Devoir surveillé n° 4 – partie1.

Durée : 1 heure

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Dans cette épreuve, les candidats sont invités à illustrer, s'ils le jugent nécessaire, leurs réponses avec un dessin.

Exercice 1

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $U_n = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ et $V_n = \sum_{k=0}^{n}(k+1)\binom{n}{k+1}$.

1. Déterminer une expression simple de $V_n - U_n$.
2. Montrer que pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, $(k+1)\binom{n}{k+1} = (n-k)\binom{n}{k}$. En déduire une expression simple de V_n en fonction de U_n.
3. En vous aidant des deux questions précédentes, montrer que pour tout entier naturel n, $U_n = n2^{n-1}$.

Exercice 2

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, et $x \in \mathbb{R}$, on note : $A_n(x) = \sum_{1\leq \ell \leq k \leq n} e^{ikx}$.

1. Calculer $A_n(x)$, lorsque $x \equiv 0\ [2\pi]$.
2. On suppose $x \not\equiv 0\ [2\pi]$.
   (a) Vérifier que $A_n(x) = \sum_{k=1}^{n} ke^{ikx}$.
   (b) En calculant $A_n(x)$ d'une autre façon, en déduire une expression simple de $\sum_{k=1}^{n} ke^{ikx}$.
3. En déduire :

$$\sum_{k=1}^{n} k\cos(kx) = \frac{-n\cos((n+1)x) + (n+1)\cos(nx) - 1}{4\sin\left(\frac{x}{2}\right)^2}$$
$$\sum_{k=1}^{n} k\sin(kx) = \frac{-n\sin((n+1)x) + (n+1)\sin(nx)}{4\sin\left(\frac{x}{2}\right)^2}.$$

lorsque $x \not\equiv 0\ [2\pi]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

⋆ ⋆ ⋆
FIN
⋆ ⋆ ⋆

Devoir surveillé n° 4 – partie2.

Durée : 2 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Dans cette épreuve, les candidats sont invités à illustrer, s'ils le jugent nécessaire, leurs réponses avec un dessin.

Exercice 1

1. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$ puis $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{x^2+x+1}\,dx$.
2. Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}$ en posant $u = e^x$.
3. Résoudre l'équation différentielle : $x^2y' + xy = 1$
4. On pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n\sqrt{1-t}\,dt$.
   (a) Justifier que I_n est définie pour tout entier naturel n et calculer I_0.
   (b) En effectuant une intégration par parties, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = \dfrac{2(n+1)}{2n+5} I_n$. En déduire I_1 puis I_2.

Exercice 2

Le but de cet exercice est de simplifier l'expression $\mathrm{Arcsin}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ par deux méthodes différentes.
Soit $f : x \mapsto \mathrm{Arcsin}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.

1. (a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
   (c) En déduire que $f = \mathrm{Arctan}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer qu'il existe θ dans $]-\pi/2, \pi/2[$ tel que $\tan(\theta) = x$.
   (b) Simplifier alors $f(\tan(\theta))$.
   (c) Retrouver le résultat de la question 1c.

Exercice 3

On note : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$.

1. Montrer que f induit une bijection de $[-1;\ +\infty[$ vers un intervalle I à préciser. On note W l'application réciproque associée.
2. Déterminer $W(0)$ et montrer que $\forall y \in I, W(y) = \dfrac{y}{e^{W(y)}}$.
3. Montrer que W est dérivable sur un intervalle J à préciser et montrer que : $\forall y \in J - \{0\},\ W'(y) = \dfrac{W(y)}{y(1+W(y))}$.
4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^\alpha u(u+1)e^u\,du$ en fonction de α.
5. On note : $F(x) = \displaystyle\int_0^x W(t)\,dt$.
   (a) Justifier l'existence de $F(x)$ pour tout $x \in I$.

(b) En vous aidant du changement de variable $u = W(t)$, montrer que : $\forall x \in I,\ F(x) = \int_0^{W(x)} u(u+1)e^u\,du$.

(c) En déduire une expression simple de $F(x)$ en fonction de $W(x)$.

6. La distribution de luminance énergétique spectrale du corps noir est donné en fonction de la longueur d'onde par la loi de Planck :

$$L(\lambda) = \frac{2hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{k\lambda T}} - 1}.$$

En calculant la dérivée de la fonction précédente et on posant : $x = \frac{hc}{k\lambda T}$, on en déduit que la valeur de la (ou des) longueur(s) d'onde(s) produisant une luminance maximale sont la (ou les) solutions strictement positives de l'équation : $e^{-x} + \frac{x}{5} - 1 = 0$.

(a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ e^{-x} + \frac{x}{5} - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-5)e^{x-5} = -5e^{-5}$.

(b) Vérifier que : $-5e^{-5} \in I$ où I est l'intervalle défini ci-dessus.

(c) En déduire que l'équation $e^{-x} + \frac{x}{5} - 1 = 0$ admet une unique solution strictement positive x_m que l'on exprimera en fonction de W puis que la longueur d'onde obtenue maximisant la luminance a pour expression :

$$\lambda_m = \frac{hc}{(5 + W(-5e^{-5}))kT.}$$

⋆⋆⋆
FIN
⋆⋆⋆

Correction de l'exercice 1:

1. $V_n - U_n = \sum_{k=0}^{n}\left((k+1)\binom{n}{k+1} - k\binom{n}{k}\right)$, donc par télescopage : $V_n - U_n = (n+1)\binom{n}{n+1} - 0\binom{n}{0}$. Or $\binom{n}{n+1} = 0$ car $n+1 > n$. Par conséquent : $\boxed{V_n - U_n = 0}$.
2. • Pour $k = n$, $\binom{n}{n+1} = 0$ et $n - k = 0$, donc l'égalité demandée est vérifiée.
   • Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq k \leq n-1$,
   $$\begin{aligned}(k+1)\binom{n}{k+1} &= (k+1)\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}\\ &= \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \text{ car } (k+1)! = (k+1)k!\\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}(n-k)\text{car}(n-k)(n-k-1)! = (n-k)!\\ &= (n-k)\binom{n}{k}.\end{aligned}$$
   • Si $n = 0$, alors $k = 0$, donc l'égalité revient à vérifier que $\binom{0}{1} = 0$ ce qui est le cas.

   Finalement, $\boxed{\text{pour tout entier } k \text{ tel que } 0 \leq k \leq n,\ (k+1)\binom{n}{k+1} = (n-k)\binom{n}{k}}$.

   On en déduit : $V_n = \sum_{k=0}^{n}(n-k)\binom{n}{k} = n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} - U_n$ par linéarité. Or, d'après le binôme de Newton, $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$. Finalement, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ V_n = n2^n - U_n.}$
3. Puisque : $V_n = U_n$ d'après 1, alors l'égalité précédente s'écrit : $U_n = n2^n - U_n \Leftrightarrow \boxed{U_n = \frac{n2^n}{2} = n2^{n-1}.}$

Correction de l'exercice 2:

1. Si $x \equiv 0\ [2\pi]$, alors : $\forall k \in \mathbb{Z},\ e^{ikx} = 1$ donc $A_n(x) = \sum_{1\leq \ell\leq k\leq n} 1 = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{k} 1 = \sum_{k=1}^{n} k = \boxed{\frac{n(n+1)}{2}.}$
2. (a) Nous avons : $A_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{k} e^{ikx} = \boxed{\sum_{k=1}^{n} ke^{ikx}}$ puisque e^{ikx} est une constante vis à vis de la sommation sur ℓ.

   (b) D'autre part, nous avons également :
   $$\begin{aligned}A_n(x) &= \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=\ell}^{n} e^{ikx}\\ &= \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=0}^{n-\ell} e^{i(k+\ell)x} \text{ (glissement d'indice)}\\ &= \sum_{\ell=1}^{n} e^{i\ell x}\sum_{k=0}^{n-\ell}(e^{ix})^k\\ &= \sum_{\ell=1}^{n} e^{i\ell x}\frac{e^{i(n+1-\ell)x}-1}{e^{ix}-1} \text{ car } e^{ix} \neq 1\\ &= \frac{1}{e^{ix}-1}\left(\sum_{\ell=1}^{n} e^{i(n+1)x} - \sum_{\ell=1}^{n} e^{i\ell x}\right)\\ &= \frac{1}{e^{ix}-1}(ne^{i(n+1)x} - e^{ix}\frac{e^{inx}-1}{e^{ix}-1})\\ &= \frac{ne^{i(n+2)x} - e^{i(n+1)x} - ne^{i(n+1)x} + e^{ix}}{(e^ix-1)^2}\\ &= \frac{e^{ix}}{e^{ix}-1)^2}\left(ne^{i(n+1)x} - (n+1)e^{inx} + 1\right)\end{aligned}$$

   Nous déduisons des deux questions précédentes que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} - \{0\ [2\pi]\}, \sum_{k=1}^{n} ke^{ikx} = \frac{e^{ix}}{(e^ix-1)^2}\left(ne^{i(n+1)x} - (n+1)e^{inx} + 1\right).}$$

3. Si $x \not\equiv 0\ [2\pi]$, nous devons mettre sous forme algébrique la relation ci-dessus. Pour ceci, en utiliant la factorisation par l'angle moitié, on en déduit : $\dfrac{e^{ix}}{(e^{ix}-1)^2} = \dfrac{e^{ix}}{(-2ie^{ix/2}\sin(x/2))^2} = \dfrac{-1}{4\sin(x/2)^2}$. De plus : $ne^{i(n+1)x} - (n+1)e^{inx} + 1 = (n\cos((n+1)x) - (n+1)\cos(nx) + 1) + i(n\sin((n+1)x) - (n+1)\sin(nx)$.
Au final, nous en déduisons :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k\cos(kx) = \frac{-n\cos((n+1)x) + (n+1)\cos(nx) - 1}{4\sin\left(\frac{x}{2}\right)^2}}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k\sin(kx) = \frac{-n\sin((n+1)x) + (n+1)\sin(nx)}{4\sin\left(\frac{x}{2}\right)^2}.}$$

⋆⋆⋆
FIN
⋆⋆⋆

Correction de l'exercice 1:

1. Cf. fiche méthode
2. Cf. fiche méthode
3. Cf. fiche méthode
4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors la fonction $f : t \mapsto t^n\sqrt{1-t}$ est continue sur $[0;\ 1]$ ce qui justifie l'existence de $\displaystyle\int_0^1 t^n\sqrt{1-t}\,dt$.

   $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t}\,dt$.
   Posons $u(t) = 1-t$. La fonction u est dérivable sur $[0;\ 1]$ et $\forall t \in [0;\ 1]$, $u'(t) = -t$. Ainsi : $\boxed{I_0 =} - \displaystyle\int_0^1 u'(t)\sqrt{u(t)}\,dt = -\left[\frac{2}{3}u(t)^{3/2}\right]_0^1 = \boxed{\frac{2}{3}.}$

   (b) Nous avons $I_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 t^{n+1}\sqrt{1-t}\,dt$. Posons alors : $u(t) = t^{n+1}$ et $v(t) = -\frac{2}{3}(1-t)^{3/2}$. Les deux fonctions sont de classe C^1 surt $[0;\ 1]$ et $\forall t \in [0;\ 1]$, $u'(t) = (n+1)t^n,\ \ v'(t) = \sqrt{1-t}$. Par inégrations par parties nous avons alors : $\displaystyle\int_0^1 u(t)v'(t)\,dt = [u(t)v(t)]_0^1 - \int_0^1 u'(t)v(t)\,dt$ c'est à dire :

   $I_{n+1} = \left[-\frac{2}{3}t^{n+1}(1-t)^{3/2}\right]_0^1 + (n+1)\frac{2}{3}\displaystyle\int_0^1 t^n(1-t)^{3/2}$. Or, d'une part : $\left[-\frac{2}{3}t^{n+1}(1-t)^{3/2}\right]_0^1 = 0$ et d'autre part : $\displaystyle\int_0^1 t^n(1-t)^{3/2} = \int_0^1 t^n(1-t)\sqrt{1-t} = \int_0^1 t^n\sqrt{1-t}\,dt - \int_0^1 t^{n+1}\sqrt{1-t}\,dt$ par linéarité. Ainsi :

   $I_{n+1} = \frac{2}{3}(n+1)\left(\displaystyle\int_0^1 t^n\sqrt{1-t}\,dt - \int_0^1 t^{n+1}\sqrt{1-t}\,dt\right) = \frac{2}{3}(n+1)(I_{n+1}-I_n)$.

   Enfin :

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= \frac{2}{3}(n+1)(I_{n+1}-I_n)\\
\Leftrightarrow 3I_{n+1} &= 2(n+1)I_n - 2(n+1)I_{n+1}\\
\Leftrightarrow (2n+5)I_{n+1} &= 2(n+1)I_n\\
\Leftrightarrow &\ \boxed{I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{2n+5}I_n.}
\end{aligned}$$

   Nous avons par conséquent :
   Pour $n=0$, $\boxed{I_1 =}\frac{2}{5}I_0 = \boxed{\frac{4}{15}.}$
   Pour $n=1$, $\boxed{I_2 =}\frac{4}{7}I_1 = \boxed{\frac{16}{105}.}$

Correction de l'exercice 2:

1. (a) Le réel $f(x)$ est défini si et seulement si $\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \in [-1;1]$. Or , pour tout réel x, $x^2 \leq 1+x^2 \Leftrightarrow |x| \leq \sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \in [-1;1]$. Ainsi, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
   Puis, $x \mapsto \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\arcsin$ est dérivable sur $]-1;1[$. Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ privé des réels x tels que $\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \pm 1$. Ces dernières équations étant impossibles, f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

   (b) Par la formule de la composition,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\sqrt{1+x^2} - x\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}}\\
&= \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2-x^2}}\\
&= \boxed{\frac{1}{1+x^2}}
\end{aligned}$$

(c) Ainsi, $f' = \text{Arctan}'$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Donc f et Arctan sont égales à une constante près. Or $f(0) = \text{Arcsin}(0) = 0$ et $\text{Arctan}(0) = 0$. Finalement, $\boxed{f = \text{Arctan}}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$.

(a) tan est une bijection de $]-\pi/2, \pi/2[$ dans $\mathbb{R}$. Donc, elle est surjective et il existe θ dans $]-\pi/2, \pi/2[$ tel que $\tan(\theta) = x$

(b) $f(\tan(\theta)) = \text{Arcsin}(\frac{\tan(\theta)}{\sqrt{1+\tan^2(\theta)}}) = \text{Arcsin}(\frac{\tan(\theta}{\frac{1}{\cos(\theta)}})$ car $\cos(\theta) \geq 0$ pour $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$. Ainsi, $f(\tan(\theta)) = \text{Arcsin}(\cos(\theta)\tan(\theta)) = \text{Arcsin}(\sin(\theta)) = \theta$ car $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$.

(c) On sait que $\forall x \in \mathbb{R}, \theta \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[, \text{Arctan}(x) = \theta \Leftrightarrow x = \tan(\theta)$. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(\tan(\theta)) = \theta = \text{Arctan}(x)$.

Correction de l'exercice 3:

On note : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$.

1. La fonction f est dérivable sur $[-1;\ +\infty[$ par produit de fonctions dérivable et $\forall x \in [-1;\ +\infty[,\ f'(x) = (x+1)e^x$. Ainsi, $\forall x \in [1;\ +\infty[,\ f'(x) > 0$ et f' ne s'annule qu'une fois en 0. Par propriété, f est strictement monotone donc induit une bijection de $J = [-1;\ +\infty[$ vers $f(J)$. De plus, f est continue sur J donc : $\boxed{f(J) = [f(-1), \lim_{x\to+\infty} f(x)[= [-1/e;\ +\infty[.}$ On note $I = f(J)$ ci-dessous

$f : I \to J$ étant bijective, cette dernière admet une application réciproque que l'on note $W : J \to I$.

2. On sait que $\forall x \in J,\ f(x) = 0 \Leftrightarrow x = W(0)$. Or : $xe^x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ car $e^x \neq 0$. On en déduit : $\boxed{W(0) = 0.}$

Par définition d'une application réciproque : $\forall y \in I, f(W(y)) = y$ c'est à dire : $w(y)e^{W(y)} = y \Leftrightarrow W(y) = \frac{y}{e^{W(y)}}$.

3. f est dérivable sur $]-1;\ +\infty[$ et $\forall x \in]-1;\ +\infty[, f'(x) \neq 0$. On en déduit donc que W est dérivable sur $]1/e;\ +\infty[$. De plus, $\forall y \in]1/e;\ +\infty[,\ W'(y) = \frac{1}{f'(W(y))} = \frac{1}{(W(y)+1)e^{W(y)}}$. D'autre part, d'après la question précédente : $\frac{1}{e^{W(y)}} = \frac{W(y)}{y}$.
On en déduit : $\boxed{\forall y \in]-1/e;\ +\infty[-\{0\},\ W'(y) = \frac{W(y)}{y(1+W(y))}}$.

4. Posons : $f(u) = u(u+1)$ et $g(u) = e^u$. Les deux fonctions sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall u \in \mathbb{R},\ f'(u) = 2u+1$ et $g'(u) = e^u$. Par intégration par parties, on en déduit : $\int_0^\alpha u(u+1)e^u\,du = [u(u+1)e^u]_0^\alpha - \int_0^\alpha (2u+1)e^u\,du$. Or, toujours par une intégration par parties similaire nous obtenons :
$\int_0^\alpha (2u+1)e^u\,du = [(2u+1)e^u]0^\alpha - \int_0^\alpha 2e^u\,du = (2\alpha+1)e^{alpha} - 1 - [2e^u]_0^\alpha = 2\alpha e^\alpha - e^\alpha + 1$.

Au final : $\int_0^\alpha u(u+1)e^u\,du = \alpha(\alpha+1)e^\alpha - 2\alpha e^\alpha + e^\alpha - 1 = \boxed{e^\alpha(\alpha^2 - \alpha + 1) - 1.}$

5. On note : $F(x) = \int_0^x W(t)\,dt$.

(a) W est continue sur I donc pour tout $x \in I$, $\int_0^x W(t)\,dt$ a un sens car $0 \in I$.

(b) Posons $u = W(t) \Leftrightarrow t = f(u)$. Alors, pour $t_0 = 0$, $u_0 = W(0) = 0$ et pour $t_1 = x$, $u_1 = W(x)$. On sait par ailleurs que f est de classe C^1 sur J et pour tout $u \in J, f'(u) = (u+1)e^u$. D'après la formule de changement de variable, on en déduit :

$$\int_0^x W(t)\,dt = \int_0^{W(x)} u(u+1)e^u\,du,$$

ce qui prouve que $\boxed{F(x) = \int_0^{W(x)} u(u+1)e^u\,du.}$

(c) D'après 4, on en déduit :
$$\boxed{\forall x \in I,\ F(x) = e^{W(x)}(W(x)^2 - W(x) + 1) - 1.}$$

6. (a) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad e^{-x} + \dfrac{x}{5} - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow 1 + \frac{x}{5}e^x - e^x$
$\Leftrightarrow 5 + xe^x - 5e^x = 0$
$\Leftrightarrow (x-5)e^x = -5$
$\Leftrightarrow \boxed{(x-5)e^{x-5} = -5e^{-5}.}$

(b) On vérifie que $-5e^{-5} > -1/e$ car $-5e^{-5} > -1/e \Leftrightarrow 5 < e^4$ ce qui est vrai puisque $e > 2$. Par conséquent : $\boxed{-5e^{-5} \in I.}$

(c) Posons : $a = -5e^{-5} \in I$. Alors, d'après 6a : $e^{-x} + \dfrac{x}{5} - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x-5) = a$. Ainsi, si $x - 5 \in [-1;\ +\infty[\Leftrightarrow x > 4$, nous avons $x - 5 = W(a)$ comme unique solution, car $a \in I$ d'après la question précédente. La solution de l'équation obtenue a donc pour expression : $x = 5 + W(-5e^{-5})$. Mais l'équation $ue^u = -5e^{-5}$ admet une autre solution sur $]-\infty;\ -1[$ qui est nécéssairement -5 (l'équation est vérifiée pour $u = -5$!). Ceci amène donc une deuxième solution à l'équation qui est 0.

Au final, l'unique solution strictement positive de cette équation est $\boxed{x_m = 5 + W(-5e^{-5})}$ ce qui donne pour expression de la luminance maximale la valeur :

$$\boxed{\lambda_m = \frac{hc}{kx_m} = \frac{hc}{(5 + W(-5e^{-5}))kT}.}$$

⋆ ⋆ ⋆
FIN
⋆ ⋆ ⋆