Devoir surveillé n° 3−partie 1.

Durée : 1 heure

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Dans cette épreuve, les candidats sont invités à illustrer, s'ils le jugent nécessaire, leurs réponses avec un dessin.

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x\left(e^{1/x} - 2\right)$.

1. **Calculs de limites utiles pour la suite.**
   (a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.
   (b) Déterminer : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\left(e^{1/x} - 1\right)$, $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{e^{1/x}}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} xe^{1/x}$ (on pourra poser $X = \dfrac{1}{x}$).
2. **Étude d'une fonction auxiliaire.**
   On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)e^{1/x} - 2$.
   (a) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et déterminer $g'(x)$.
   (b) Étudier les limites aux bords du domaine de définition de g.
   (c) En déduire le tableau de variations de g puis le signe de $g(x)$.
3. **Tableau de variations de f.**
   (a) Montrer que f est dérivable sur un ensemble D que l'on précisera, et calculer $f'(x)$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ pour $x \in D$. En déduire le tableau de variations de f, en précisant les limites aux bords du domaine de définition.
4. **Étude des asymptotes et courbe représentative.**
   (a) Calculer $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) + x)$. En déduire que f admet une asymptote oblique en $+\infty$, ainsi qu'en $-\infty$, et donner une équation réduite de chacune.
   (b) Tracer le plus précisément la courbe représentative de la fonction f.

Exercice 2

- Deux questions indépendantes -

1. Montrer que $\forall x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\sin(x) \geq \dfrac{2}{\pi}x$.
2. Étudier la fonction f d'expression : $f(x) = 3 + \cos(x) - 2\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

$\star\star\star$
FIN
$\star\star\star$

Devoir surveillé n° 3–partie2.

Durée : 2 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Dans cette épreuve, les candidats sont invités à illustrer, s'ils le jugent nécessaire, leurs réponses avec un dessin.

Exercice 1
- Questions indépendantes -

1. Résoudre : $y'' + 4y = -e^{2x}$.
2. Résoudre : $y'' - 4y' + 4y = \cos(2x)$.
3. Résoudre $\left(\dfrac{z}{z-1}\right)^3 = 1$.

Exercice 2
Extrait de BANQUE PT

Le but de l'exercice est de redémontrer le théorème concernant l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 (on admet que vous connaissez l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1) .
On note $(E_H) : y'' + by' + cy = 0$. On suppose que $\Delta = b^2 - 4c > 0$ (on démontre le théorème seulement dans ce cas).

(Q 1) On note r_1 et r_2 les racines de l'équation caractéristique associée à (E_H). Démontrer que $r_1 + r_2 = -b$ et $r_1 r_2 = c$ (encore appelées relations coefficients racines).

(Q 2) Montrer que $x \mapsto e^{rx}$ est solution de (E_H) si et seulement si r est solution de l'équation caractéristique.

(Q 3) Montrer alors que y est solution de (E_H) si et seulement si $(y' - r_1 y)$ est solution de $z' - r_2 z = 0$. (On pourra utiliser (Q1)).

(Q 4) Donner l'ensemble des solutions de $z' - r_2 z = 0$.

(Q 5) Résoudre $y' - r_1 y = \lambda e^{r_2 x}$

(Q 6) Conclure sur l'ensemble des solutions de (E_H).

Problème

Soit $0 < \theta < \pi$. On note z_1 et z_2 les solutions de l'équation

$$z^2 - 2e^{i\theta} z + 1 = 0$$

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j}\,)$. On note M le point d'affixe $e^{i\theta}$, M_1 le point d'affixe z_1, M_2 le point d'affixe z_2.
L'objectif est d'obtenir une construction géométrique des points M_1 et M_2 à partir du point M et à l'aide uniquement de la règle et du compas.

(Q 1) Montrer que pour $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$:

$$e^{i\theta} + e^{i\theta'} = 2\cos(\frac{\theta - \theta'}{2}) e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}} \ (\star)$$

et que

$$e^{i\theta} - e^{i\theta'} = 2i\sin(\frac{\theta - \theta'}{2}) e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}} \ (\star\star)$$

(Q 2) **Expression de** z_1 et z_2.

(a) En utilisant ($\star\star$), vérifier que le discriminant du trinôme $z^2 - 2e^{i\theta}z + 1$ est égal à

$$\Delta = 8\sin(\theta)e^{i[\theta+\pi/2]}$$

(b) En déduire que les solutions de l'équation sont $e^{i\theta} \pm \sqrt{2\sin(\theta)} \times e^{i[\theta/2+\pi/4]}$. On note alors

$$z_1 = e^{i\theta} + \sqrt{2\sin(\theta)} \times e^{i[\theta/2+\pi/4]} \text{ et } z_2 = e^{i\theta} - \sqrt{2\sin(\theta)} \times e^{i[\theta/2+\pi/4]}$$

(Q 3) **Soit A le point d'affixe $-i$.**

(a) En utilisant ($\star$), montrer que $e^{i\theta} + i = 2\cos(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4})e^{i[\theta/2+\pi/4]}$.

(b) En utilisant $\frac{z_{\overrightarrow{AM}}}{z_{\overrightarrow{MM_1}}}$, montrer alors les points A, M, M_1 sont alignés. On admet de même que A, M, M_2 sont alignés.

(Q 4) **Soit B le point d'affixe i.**

(a) Montrer que $2\sin^2(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}) = 1 - \sin(\theta)$.

(b) En utilisant ($\star\star$), montrer que : $e^{i\theta} - i = 2i\sin(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}) \times e^{i[\theta/2+\pi/4]}$.

(c) Montrer alors que $z_{\overrightarrow{BM_1}} = e^{i\theta/2+i\pi/4} \times \left(\sqrt{2\sin(\theta)} + 2i\sin(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4})\right)$.

(d) En déduire que $BM_1 = \sqrt{2}$. De même, on admet que $BM_2 = \sqrt{2}$.

(e) En déduire que M_1 et M_2 appartiennent à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

(Q 5) Finalement, faites une figure sur laquelle vous ferez apparaitre les points A et B. Placer un point M quelconque d'affixe $e^{i\theta}$ avec $\theta \in]0;\pi[$. Construire le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{2}$.
Puis construisez les points M_1 et M_2 en utilisant les trois points précédents.

$\star\star\star$
FIN
$\star\star\star$

Correction de l'exercice 1:

1. (a) • $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{1/x} = 1$ donc par produit : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(e^{1/x}-2\right) = -\infty.}$

   • $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1/x} = 1$ donc par produit : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(e^{1/x}-2\right) = +\infty.}$

   • $\lim\limits_{x\to O^-} e^{1/x} = 0$ donc par produit : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^-} x\left(e^{1/x}-2\right) = 0.}$

   (b) • On pose : $X = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{X}$. Alors : $x\left(e^{1/x}-1\right) = \dfrac{1}{X}(e^X-1) = \dfrac{e^X-1}{X}$. De plus : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} X = 0$, donc par changement de variables : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{1/x}-1\right) = \lim\limits_{X\to 0}\dfrac{e^X-1}{X} = 1.}$

   • On pose : $X = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{X}$. Alors : $\dfrac{e^{1/x}}{x} = \dfrac{e^X}{\frac{1}{X}} = Xe^X$. De plus : $\lim\limits_{x\to 0^-} X = -\infty$, donc par changement de variables : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{1/x}}{x} = \lim\limits_{X\to-\infty} Xe^X = 0,}$ par croissances comparées.

   • On pose : $X = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{X}$. Alors : $xe^{1/x} = \dfrac{e^X}{X}$. De plus : $\lim\limits_{x\to 0^+} X = +\infty$, donc par changement de variables : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} xe^{1/x} = \lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{e^X}{X} = +\infty,}$ par croissances comparées.

2. (a) Par opérations usuelles, g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{x^2}e^{1/x} + \left(1-\frac{1}{x}\right)\times\frac{-1}{x^2}e^{1/x} \\ &= e^{1/x}\left(\cancel{\frac{1}{x^2}} - \cancel{\frac{1}{x^2}} + \frac{1}{x^3}\right) \\ &= \boxed{\frac{e^{1/x}}{x^3}.} \end{aligned}$$

   (b) • $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{1/x} = 1$, donc par opérations usuelles : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -1.}$

   • $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1/x} = 1$, donc par opérations usuelles : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -1.}$

   • $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{1/x} = +\infty$, donc par opérations usuelles : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = -\infty.}$

   • Nous avons : $g(x) = e^{1/x} - \dfrac{e^{1/x}}{x} - 2$. Or, $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{1/x} = 0$ et d'après (a) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{1/x}}{x} = 0$. Ainsi, par opérations usuelles : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = -2.}$

   (c) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $g'(x) = \dfrac{e^{1/x}}{x^3}$. Or, $e^{1/x} > 0$ et x^3 est du signe du x, on en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	||	$+$	
g	-2	$\searrow$	$-\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	-1

   Au vu des variations de g et des limites aux bords du domaines de définition, nous constatons que : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g(x) < 0.}$

3. (a) Par opérations élémentaires, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{1/x} - 2 + x\frac{-1}{x^2}e^{1/x} \\ &= e^{1/x} - 2 - \frac{1}{x}e^{1/x} \\ &= \left(1 - \frac{1}{x}\right)e^{1/x} - 2 \\ &= \boxed{g(x).} \end{aligned}$$

(b) D'après la question précédente, $f'(x)$ est du signe de $g(x)$. Or $g(x) < 0$ d'après 2c, donc $f'(x) < 0$, et donc $\boxed{f \text{ est strictement décroissante.}}$

Nous en déduisons le tableau de variations de f :

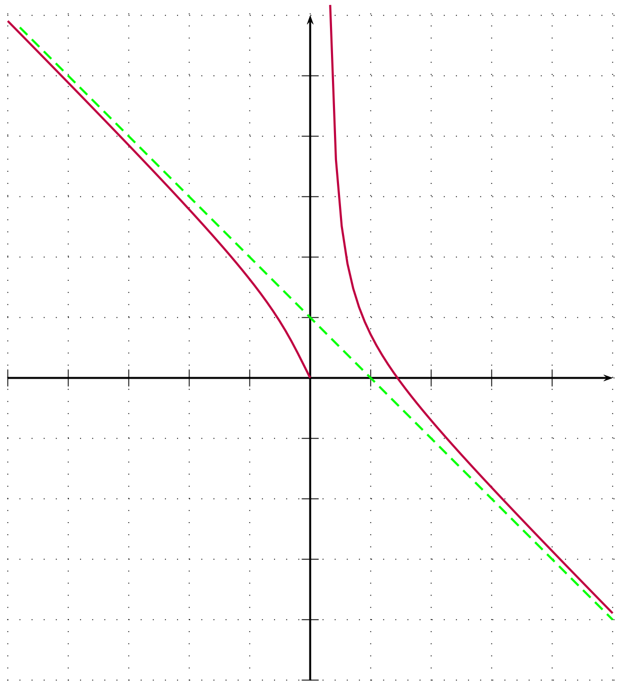
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
f	$+\infty$ ↘		0 ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

En effet, $f(x) = xe^{1/x} - 2$ et, d'après 1b, $\lim\limits_{x\to 0^+} xe^{1/x} = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty.}$

4. (a) • Nous avons : $f(x) + x = xe^{1/x} - 2x + x = xe^{1/x} - x = x\left(e^{1/x} - 1\right)$. Or $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\left(e^{1/x} - 1\right) = 1$ d'après 1b, donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x) + x) = 1.}$

• Par conséquent : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x) - (-x+1)) = 0$ donc la courbe représentative de f admet une asymptote en $\pm\infty$ d'équation : $\boxed{y = -x + 1.}$

(b)



Correction de l'exercice 2:

1. Posons $g(x) = \sin(x) - \frac{2}{\pi}x$. Alors g est dériable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par opérations élémentaires et $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \cos(x) - \frac{2}{\pi}$. De même, g' est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ g''(x) = -\sin(x)$. On constate que : $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right],\ g''(x) \leq 0$ d'où le tableau de variations de g' :

x	0		α		$\frac{\pi}{2}$
g'	$1-\frac{2}{\pi}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{2}{\pi}$

notamment car $1-\dfrac{2}{\pi}>0$ dans la mesure où $\pi>2$.

Par conséquent : $\forall x\in[0;\ \alpha],\ g'(x)\geq 0$ et $\forall x\in\left[\alpha;\ \dfrac{\pi}{2}\right],\ g'(x)\leq 0$ d'où le tableau de variations de g :

x	0		α		$\frac{\pi}{2}$
g	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

Au final, d'après le tableau de variations : $\forall x\in\left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right],\ g(x)\geq 0 \Leftrightarrow$ $\boxed{\forall x\in\left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right],\ \sin(x)\geq\dfrac{2}{\pi}x.}$

2. Soit la fonction f d'expression $f(x)=3+\cos(x)-2\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

- f est <u>définie sur $\mathbb{R}$</u>.
- f est <u>paire</u>. En effet, $\forall x\in\mathbb{R},\ \cos(-x)=\cos(x)$ donc : $f(-x)=3+\cos(-x)-2\cos\left(-\dfrac{x}{2}\right)=3+\cos(x)-2\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)=f(x)$.
- f est <u>4π périodique</u> car $f(x+4\pi)=3+\cos(x+4\pi)-2\cos\left(\dfrac{x+4\pi}{2}\right)=3+\cos(x+4\pi)-2\cos\left(\dfrac{x}{2}+2\pi\right)$. Or $\cos$ est 2π périodique donc : $\cos(x+4\pi)=\cos(x)$ et $\cos\left(\dfrac{x}{2}+2\pi\right)=\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$. Ainsi, $f(x+2\pi)=f(x)$ ce qui prouve que $f(x+4\pi)=f(x)$.
- De toutes ces informations, on en déduit qu'il est possible de <u>restreindre l'étude de f à $[0;\ 2\pi]$</u>. On complètera alors le tracé sur $[-2\pi;\ 2\pi]$ par symétrie par rappport à l'axe des ordonnées (parité) puis sur $\mathbb{R}$ en translatant le morceau de courbe obtenu sur $[-2\pi;\ 2\pi]$ (4π périodicité).

- Par opérations élémentaires, f est dérivable sur $I=[0;\ 2\pi]$ et $\forall x\in I$, $f'(x)=-\sin(x)+\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$. Or $\sin(x)=2\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$ donc :

$$\boxed{f'(x)=-2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2}\right).}$$

De plus :

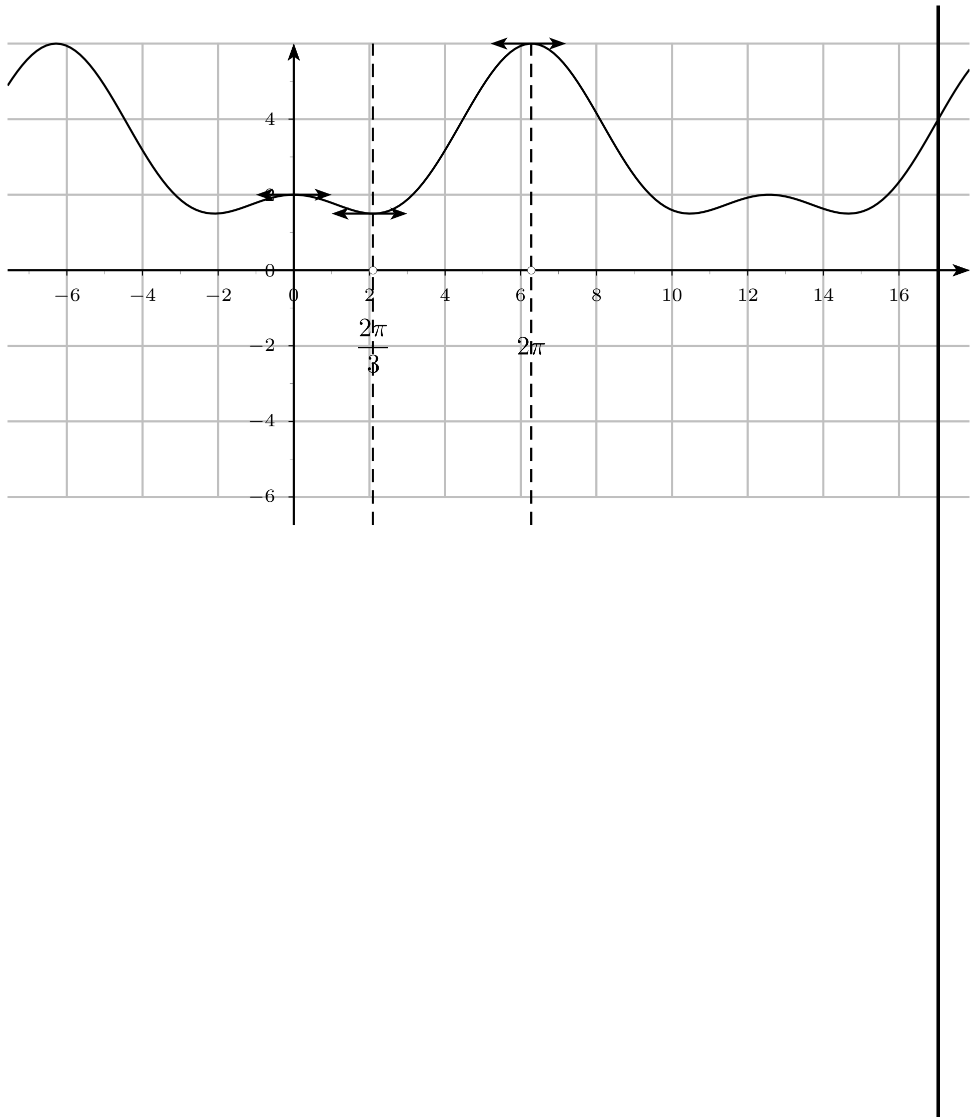
$$\begin{aligned}\forall x\in I,\quad \cos\left(\frac{x}{2}\right)-\tfrac{1}{2}\geq 0 &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right)\geq\tfrac{1}{2}\\ &\Leftrightarrow \frac{x}{2}\in\left[0;\ \frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{3};\ 2\pi\right]\ [2\pi]\\ &\Leftrightarrow x\in\left[0;\ \frac{2\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{10\pi}{3};\ 4\pi\right]\ [4\pi]\\ &\Leftrightarrow x\in\left[0;\ \frac{2\pi}{3}\right]\ \text{car } x\in[0;\ 2\pi]\end{aligned}$$

Par ailleurs, si $x\in I$, alors $\dfrac{x}{2}\in[0;\ \pi]$ et donc : $\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\geq 0$.

On en déduit le tableau de variations de f :

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		2π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
f	2	$\searrow$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	6

Nous obtenons au final le tracé suivant :


4
2
0
−2
−4
−6
−6
−4
−2
0
2
4
6
8
10
12
14
16
$\frac{2\pi}{3}$
2π

Correction de l'exercice 1:

1. Cf. TD
2. Cf. TD
3. Cf. Fiche méthode.

Correction de l'exercice 2:

(Q 1) On connait par exemple leur expression explicite :

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

On obtient $\boxed{r_1 + r_2 = -b}$ et

$$\boxed{r_1 r_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2} \times \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{b^2 - \Delta}{4} = c.}$$

(Q 2) La fonction $x \mapsto e^{rx}$ est solution de (E_H) si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}, r^2 e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$ ce qui équivaut à $r^2 + br + c = 0$ (car pour tout $x \in \mathbb{R}, e^{rx} \neq 0$.) $\boxed{\text{L'équivalence est donc démontrée.}}$

(Q 3) La fonction y est solution si et seulement si $y'' + by' + cy = 0 \Leftrightarrow y'' - (r_1 + r_2)y' + r_1 r_2 y = 0 \Leftrightarrow y'' - r_1 y' - r_2(y' - r_1 y) = 0$ ce qui équivaut à $\boxed{(y' - e^{r_1 x} y) \text{ est solution de } z' - r_2 z = 0.}$

(Q 4) Par propriété, l'ensemble des fonctions solutions de cette équation différentielle linéaire d'ordre 1 est

$$\boxed{\mathcal{S}_H = \left\{ x \mapsto C \times e^{r_2 x} ; C \in \mathbb{R} \right\}}$$

(Q 5) (a) **Équation homogène :** l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène $(y' - r_1 y = 0)$ linéaire d'ordre 1 est

$$\mathcal{S}_H = \left\{ x \mapsto C \times e^{r_1 x} ; C \in \mathbb{R} \right\}$$

(b) **Solution particulière.** Le second membre est $x \mapsto \lambda e^{r_2 x}$ et r_2 n'est pas solution de $R - r_1 = 0$ puisque $\Delta > 0$. Par conséquent, on cherche une solution particulière sous la forme $x \mapsto Ce^{r_2 x}$. On dérive une fois cette dernière et on injecte :

$$Cr_2 e^{r_2 x} - r_1 \times Ce^{r_2 x} = \lambda e^{r_2 x} \Leftrightarrow C = \frac{\lambda}{r_2 - r_1}.$$

car $r_2 \neq r_1$ puisque $\Delta > 0$. Une solution particulière est $x \mapsto \frac{\lambda}{r_2 - r_1} e^{r_2 x}$.

(c) Par théorème, l'ensemble des solutions de cette équation différentielle est

$$\mathcal{S} = \left\{ x \mapsto C \times e^{r_1 x} + \frac{\lambda}{r_2 - r_1} e^{r_2 x} ; C \in \mathbb{R} \right\}$$

(Q 6) Par (Q3), y est solution de (E_H) si et seulement si $y' r_1 y$ est solution de $z' - r_2 z = 0$ ce qui équivaut à $(y' - r_1 y) = \lambda e^{r_2 x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Or l'ensemble des solutions de cette équation différentielle est donnée en (Q 5). Par conséquent,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = C \times e^{r_1 x} + \frac{\lambda}{r_2 - r_1} e^{r_2 x}}$$

$\boxed{\text{avec } \lambda, C \in \mathbb{R}.}$ Finalement, l'ensemble des solutions d'une telle équation différentielle est :

$$\left\{ x \mapsto C \times e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} ; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Correction du problème :

(Q 1) Soit $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$.

$$e^{i\theta} + e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')/2} \left(e^{i(\theta-\theta')/2} + e^{-i(\theta-\theta')/2} \right) = 2\cos(\frac{\theta - \theta'}{2}) e^{i(\theta+\theta')/2}$$

De même,

$$e^{i\theta} - e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')/2} \left(e^{i(\theta-\theta')/2} - e^{-i(\theta-\theta')/2} \right) = 2i\sin(\frac{\theta - \theta'}{2}) e^{i(\theta+\theta')/2}$$

(Q 2) **Expression de** z_1 et z_2.

(a)
$$\Delta = (2e^{i\theta})^2 - 4\times 1\times 1 = 4(e^{i2\theta}-1)$$
Or $e^{i2\theta}-1 = e^{i2\theta}-e^{i\times 0} = 2i\sin(\theta)e^{i\theta}$ par $(\star\star)$. Ainsi,
$$\Delta = 8i\sin(\theta)e^{i\theta} = \boxed{8\sin(\theta)e^{i(\theta+\pi/2)}}$$

(b) Le nombre θ est un élément de $[0;\pi]$, donc $\sin(\theta)$ est positif et une racine carrée de Δ est $\sqrt{8\sin(\theta)}e^{i(\theta+\pi/2)/2}$.

Par théorème, les solutions sont donc $\frac{2e^{i\theta}\pm 2\sqrt{2\sin(\theta)}e^{i(\theta/2+\pi/4)}}{2} = e^{i\theta}\pm\sqrt{2\sin(\theta)}e^{i(\theta/2+\pi/4)}$.

(Q 3) **Soit** A **le point d'affixe** $-i$.

(a) En utilisant $(\star)$:
$$e^{i\theta}+i = e^{i\theta}+e^{i\pi/2} = 2\cos(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})e^{i(\theta/2+\pi/4)}$$

(b) On calcule $z_{\overrightarrow{AM}} = z_M - z_A = e^{i\theta}+i = 2\cos(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})e^{i(\theta/2+\pi/4)}$. Puis, $z_{\overrightarrow{MM_1}} = z_{M_1}-z_M = e^{i\theta}+\sqrt{2\sin(\theta)}e^{i(\theta/2+\pi/4)}-e^{i\theta} = \sqrt{2\sin(\theta)}e^{i(\theta/2+\pi/4)}$. Ainsi, $\frac{z_{AM}}{z_{\overrightarrow{MM_1}}}\in\mathbb{R}$ et les points A, M, M_1 sont donc alignés puisque l'angle $(\overrightarrow{MM_1};\overrightarrow{AM})$ est nul modulo π.

(Q 4) **Soit** B **le point d'affixe** i**.**

(a) $2\sin^2(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}) = 1-\cos(2\times(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})) = 1-\cos(\theta-\pi/2) = 1-\sin(\theta)$.

(b) On utilise $(\star\star)$ et nous obtenons :
$$e^{i\theta}-i = e^{i\theta}-e^{i\pi/2} = 2i\sin((\theta-\pi/2)/2)e^{i(\theta/2+\pi/4)}$$

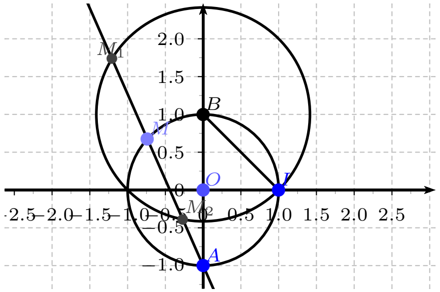
(c) Montrer alors que $z_{\overrightarrow{BM_1}} = e^{i\theta/2+i\pi/4}\times\left(\sqrt{2\sin(\theta)}+2i\sin(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})\right)$. Ainsi,
$$z_{\overrightarrow{BM_1}} = z_{M_1}-z_B = e^{i\theta}+\sqrt{2\sin(\theta)}e^{i(\theta/2+\pi/4)}-i$$
$$= 2i\sin((\theta-\pi/2)/2)e^{i(\theta/2+\pi/4)}+\sqrt{2\sin(\theta)}e^{i(\theta/2+\pi/4)}$$
$$= e^{i(\theta/2+\pi/4)}\left(2i\sin((\theta-\pi/2)/2)+\sqrt{2\sin(\theta)}\right)$$

(d)
$$\begin{aligned}
BM_1 &= |z_{\overrightarrow{BM_1}}| = |e^{i(\theta/2+\pi/4)}\left(2i\sin((\theta-\pi/2)/2)++\sqrt{2\sin(\theta)}\right)| \\
&= |e^{i(\theta/2+\pi/4)}|\times|\left(2i\sin((\theta-\pi/2)/2)++\sqrt{2\sin(\theta)}\right)| \\
&= 1\times\sqrt{4\sin^2((\theta-\pi/2)/2)+2\sin(\theta)} \text{ par la formule du module} \\
&= \sqrt{2}\times\sqrt{2\sin^2((\theta-\pi/2)/2)+\sin(\theta)} \\
&= \sqrt{2}\times\sqrt{1-\sin(\theta)+\sin(\theta)} \text{ par la première question} \\
&= \boxed{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

(e) Par définition, les points M_1 et M_2 appartiennent au cercle de centre B et de rayon $\sqrt{2}$.

(Q 5) On sait que M_1 et A, M sont alignés et M_1 appartient au cercle de centre B et de rayon $\sqrt{2}$. Pour construire ces points :

- Construire le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{2}$. Pour avoir cette longueur, on peut utiliser le triangle rectangle isocèle de côté 1, son hypoténuse mesure alors $\sqrt{2}$.
- Construire la droite (AM).
- Les points d'intersection de cette droite avec le cercle, sont donc les points M_1 et M_2.



⋆ ⋆ ⋆
FIN
⋆ ⋆ ⋆