Devoir surveillé n° 3.

Durée : 4 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Dans cette épreuve, les candidats sont invités à illustrer, s'ils le jugent nécessaire, leurs réponses avec un dessin.

Exercice 1

- Questions de « cours »-

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Résoudre l'équation différentielle $x^2y' + xy = 1$.
2. Montrer $f : t + \cos(t)$ induit une bijection de $[0;\ 2\pi]$ vers un ensemble à préciser. On note f^{-1} l'application réciproque associée. Sur quel intervalle f^{-1} est-elle dérivable ?
3. Montrer que la composition d'applications injectives est injective.
4. Soit E, F et G trois ensembles, et $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n + 1$.
6. On considère (a_n) telle que : $a_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$.
   (a) Montrer (une récurrence est inutile ici !) que $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}} \leq n + 1$.
   (b) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leq n!$

Exercice 2

1. On note f la fonction d'expression $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et g la fonction d'expression : $g(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{Arcos}\left(\dfrac{x-2}{x}\right)$.
   (a) Donner les domaines de définition de f et g. On notera D le domaine de définition de g dans la suite de l'exercice.
   (b) Donner une expression simple de $\sin^2(g(x))$ et $\sin^2(f(x))$ pour tout $x \in D$. En déduire que $f = g$.
   (c) Donner le domaine de dérivabilité de g et calculer g'. En déduire une autre façon de montrer que $f = g$.
2. Soit $x \in \left]0;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$. En vous aidant d'une intégration par parties, montrer que :
$$\int_2^{1/\sin^2(x)} \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\, dt = \frac{x}{\sin^2(x)} - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\tan(x)} - 1.$$
3. Soit $x \in \left]0;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$. Exprimer $\displaystyle\int_2^{1/\sin^2(x)} \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\, dt$ en fonction de $\displaystyle\int_{\pi/4}^{x} \frac{dt}{\sin^2(t)}$ à l'aide du changement de variable : $t = \dfrac{1}{\sin^2(u)}$ (*on pourra faire une intégration par parties après le changement de variable*).
4. Déduire des deux questions précédentes une expression simple de $\displaystyle\int_{\pi/4}^{x} \frac{dt}{\sin^2(t)}$ pour $x \in \left]0;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Problème

PARTIE I : Questions préliminaires.

1. Soit $t \in [0;\ \pi[$. On pose $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$. Montrer que $\cos(t) = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$ et $\sin(t) = \dfrac{2u}{1+u^2}$.
2. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, et 2π-périodique. Montrer à l'aide d'un changement de variable que $\forall a \in \mathbb{R},\ \displaystyle\int_{2\pi}^{2\pi+a} f(t)\ dt = \int_0^a f(t)\ dt$ et en déduire $\forall a \in \mathbb{R},\ \displaystyle\int_a^{2\pi+a} f(t)\ dt = \int_0^{2\pi} f(t)\ dt$.
3. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, paire et 2π-périodique. À l'aide d'un changement de variable, montrer que : $\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\ dt = \int_{-\pi}^{0} f(t)\ dt$ puis que : $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\ dt = 2\int_0^{\pi} f(t)\ dt$.
4. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On note $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\ dt$. Justifier que $\forall a \in \mathbb{R},\ \displaystyle\lim_{x \to a} F(x) = \int_0^a f(t)\ dt$. (*On admettra que si f est continue sur $\mathbb{R}$ alors* $\forall x_0 \in \mathbb{R},\ \displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.)

PARTIE II : Deux calculs d'intégrales.

Pour $r \in [0;\ 1[\cup]1;\ +\infty[$, on considère les intégrales suivantes :

$$A(r) = \int_0^{2\pi} \frac{r-\cos(t)}{r^2 - 2r\cos(t) + 1}\ dt, \quad B(r) = \int_0^{2\pi} \frac{\sin(t)}{r^2 - 2r\cos(t) + 1}\ dt.$$

1. Justifier l'existence de $A(r)$ et $B(r)$ puis calculer $B(r)$.
2. Montrer que $A(r) = 2\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{r-\cos(t)}{r^2 - 2r\cos(t) + 1}\ dt$
3. On considère un réel $a \in]0;\ \pi[$ et on pose : $I_a(r) = \displaystyle\int_0^{a} \frac{r-\cos(t)}{r^2 - 2r\cos(t) + 1}\ dt$.

   (a) En réalisant le changement de variable $u = \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$, montrer que $I(r)$ est de la forme :

   $$I_a(r) = \frac{2}{r+1}\int_0^{\tan(a/2)} \frac{u^2+\alpha}{(u^2+\alpha^2)(u^2+1)}\ du$$

   où α est un réel non nul que l'on exprimera simplement en fonction de r.

   (b) Déterminer deux réels A et B tels que : $\forall u \in \mathbb{R},\ \dfrac{u^2+\alpha}{(u^2+\alpha^2)(u^2+1)} = \dfrac{A}{u^2+\alpha^2} + \dfrac{B}{u^2+1}$.

   (c) En déduire : $I_a(r) = \dfrac{1}{r}\left(\mathrm{Arctan}\left(\frac{\tan(a/2)}{\alpha}\right) + \dfrac{a}{2}\right)$.

   (d) En distinguant les cas $\alpha < 0$ et $\alpha > 0$ déterminer $\displaystyle\lim_{a \to \pi^-} I_a(r)$.

   (e) Finalement, montrer que $A(r) = 0$ si $r \in]0;\ 1[$ et $A(r) = \dfrac{2\pi}{r}$ si $r > 1$.

PARTIE III : Indice d'un point par rapport à un lacet.

Soit $\gamma : t \mapsto x(t) + iy(t)$ une application définie sur $[0;\ 1]$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, de classe C^1 et telle que $\gamma(0) = \gamma(1)$. On note de plus $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma([0;\ 1])$. On appelle indice d'un point par rapport à un lacet, et on note : $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ l'intégrale :

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}\ dt.$$

1. Justifier l'existence de $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma([0;\ 1])$.
2. On pose dans cette question uniquement : $\gamma(t) = e^{2i\pi t}$ et $z = \rho e^{i\varphi}$ tel que $\rho \neq 1$ et $\varphi \in [0;\ 2\pi]$.

   (a) Vérifier que γ et z vérifient les hypothèses précédentes puis calculer $\mathrm{Ind}_\gamma(0)$.

(b) On suppose $z \neq 0$. À l'aide d'un changement de variable, montrer que :

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{r - e^{it}}$$

avec $\rho = \dfrac{1}{r}$.

(c) Exprimer la partie réelle puis la partie imaginaire de l'intégrale ci-dessus en fonction des intégrales $A(r)$ et $B(r)$. En déduire la valeur de $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ selon les valeurs de z.

3. On garde la notation $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ précédemment introduite et on considère à nouveau une application γ quelconque vérifiant les hypothèses précisées au début de cette partie.

On veut montrer dans cette question que $\mathrm{Ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$. On pose pour ceci : $F(x) = \exp\left(\displaystyle\int_0^x \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}\right) dt$.

(a) Justifier la dérivabilité de $G : x \mapsto \dfrac{F(x)}{\gamma(x) - z}$ pour tout $x \in [0;\ 1]$ et montrer que : $\forall x \in [0;\ 1], G'(x) = 0$.

(b) En déduire que $F(0) = F(1)$ puis que $\exp(2i\pi \mathrm{Ind}_\gamma(z)) = 1$. Conclure.

⋆⋆⋆
FIN
⋆⋆⋆

Correction de l'exercice 1:

1. Cf fiche méthode.
2. Cf cours.
3. f est dérivable sur $[0;\ 2\pi]$ et par somme $\forall t \in [0;\ 2\pi],\ f'(t) = 1 - \sin(t)$. Nous avons donc $\forall t \in [0;\ 2\pi],\ f'(t) \geq 0$ et f' ne s'annule qu'une fois en $\frac{pi}{2}$. Insi f est strictement croissante et continue sur $[0;\ 2\pi]$ donc induit une bijection sur son image qui est $[f(0);\ f(2\pi)] = [2;\ 2\pi + 1]$.

   De plus $\forall t \in]0;\ \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2};\ 2\pi[, f'(t) \neq 0$ donc par propriété f^{-1} est dérivable sur $[2;\ \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2};\ 2\pi + 1]$ puisque $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$.
4. Cf TD.
5. Par récurrence double, comme dans la fiche méthode.
6. (a) Puisque $0 \leq k \leq n$, nous avons : $\forall k \in [\![0;\ n]\!] \binom{n}{k} \geq 1$ puisqu'il s'agit d'un entier naturel non nul. Ainsi : $\forall k \in [\![0;\ n]\!] \dfrac{1}{\binom{n}{k}} \leq 1$. En sommant on en déduit $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}} \leq n+1.}$

   (b) On procède par récurence forte. L'initialisation est évidente. Pour ce qui est de l'hérédité si pour un certain $n \in \mathbb{N}$ nous avons : $\forall k \in [\![0;\ n]\!], a_k \leq k!$ alors $a_k \leq k!$ et $a_{n-k} \leq (n-k)!$. Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} \leq \sum_{k=0}^{n} k!(n-k)!$. Or, par hypothèse : $a_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$ et par ailleurs $\forall k \in [\![0;\ n]\!], \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.
   Ainsi : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k!(n-k)! = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}$. Par conséquent : $a_{n+1} \leq n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}$. Or, d'après la question précédente : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}} \leq n+1$.
   On en déduit $a_{n+1} \leq (n+1)n!$ c'est à dire $a_{n+1} \leq (n+1)!$ ce qui prouve l'érédité.
   Par récurrence forte, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq n!$.

Correction de l'exercice 2:

1. On note f la fonction d'expression $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et g la fonction d'expression : $g(x) = \dfrac{1}{2}\text{Arcos}\left(\dfrac{x-2}{x}\right)$.

   (a) Puisque $\arcsin$ est définie sur $[-1;\ 1]$ et la fonction racine est définie et non nul sur $\mathbb{R}_+^*$, il nous faut déterminer les valeurs de $x \in \mathbb{R}_+^*$ pour lesquelles : $-1 \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}} \leq 1$. Comme $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} \geq 0$, ceci est équivalent à $\dfrac{1}{\sqrt{x}} \leq 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} \leq 1 \Leftrightarrow x \geq 1$. Le domaine de définition de f est donc : $[1;\ +\infty[$.

   De même, Arcos est définie sur $[-1;\ 1]$, il nous faut donc déterminer $x \neq 0$ tel que : $-1 \leq \dfrac{x-2}{x} \leq 1$. Or $-1 \leq \dfrac{x-2}{x} \Leftrightarrow \dfrac{2(x-1)}{x} \geq 0$ et $\dfrac{x-1}{x} \leq 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$. Par conséquent $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ -1 \leq \dfrac{x-2}{x} \leq 1 \Leftrightarrow x \geq 1$. Nous avons donc $\boxed{D = [1;\ +\infty[.}$

   (b) Puisque $\forall y \in [-1;\ 1], \sin(\arcsin(x)) = x$ on en déduit : $\forall x \in D,\ \sin^2(f(x)) = \dfrac{1}{x}$.

   De même puisque $\forall y \in \mathbb{R},\ \sin^2(y) = \dfrac{1-\cos(2y)}{2}$ nous en déduisons :

$$\forall x \in D,\ \sin^2(g(x)) = \frac{1-\cos\left(\text{Arcos}\left(\frac{x-2}{x}\right)\right)}{2} = \frac{1-\frac{x-2}{x}}{2} = \frac{1}{x}.$$

Ainsi : $\boxed{\forall x \in D,\ \sin^2(f(x)) = \sin^2(g(x)).}$ Par ailleurs, $\forall x \in D,\ \frac{1}{\sqrt{x}} \in [0;\ 1]$ donc $\forall x \in D, f(x) \in \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ ce qui assure que $\sin(f(x)) \geq 0$.

De même , $\forall x \in D, \text{Arcos}\left(\frac{x-2}{x}\right) \in [0;\ \pi]$ donc $\forall x \in D,\ g(x) \in \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$. Ainsi : $\forall x \in D, \sin(g(x)) \geq 0$.

Par stricte croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}^+$ on en déduit : $\forall x \in D,\ \sin(f(x)) = \sin(g(x))$. En fin par bijectivité, donc injectivite de $\sin$ sur $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ on en déduit : $\boxed{\forall x \in D,\ f(x) = g(x).}$

(c) Comme la fonction Arcos est dérivable sur $]-1;\ 1[$ le domaine de dérivabilité de f correspond à l'ensemble des $x \neq 0$ tels que : $-1 < \frac{x-2}{x} < 1$ c'est à dire $x > 1$ d'après les calculs précédents. On en déduit que g est dérivable sur $]1;\ +\infty[$ et par dérivation de la composition de fonction : $\forall x \in]1;\ +\infty[,\ g'(x) = -\frac{1}{2}\frac{x-(x-2)}{x^2}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-2}{x}\right)^2}}$.

Or, $\forall x \in]1;\ +\infty[, \sqrt{1-\left(\frac{x-2}{x}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^2-(x^2-4x+4)}{x^2}} = \frac{2}{x}\sqrt{x-1}$. Par conséquent : $\boxed{\forall x \in]1;\ +\infty[,\ g'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{1-x}}.}$

De même, comme arcsin est dérivable sur $]-1;\ 1[$, f est dérivable sur $]1;\ +\infty[$ et $\forall x \in]1;\ +\infty[,\ f'(x) = \frac{-1}{2x\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}} = -\frac{1}{2x\sqrt{1-x}}$.

On constate donc que $\forall x \in]1;\ +\infty[,\ f'(x) = g'(x)$ donc f et g diffèrent d'une constante sur cet ensemble. Il existe $C \in \mathbb{R}$, tel que $\forall x \in]1;\ +\infty[,\ f(x) = g(x) + C$. En particulier $f(4) = g(4) + C$. Or, $f(4) = \arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$ et $g(4) = \frac{1}{2}\text{Arcos}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$. On en déduit $C = 0$ donc :

$\forall x \in]1,;\ +\infty[,\ f(x) = g(x)$. Par ailleurs $f(1) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$ et $g(1) = \frac{1}{2}\text{Arcos}(-1) = \frac{1}{2} \times \pi = \frac{\pi}{2}$ ce qui prouve au final d'une autre façon que : $\boxed{\forall x \in D, f(x) = g(x).}$

2. On considère l'intégrale : $\int_2^{1/\sin^2(x)} \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\ dt$. On veut faire une intégration par parties. Posons $u(t) = t$ et $v(t) = f(t)$. Les fonctions u et v sont bien de classe C^1 sur l'intervalle en question et $\forall t \in]1;\ +\infty[,\ u'(t) = 1,\ v'(t) = -\frac{1}{2x\sqrt{1-x}}$. Par intégration par parties :

$\int_2^{1/\sin^2(x)} \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\ dt = \left[t\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\right]_2^{1/\sin^2(x)} + \frac{1}{2}\int_2^{1/\sin^2(x)} \frac{dt}{\sqrt{t-1}}$. Or si l'on pose $w(t) = t-1$, on constate que : $\int_2^{1/\sin^2(x)} \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = \int_2^{1/\sin^2(x)} \frac{w'(t)\ dt}{\sqrt{w(t)}}$.

Par primitives de formes usuelles on en déduit que : $\int_2^{1/\sin^2(x)} \frac{dt}{\sqrt{t-1}} = 2[\sqrt{t-1}]_2^{1/\sin^2(x)} = \sqrt{\frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)}} = 2\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{2}{\tan(x)}$ car $0 < x < \frac{\pi}{2}$ donc $\cos(x) > 0$ et $\sin(x) > 0$.

On en déduit au final :

$$\boxed{\int_2^{1/\sin^2(x)} \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\ dt = \frac{x}{\sin^2(x)} - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\tan(x)} - 1.}$$

3. On considère l'intégrale $\int_2^{1/\sin^2(x)} \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\ dt$ dans laquelle on fait le chan-

gement de variable : $t = \dfrac{1}{\sin^2(u)}$. Si $t_0 = 2$, $u_0 = \dfrac{\pi}{4}$ convient et si $t_1 = 1/\sin^2(x)$, $u_1 = x$ convient. On définit donc une application $\varphi : u \mapsto \dfrac{1}{\sin^2(u)}$ de classe C^1 sur l'intervalle I considéré et telle que $\forall u \in I,\ \varphi'(u) = -2\dfrac{\cos(u)}{\sin^3(u)}$. Par changement de variable :
$\displaystyle\int_2^{1/\sin^2(x)} \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\ dt = \int_1^x u\varphi'(u)\ du$. Or par intégration par parties : $\displaystyle\int_{\pi/4}^x u\varphi'(u)\,du = [u\varphi(u)]_{\pi/4}^x - \int_{\pi/4}^x \varphi(u)\,dx$. Au final :

$$\boxed{\int_2^{1/\sin^2(x)} \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\,dt = \frac{x}{\sin^2(x)} - \frac{\pi}{2} - \int_{\pi/4}^x \frac{dt}{\sin^2(t)}.}$$

4. On déduit des questions précédentes l'égalité : $\dfrac{x}{\sin^2(x)} - \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{\tan(x)} - 1 = \dfrac{x}{\sin^2(x)} - \dfrac{\pi}{2} - \displaystyle\int_{\pi/4}^x \frac{dt}{\sin^2(t)}$ ce qui donne :

$$\boxed{\int_{\pi/4}^x \frac{dt}{\sin^2(t)} = 1 - \frac{1}{\tan(x)}.}$$

Correction du problème :

PARTIE I : Questions préliminaires.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère l'intégrale : $\displaystyle\int_{2\pi}^{2\pi+a} f(t)\ dt$. Posons $u = t - 2\pi$. Alors pour $t_0 = 2\pi$ nous obtenons $u_0 = 0$ et pour $t_1 = 2\pi + a$ nous avons $u_1 = a$; Ceci définit alors une fonction $\varphi : u \mapsto u + 2\pi$ de classe C^1 sur $[0;\ a]$ et telle que : $\forall u \in [0;\ a],\ \varphi'(u) = 1$. Par changement de variable :
$$\boxed{\int_{2\pi}^{2\pi+a} f(t)\ dt = \int_0^a f(u)\ du.}$$
Nous avons : $\displaystyle\int_a^{2\pi+a} f(t)\ dt = \int_a^0 f(t)\ dt + \int_0^{2\pi} f(t)\ dt + \int_{2\pi}^{2\pi+a} f(t)\ dt$. Or, $\displaystyle\int_{2\pi}^{2\pi+a} f(t)\ dt = \int_0^a f(t)\ dt$ d'aprs la question précédente et $\displaystyle\int_a^0 f(t)\ dt = -\int_0^a f(t)\ dt$. Donc : $\boxed{\displaystyle\int_a^{2\pi+a} f(t)\ dt = \int_0^{2\pi} f(t)\ dt.}$

2. Nous partons de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\ dt$ dans laquelle nous effectuons le changement de variable : $u = -t$. Alors pour $t_0 = 0$ nous obtenons $u_0 = 0$ et pour $t_1 = \pi$ nous avons $u_1 = -\pi$; Ceci définit alors une fonction $\varphi : u \mapsto -u$ de classe C^1 sur $[-\pi;\ 0]$ et telle que : $\forall u \in [-\pi;\ 0],\ \varphi'(u) = -1$. Par changement de variable :
$$\boxed{\int_0^{\pi} f(t)\ dt = -\int_0^{-\pi} f(u)\ du = \int_{-\pi}^0 f(u)\ du}$$
Ainsi, en utilisant la question précédente avec $a = -\pi$: $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\ dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ dt$.
Par ailleurs : $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ dt = \int_{-\pi}^0 f(t)\ dt + \int_0^{\pi} f(t)\ dt = 2\int_0^{\pi} f(t)\ dt$. Au final, nous avons prouvé : $\boxed{\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\ dt = 2\int_0^{\pi} f(t)\ dt.}$

3. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On note $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\ dt$. D'après le théorème fondamental du calcul intégral, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc continue sur $\mathbb{R}$. Par conséquent : $\forall a \in \mathbb{R}, \lim\limits_{x\to a} F(x) = F(a)$ ce qui s'écrit :
$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R},\ \lim_{x\to a} F(x) = \int_0^a f(t)\ dt.}$$

PARTIE II : Deux calculs d'intégrales.

Pour $r \in [0;\ 1[\cup]1;\ +\infty[$, on considère les intégrales suivantes :

$$A(r) = \int_0^{2\pi} \frac{r-\cos(t)}{r^2-2r\cos(t)+1}\,dt, \quad B(r) = \int_0^{2\pi} \frac{\sin(t)}{r^2-2r\cos(t)+1}\,dt.$$

1. Soit $r \in [0;\ 1[\cup]1;\ +\infty[$. On considère l'application : $t \mapsto \dfrac{1}{r^2-2r\cos(t)+1}$ définie sur $[0;\ 2\pi]$. On constate que le dénominateur ne s'annule pas. En effet ce dernier a pour discriminant : $\Delta = -4\sin^2(t)$, ce qui est toujours strictement négatif sauf pour $t=0,\pi$ ou 2π. Or si $t=0$ ou $t=2\pi$, alors l'expression s'annule en 1 ce qui est impossible puisque $r \neq 1$ par hypothèse. De même, si $t=\pi$, alors l'expression s'annule en -1 ce qui est impossible car $r \neq -1$ par hypothèse.

   Au final, l'application ne s'annulant pas sur $[0;\ 2\pi]$, elle est continue sur $[0;\ 2\pi]$ et il en est de même des deux applications $t \mapsto \dfrac{r-\cos(t)}{r^2-2r\cos(t)+1}$ ainsi que $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{r^2-2r\cos(t)+1}\,dt$. Ces deux dernières applications étant continues sur $[0;\ 2\pi]$, nécessairement $A(r)$ et $B(r)$ sont définies pour tout $r \in [0;\ 1[\cup]1;\ +\infty[$.

   Si l'on pose : $u(t) = r^2-2r\cos(t)+1$ on constate que $u'(t) = 2r\sin(t)$ donc :

   - Si $r \neq 0$, alors $B(r) = \dfrac{1}{2r}\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{u'(t)}{u(t)}\,dt = \frac{1}{2r}[\ln(u(t))]_0^{2\pi}$. Comme $u(0)=u(2\pi)$, on en déduit $B(r)=0$.
   - Si $r=0$, alors $B(r) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(t) = [-\cos(t)]_0^{2\pi} = 0$.

   Au final : $\boxed{\forall r \in [0;\ 1[\cup]1;\ +\infty[,\ B(r)=0.}$

2. Puisque : $t \mapsto \dfrac{r-\cos(t)}{r^2-2r\cos(t)+1}$ est 2π-périodique, d'après la question 2 de la partie précédente, on en déduit : $\boxed{A(r) = 2\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{r-\cos(t)}{r^2-2r\cos(t)+1}\,dt.}$

3. On considère un réel $a \in]0;\ \pi[$ et on pose : $I_a(r) = \displaystyle\int_0^a \frac{r-\cos(t)}{r^2-2r\cos(t)+1}\,dt$.

   (a) On considère l'intégrale : $\displaystyle\int_0^a \frac{r-\cos(t)}{r^2-2r\cos(t)+1}\,dt$ dans laquelle on réalise le changement de variable : $u = \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$. Alors pour $t_0 = 0$ nous avons $u_0 = 0$ et pour $t_1 = a$ nous avons $u_1 = \tan(a/2)$. Ceci définit donc une application $\varphi : u \mapsto 2\arctan(u)$ de classe C^1 sur $[0;\ \tan(a/2)]$ et tel que : $\forall u \in [0;\ \tan(a/2)]$, $\varphi'(u) = \dfrac{2}{1+u^2}$. Par changement de variable, et car $\cos(t) = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$ nous en déduisons :

   $$\begin{aligned}\boxed{I_a(r)} &= 2\int_0^{\tan(a/2)} \frac{r(1+u^2)-1+u^2}{r^2(1+u^2)-2r(1-u^2)+1+u^2}\frac{1}{1+u^2}\,du \\ &= 2\int_0^{\tan(a/2)} \frac{(r+1)u^2+(r-1)}{u^2(r+1)^2+(r-1)^2}\frac{1}{1+u^2}\,du \\ &\boxed{= \frac{2}{r+1}\int_0^{\tan(a/2)} \frac{u^2+\alpha}{(u^2+\alpha^2)(1+u^2)}\,du,}\end{aligned}$$

   avec $\boxed{\alpha = \dfrac{r-1}{r+1}.}$ (a est bien défini car $r+1 \neq 0$).

   (b) $\forall u \in \mathbb{R}$, $\boxed{\dfrac{u^2+\alpha}{(u^2+\alpha^2)(u^2+1)} = \dfrac{A}{u^2+\alpha^2} + \dfrac{B}{u^2+1},}$ avec $\boxed{B = \dfrac{1}{\alpha+1}}$ et $\boxed{A = \dfrac{\alpha}{\alpha+1}.}$

   (c) Par linéarité, $I_a(r) = \dfrac{2}{(r+1)(\alpha+1)}\left(\arctan(\tan(a/2)) + \arctan\left(\dfrac{\tan(a/2)}{\alpha}\right)\right) = \dfrac{2}{(r+1)(\alpha+1)}\left(\dfrac{a}{2} + \arctan\left(\dfrac{\tan(a/2)}{\alpha}\right)\right)$. Comme $\alpha = \dfrac{r-1}{r+1}$ nous avons $\alpha+1 = \dfrac{2r}{r+1}$ d'où au final :

$$\boxed{I_a(r) = \frac{1}{r}\left(\text{Arctan}\left(\frac{\tan(a/2)}{\alpha}\right) + \frac{a}{2}\right).}$$

(d) • Si $\alpha < 0$, alors $\lim\limits_{a\to\pi^-} \dfrac{\tan(a/2)}{\alpha} = -\infty$ donc $\lim\limits_{a\to\pi^-} \text{Arctan}\left(\dfrac{\tan(a/2)}{\alpha}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$ donc par somme $\boxed{\lim\limits_{a\to\pi^-} I_a(r) = 0.}$

• Si $\alpha > 0$, alors $\lim\limits_{a\to\pi^-} \dfrac{\tan(a/2)}{\alpha} = +\infty$ donc $\lim\limits_{a\to\pi^-} \text{Arctan}\left(\dfrac{\tan(a/2)}{\alpha}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ donc par somme $\boxed{\lim\limits_{a\to\pi^-} I_a(r) = \dfrac{\pi}{r}.}$

(e) D'une part que : $\alpha < 0 \Leftrightarrow r < 1 \Leftrightarrow r \in [0;\ 1[$ car $r \in [0;\ 1[\cup]1;\ +\infty[$ par hypothèse.

D'autre part $\lim\limits_{a\to\pi^-} \displaystyle\int_0^a \frac{r-\cos(t)}{r^2-2r\cos(t)+1}\,dt = \int_0^\pi \frac{r-\cos(t)}{r^2-2r\cos(t)+1}\,dt$ par continuité de l'application $t \mapsto \dfrac{r-\cos(t)}{r^2-2r\cos(t)+1}$ sur $\mathbb{R}$ et d'après la question 3 de la partie précédente.

Or, $A(r) = 2\displaystyle\int_0^\pi \frac{r-\cos(t)}{r^2-2r\cos(t)+1}\,dt$ d'après précédemment donc d'après la question précédente : $\boxed{A(r) = 0 \text{ si } r \in]0;\ 1[\text{ et } A(r) = \dfrac{2\pi}{r} \text{ si } r > 1.}$

PARTIE III : Indice d'un point par rapport à un lacet.

Soient $\gamma : t \mapsto x(t) + iy(t)$ une application définie sur $[0;\ 1]$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, de classe C^1 et telle que $\gamma(0) = \gamma(1)$. On note de plus $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma([0;\ 1])$. On appelle indice d'un point par rapport à un lacet, et on note : $\text{Ind}_\gamma(z)$ l'intégrale :

$$\text{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}\,dt.$$

1. Puisque γ est de classe C^1, γ' est continue sur $[0;\ 1]$. De même $t \mapsto \gamma(t) - z$ est continue car γ est dérivable donc continue. Par ailleurs, $\forall t \in [0;\ 1], \gamma(t) \neq z$. En effet sinon il existe $t_0 \in [0;\ 1]\ /\ \gamma(t0) = z$. Absurde car $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma - [0;\ 1]$. Par quotient de fonctions continues dont le dénomiunateur ne s'annule pas on en déduit que : $t \mapsto \dfrac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}$est continue sur $[0;\ 1]$ donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}\,dt$ est défini ce qui justifie l'existence de $\text{Ind}_\gamma(z)$.
2. On pose dans cette question uniquement : $\gamma(t) = e^{2i\pi t}$ et $z = \rho e^{i\varphi}$ tel que $\rho \neq 1$ et $\varphi \in [0;\ 2\pi]$.

   (a) γ est bien de classe C^1 sur $[0;\ 1]$ et $\gamma(0) = \gamma(1) = 1$. D'autre part comme $\forall t \in [0;\ 1]$, $|\gamma(t)| = 1$ et $|z| \neq 1$ car $|z| = \rho$ et $\rho \neq 1$. Nécessairement $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma([0;\ 1])$. Les hypothèses sont donc bien vérifiées.

   Puisque $\forall t \in [0;\ 1];\ \gamma'(t) = 2i\pi\gamma(t)$, nous avons : $\boxed{\text{Ind}_\gamma(0)} = \displaystyle\int_0^1 1\,dt \boxed{= 1.}$

   (b) Par définition : $\text{Ind}_\gamma(z) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{2i\pi t}\,dt}{e^{2i\pi t} - e^{i\varphi}/r} = r\int_0^1 \frac{e^{2i\pi t}\,dt}{re^{2i\pi t} - e^{i\varphi}} = r\int_0^1 \frac{dt}{r - e^{i(-2\pi t+\varphi)}}$.
   Posons $u = -2\pi t + \varphi$, alors par changement de variable nous obtenons : $\text{Ind}_\gamma(z) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\varphi-2\pi}^{\varphi} \frac{du}{r-e^{iu}}$. En posant $a = \varphi - 2\pi$ et d'après la question 2 de la partie 1, nous avons alors : $\displaystyle\int_{\varphi-2\pi}^{\varphi} \frac{du}{r-e^{iu}} = \int_0^{2\pi} \frac{du}{r-e^{iu}}$. Au final, nous en déduisons :

   $$\boxed{\text{Ind}_\gamma(z) = \frac{r}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{du}{r-e^{iu}}.}$$

   (c) Comme $\dfrac{1}{r-e^{iu}} = \dfrac{r-e^{-iu}}{(r-e^{iu})(r-e^{-iu})} = \dfrac{r-e^{-iu}}{r^2-2r\cos(u)+1}$ nous en déduisons : $\dfrac{1}{r-e^{iu}} = \dfrac{r-\cos(u)}{r^2-2r\cos(u)+r^2} - i\dfrac{\sin(u)}{r^2-2r\cos(u)+r^2}$. Par linéarité (ou définition de l'intégrale d'une fonction à valeurs complexes!) on en déduit : $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \dfrac{r}{2\pi}(A(r) - iB(r))$. Or $B(r) = 0$, $A(r) = 0$ si $r \in [0 ;\ 1[$ et $A(r) = 1$ si $r > 1$. Comme $|z| = \dfrac{1}{r}$, au final :

- Si $|z| > 1$, $\boxed{\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0.}$
- Si $|z| < 1$, $\boxed{\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 1.}$

3. (a) D'après le théorème fondamental du calcul intégral et par composition, F est dérivable sur $[0;\ 1]$ et $\forall x \in [0;\ 1],\ F'(x) = \dfrac{\gamma'(x)}{\gamma(x) - z}F(x)$. Par quotient, G est dérivable sur $[0;\ 1]$ et $\forall x \in [0;\ 1]$, $G'(x) = \dfrac{F'(x)(\gamma(x) - z) - F(x)\gamma'(x)}{(\gamma(x) - z)^2}$. Or comme $\forall x \in [0;\ 1]$, $F'(x) = \dfrac{\gamma'(x)}{\gamma(x) - z}F(x)$, on constate que le numérateur est nul. On en déduit : $\forall x \in [0;\ 1]$, $G'(x) = 0$.

   (b) D'après la question précédente G est constante. En particulier, $G(0) = G(1)$. Or $\gamma(0) = \gamma(1)$ donc nécessairement $F(0) = F(1)$. De plus, $F(0) = \exp(0) = 1$. On en déduit $F(1) = 1$ ce qui s'écrit $\boxed{\exp(2i\pi \mathrm{Ind}_\gamma(z)) = 1.}$ Enfin : $\forall z \in \mathbb{C}, \exp(z) = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}\ /z = 2i\pi k$. Par conséquent : $\exists k \in \mathbb{Z}\ /2i\pi \mathrm{Ind}_\gamma(z) = 2ik\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}\ /\mathrm{Ind}_\gamma(z) = k$. Comme $k \in \mathbb{Z}$ cela prouve au final que : $\boxed{\mathrm{Ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}.}$

⋆ ⋆ ⋆

FIN

⋆ ⋆ ⋆