 1$. Elle converge donc vers un limite ℓ_2.

   De plus : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+1} - u_{2n} = P_{2n}(u_1 - u_0)$ donc par passage à la limite on en déduit $\ell_2 - \ell_1 \neq 0$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n \neq 0$ par hypothèse.

   Par l'aburde si (u_n) admet une limite ℓ, alors par propriété des uites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) également. Alors $\ell_1 2 = \ell_2 = \ell$. Contradiction car $\ell_1 \neq \ell_2$. Par l'absurde (u_n) n'admet pas de limite.

7. On reconnaît une suite récurrente double d'équation caractéristique : $r^2 - (1-\alpha)r - \alpha = 0$. Les racines de ce trinôme sont : 1 et $-\alpha$ ce qui assure l'existence de $(a;\ b) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout entier naturel n : $u_n a + b(-\alpha)^n$.
De plus : $a + b = u_0$ et $a - \alpha b = u_1$ donc : $b = \dfrac{u_0 - u_1}{1+\alpha}$ car $1 + \alpha \neq 0$. D'autre part : $a = \dfrac{u_1 + \alpha u_0}{1+\alpha}$.

   On en déduit $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1}{1+\alpha}(u_1 + \alpha u_0 + (u_0 - u_1)(-\alpha)^n.}$ Enfin, $0 < \alpha < 1$ donc $0 < |-\alpha| < 1$. Par conséquent : $\lim\limits_{n\to+\infty} (-\alpha)^n = 0$. Par opérations usuelles : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{1+\alpha}u_1 + \dfrac{\alpha}{1+\alpha}u_0.}$

Correction du problème :

Partie A : des propriétés des matrices stochastiques

(Q 1) On sait que la matrice A a ses coefficients positifs ou nuls.

- Donc A est stochastique si et seulement si la somme des coefficients de chaque ligne est égale à 1.
- D'autre part, le coefficient ligne $i \in \{1; \cdots; n\}$ de AX est donné par

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \times 1 = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.$$

- Donc A est stochastique si et seulement si $\forall i \in \{1; \cdots; n\}, \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \times 1 = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} = 1$ si et seulement si les coefficients de AX et X sont égaux.

Ainsi,

$$\boxed{A \text{ est stochastique si et seulement si } AX = X \quad (\star)}$$

(Q 2) (a) Le coefficient ligne $i \in \{1; \cdots; n\}$ colonne $j \in \{1; \cdots; n\}$ de la matrice produit AB est

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}}$$

(b) Puisque une somme de nombres positifs est positif, on en déduit que si les coefficients de A et de B sont positifs alors il en est de même de ceux de AB.

(c) Par la première question, on sait que les coefficients de AB sont positifs. De plus, on a : $ABX = AX$ par $(\star)$ puisque B est stochastique. Donc $ABX = AX = X$ car A est stochastique.
Ainsi, on a montré que si A et B sont stochastiques alors AB est stochastique.

Partie B : Un exemple avec les matrices de taille $(3, 3)$

(Q 1) On a $AX_n = X_{n+1}$ avec $A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 & 1/6 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/6 & 1/2 \end{pmatrix}$.

(Q 2) La matrice A est stochastique car ses coefficients sont positifs et la somme des coefficients de chaque ligne est égale à 1.

(Q 3) (a) Soit $Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

On résout le système : $\left\{\begin{array}{llll} x & -2y & +z & = u \\ x & +y & & = v \\ x & +y & -z & = w \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{llll} x & -2y & +z & = u \\ x & +y & & = v \\ & & z & = v - w \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{llll} x & -2y & +z & = u \\ & 3y & -z & = v - u \\ & & z & = v - w \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = u + 2y - z = \frac{1}{3}u + \frac{1}{3}v + \frac{1}{3}w \\ y = -\frac{1}{3}u + \frac{2}{3}v - \frac{1}{3}w \\ z = v - w \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

Le système admettant une unique solution quel que soient u, v et w fixés, on en déduit que Q est inversible. La mise sous forme matricielle du système précédent assure par ailleurs que : $\boxed{Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$.

(b) On a $A = QDQ^{-1} \Leftrightarrow Q^{-1}A = Q^{-1}QDQ^{-1} \Leftrightarrow Q^{-1}AQ = I_3DI_3 = D$.

Calculons alors $Q^{-1}AQ$:

$$\begin{aligned} Q^{-1}AQ &= \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 & 1/6 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/6 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

(Q 4) On pose pour $n \geq 0, \mathcal{P}(n) : X_n = QD^nQ^{-1}X_0$.

(a) On a $QD^0Q^{-1}X_0 = QI_3Q^{-1}X_0 = QQ^{-1}X_0 = I_3X_0 = X_0$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

(b) On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un rang $n \geq 0$. Alors

$$X_{n+1} = AX_n = QDQ^{-1}QD^nQ^{-1}X_0 = QDI_3D^nQ^{-1}X_0 = QD^{n+1}Q^{-1}X_0$$

On a montré que $\forall n \geq 0, \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.

(c) Par le théorème de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier n.

(Q 5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Il est immédiat que

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1/6)^n \end{pmatrix}.$$

Puis $X_0 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Par produits matriciels, nous avons :

$$\boxed{X_n = \begin{pmatrix} 1/3 + (1/2)(1/6^n) \\ 1/3 \\ 1/3 - (1/2)(1/6^n) \end{pmatrix}}$$

(b) On peut utiliser l'expression explicite et on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n + y_n + z_n = 1.$$

Par définition, X_n est stochastique pour tout entier n.

(Q 6) Il est immédiat que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty} z_n = 1/3}$.

(Q 7) La matrice colonne L est donc stochastique et $AL = L$.

Partie C : avec des matrices s'écrivant comme PDP^{-1}

(Q 1) On reprend $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$. Par $(\star)$, on a $AX = X$. Donc $PDP^{-1}X = X \Leftrightarrow DP^{-1}X = P^{-1}X$ puisque $P^{-1}P = I_3$.

(Q 2) On suppose que X' est nul. Alors $P^{-1}X = 0_{n1} \Leftrightarrow PP^{-1}X = P0_{n1} \Leftrightarrow X = 0_{n1}$ ce qui est faux. Donc X' est non nul.

On a $DX' = X'$. En effectuant le produit matriciel, on obtient $\forall i \in \{1; \cdots; n\}, x'_i = d_i x'_i$.

(Q 3) Cela signifie qu'il existe au moins un indice $i_0 \in \{1, \cdots, n\}$ tel que $x'_{i_0} \neq 0$. Par conséquent, $x'_{i_0} = d_{i_0} x'_{i_0} \Leftrightarrow d_{i_0} = 1$. On a donc montré que au moins un des coefficients de la matrice D est égal à 1.

(Q 4) Soit maintenant $i \in \{1; \cdots; n\}$. la matrice $D - d_i I_n$ n'est pas inversible puisqu'elle a la $i$ème ligne nulle. De plus $A - d_i I_n = PDP^{-1} - d_i I_n = P(D - d_i I_n)P^{-1}$. Raisonnons par l'absurde ensuite. Si $A - d_i I_n$ est inversible alors $P^{-1}(A - d_i I_n)P = D - d_i I_n$ l'est aussi ce qui est faux. Donc $A - d_i I_n$ n'est pas inversible.

(Q 5) Par théorème, il existe $X_i \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $(A - d_i I_n)X_i = 0_{n1}$ ce qui équivaut à $AX_i = d_i X_i$.

(Q 6) On calcule le produit matriciel précédent et pour la ligne k_0, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k_0,k} x_k^{(i)} = d_i x_{k_0}^{(i)}.$$

Par l'inégalité triangulaire, on a :

$$\begin{aligned} |d_i x_{k_0}^{(i)}| = |\textstyle\sum_{k=1}^n a_{k_0,k} x_k^{(i)}| &\leq \textstyle\sum_{k=1}^n |a_{k_0,k}| \times |x_k^{(i)}| \\ &\leq \textstyle\sum_{k=1}^n |a_{k_0,k}| \times |x_{k_0}^{(i)}| \end{aligned}$$

Or $\sum_{k=1}^n |a_{k_0,k}| = \sum_{k=1}^n a_{k_0,k} = 1$ puisque A est une matrice stochastique. Finalement

$$|d_i x_{k_0}^{(i)}| \leq |x_{k_0}^{(i)}|$$

Or $x_{k_0}^{(i)} \neq 0$ par la question précédente et par définition de $X^{(i)}$. Ainsi

$$\boxed{|d_i| \leq 1}$$

Tous les coefficients diagonaux de D sont donc en valeur absolue inférieurs ou égaux à 1.

⋆⋆⋆
FIN
⋆⋆⋆