Devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 2.

Durée : 4 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Dans cette épreuve, les candidats sont invités à illustrer, s'ils le jugent nécessaire, leurs réponses avec un dessin.

Exercice 1
- Questions de « cours »-

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Résoudre les équations suivantes : (a) $e^{2z}-(1+i)e^z+2+2i=0$; (b) $(z+1)^{17}=(z-1)^{17}$.
2. Résoudre algébriquement et géométriquement : $|z+1+i|=|z-i|$.
3. Résoudre les équations différentielles suivantes : (a) $y'+3y=1$; (b) $y''-y=e^x+\cos(x)$; (c) $y''+y=\cos(x)$; (d) $y''+y'+y=0$.
4. On considère $n\in\mathbb{N}^*$ et (a_n) une suite de nombre réels tels que : $a_0=1$ et $\forall k\in[\![0;\ n-1]\!],\ a_{k+1}=\dfrac{(k-n)a_k}{k+1}$.
   (a) Soit $p\in[\![1;\ n]\!]$. Exprimer $\displaystyle\prod_{k=0}^{p-1}\frac{n-k}{k+1}$ avec des factorielles. En déduire une expression simple de a_p pour tout $p\in[\![0;\ n]\!]$.
   (b) Donner une expression simple de $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}a_px^p$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Exercice 2
- Sommes de Gauss -

On note $w=e^{2i\pi/n}$ avec n un entier naturel impair et on pose : $S=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}w^{k^2}$.

1. **Questions préliminaires.** On dit qu'une fonction : $f:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$ est n-périodique lorsque $\forall p\in\mathbb{N}, f(p+n)=f(p)$.
   (a) Montrer que $g_1:\left\{\begin{array}{l}\mathbb{N}\to\mathbb{C}\\ p\mapsto w^p\end{array}\right.$ et $g_2:\left\{\begin{array}{l}\mathbb{N}\to\mathbb{C}\\ p\mapsto w^{-p^2}\end{array}\right.$ sont n-périodiques.
   (b) Montrer qu'un produit de fonctions n-périodiques est n-périodique.
   (c) Montrer que si f est n-périodique, alors : $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{p=n}^{n+k-1}f(p)=\sum_{p=0}^{k-1}f(p)$.
   (d) En déduire : $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{p=k}^{n+k-1}f(p)=\sum_{p=0}^{n-1}f(p)$.
2. On note $T=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{p=0}^{n-1}w^{k^2}\overline{w^{p^2}}$.
   (a) Montrer que $T=|S|^2$ et $T=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{p=k}^{n+k-1}w^{-p^2+2pk}$.
   (b) Soit $p\in\mathbb{N}^*$ tel que $p\leq n-1$. Donnez la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}w^{2pk}$.
   (c) Pourquoi $f:p\mapsto w^{-p^2+2pk}$ est-elle n-périodique ?
   (d) Déduire des questions précédentes que $|S|=\sqrt{n}$.

Exercice 3
- Triangles inscrits dans le cercle unité -

On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| = 1\}$. On considère trois nombres complexes a, b et c deux à deux distincts tels que $(a, b, c) \in \mathbb{U}^3$. On note A,B et C les trois points du plan associés aux nombres complexes respectifs a, b et c. Les trois points du plan définissent donc un triangle ABC d'aire notée $\mathcal{A}$.

1. **Questions préliminaires.**
   (a) Montrer que $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$.
   (b) Montrer que si $z_0 \in \mathbb{U}$ alors $\overline{z_0} = \frac{1}{z_0}$.
   (c) Justifier l'existence de $\alpha \in [0;\ 2\pi]$, $\beta \in [0;\ 2\pi]$ et $\gamma \in [0;\ 2\pi]$ tels que : $\frac{b}{a} = e^{i\alpha}$, $\frac{c}{b} = e^{i\beta}$, $\frac{a}{c} = e^{i\gamma}$ et montrer que $\alpha + \beta + \gamma \equiv 0\ [2\pi]$.
   (d) Étudier la fonction g telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \sin(x) + 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)$.
   (e) On pose : $h(x) = \sin(\alpha) + \sin(x) - \sin(\alpha + x)$. Simplifier $h\left(\pi - \frac{\alpha}{2}\right)$.
   (f) Déduire des questions précédentes que $\forall x \in [0;\ 2\pi],\ -\frac{3\sqrt{3}}{2} \leq \sin(\alpha) + \sin(x) - \sin(\alpha + x) \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$.
2. On suppose dans cette question que $a = 1$, $b = j$ et $c = j^2$, avec $j = e^{2i\pi/3}$. Déterminer la valeur de $\mathcal{A}$.
3. On suppose dans cette question que ABC est rectangle en C.
   (a) Justifier l'égalité : $\overline{\left(\frac{a-c}{b-c}\right)} = -\frac{a-c}{b-c}$. En déduire $a + b = 0$ puis que $[AB]$ est un diamètre du cercle unité.
   (b) On pose : $x = |a - c|$. Justifier que $0 \leq x \leq 2$ et $\mathcal{A} = \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}$.
   (c) En déduire que $\mathcal{A} \leq 1$ et que $\mathcal{A} = 1$ si et seulement si le triangle est rectangle isocèle en C. Comparez 1 avec la valeur obtenue en 2.
4. On suppose dans cette question ABC quelconque. On note Δ la droite perpendiculaire à (AC) passant par B et H le point d'intersection de Δ avec (AC). On note également h l'affixe du point H.
   (a) Justifiez les égalités suivantes : (1) $\overline{\left(\frac{h-c}{a-c}\right)} = \frac{h-c}{a-c}$; (2) $\overline{\left(\frac{h-b}{c-a}\right)} = -\frac{h-b}{c-a}$.
   (b) En déduire que :
$$h - ac\overline{h} = b - \frac{ac}{b} \tag{1}$$
$$h + ac\overline{h} = c + a \tag{2}$$
   puis la valeur de h.
   (c) Montrez que $\mathcal{A} = \frac{1}{4}\left|1 - \frac{b}{a}\right|\left|1 - \frac{c}{b}\right|\left|1 - \frac{a}{c}\right|$.
   (d) En déduire que $\mathcal{A} = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)$.
   (e) Linéarisez $\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{y}{2}\right)\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)$.
   (f) En déduire $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left|\sin(\alpha) + \sin(\beta) - \sin(\alpha + \beta)\right|$ puis la valeur maximale de $\mathcal{A}$.
   (g) On suppose que a,b et c sont tels que la valeur maximale de $\mathcal{A}$ est atteinte. Montrer que : $a + b + c = 0$.
   (h) Étudier la réciproque.

⋆⋆⋆
FIN
⋆⋆⋆

Correction de l'exercice 1:

1. (a) On pose $Z = e^z$ pour se ramener au trinôme $Z^2 - (1+i)Z + 2 + 2i$ de discriminant : $\Delta = -8 - 6i$. On cherche alors $w = x + iy$ tel que $w^2 = \Delta$, ce qui, puisque $|w|^2 = |\Delta|$, mène aux relations : $\left\{\begin{array}{l} x^2 - y^2 = -8 \\ x^2 + y^2 = 10 \\ xy = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ y^2 = 9 \\ xy = -3 \end{array}\right.$.
On en déduit, puisque $xy < 0$ que $w = 1 - 3i$ est solution de l'équation précédente ce qui donne $1 - i$ et $2i$ pour solutions du trinôme. Il ne nous reste plus qu'à résoudre : $e^z = 1 - i \Leftrightarrow e^z = \sqrt{2}e^{-i\pi/4} \Leftrightarrow z = \frac{1}{2}\ln(2) + i(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ et $e^z = 2i \Leftrightarrow e^z = 2e^{i\pi/2} \Leftrightarrow z = \ln(2) + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Au final : $\boxed{S = \{\frac{1}{2}\ln(2) + i(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi);\ \ln(2) + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi);\ k \in \mathbb{Z}\}.}$

(b) 1 n'est pas solution de l'équation donc l'équation est équivalente à : $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{17} = 1$. Posons $Z = \frac{z+1}{z-1}$. Alors z est racine 17-ème de l'unité donc $\exists k \in [\![1;\ 16]\!]$ tel que : $z = e^{2ik\pi/17}$ ($k \neq 0$ puisque $z \neq 1$). Par conséquent : $\frac{z+1}{z-1} = e^{2ik\pi/17} \Leftrightarrow z(1 - e^{2ik\pi/17}) = -(1 + e^{2ik\pi/17}) \Leftrightarrow z = \frac{-(1 + e^{2ik\pi/17})}{1 - e^{2ik\pi/17}}$.
Il ne nous reste plus qu'à effectuer les factorisations par l'angle moitié pour obtenir : $z = -i\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{17}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{17}\right)}$. Au final : $\boxed{S = \left\{-i\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{17}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{17}\right)};\ k \in [\![1;\ 16]\!]\right\}.}$

2. Algébriquement, en élevant au carré et en posant $z = x + iy$ avec $(x;\ y) \in \mathbb{R}^2$ nous avons : $(x+1)^2 + (y+1)^2 = x^2 + (y-1)^2 \Leftrightarrow 2x + 4y = -1 \rightarrow x = -\frac{1}{2} - 2y$. Nous avons donc z de la forme : $z = -\frac{1}{2} - 2y + iy$ avec $y \in \mathbb{R}$ quelconque.

Géométriquement, en posant $M(z)$, $A(-1-i)$ et $B(i)$ l'équation devient : $AM = BM \Leftrightarrow M \in \Delta$ où Δ est la médiatrice de $[AB]$.

3. (a) $\boxed{S = \{x \mapsto Ce^{-3x} + \frac{1}{3};\ C \in \mathbb{R}\}.}$

(b) $\boxed{S = \{x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-x} + \frac{1}{2}xe^x - \frac{1}{2}\cos(x);\ (\lambda;\ \mu) \in \mathbb{R}^2\}.}$

(c) $\boxed{S = \{x \mapsto \lambda\cos(x) + \mu\sin(x) + \frac{1}{2}x\sin(x);\ (\lambda;\ \mu) \in \mathbb{R}^2\}.}$

(d) $\boxed{S = \left\{x \mapsto \left(\lambda\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \mu\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)e^{-\frac{1}{2}x};\ (\lambda;\ \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.}$

4. (a) $\prod_{k=0}^{p-1}\frac{n-k}{k+1} = \frac{\prod_{k=0}^{p-1}(n-k)}{\prod_{k=0}^{p-1}(k+1)}$. Or, par glissement d'indice : $\prod_{k=0}^{p-1}(k+1) = \prod_{k=1}^{p}k = p!$

et par Chasles $\prod_{k=0}^{p-1}(n-k) = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(n-k)}{\prod_{k=p}^{n-1}(n-k)}$. Il ne reste plus qu'à remarquer que :

$\prod_{k=0}^{n-1}(n-k) = \prod_{k=1}^{n}k$ et $\prod_{k=p}^{n-1}(n-k) = \prod_{k=1}^{n-p}k$ (par exemple en posant $k' = n - k$)

pour en déduire : $\boxed{\prod_{k=0}^{p-1}\frac{n-k}{k+1} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}.}$

D'après la relation, on constate que $\forall k \in [\![0;\ n-1]\!]$, $a_k \neq 0$. En divisant par a_k nous obtenons donc : $\forall k \in [\![0;\ p-1]\!]$, $\frac{a_{k+1}}{a_k} = -\frac{(n-k)}{k+1}$. Par conséquent : $\prod_{k=0}^{p-1}\frac{a_{k+1}}{a_k} = \prod_{k=0}^{p-1}(-\frac{(n-k)}{k+1}) = \prod_{k=0}^{p-1}(-1)\prod_{k=0}^{p-1}\frac{(n-k)}{k+1} = (-1)^p\prod_{k=0}^{p-1}\frac{(n-k)}{k+1}$. Or, par télescopage :
$\prod_{k=0}^{p-1}\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_p}{a_0} = a_p$ et d'après ci-dessus : $\prod_{k=0}^{p-1}\frac{n-k}{k+1} = \binom{n}{p}$. Ainsi : pour

tout $p \in [\![0;\ n]\!]$, $\boxed{a_p = (-1)^p \binom{n}{p}.}$

(b) Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} a_p x^p = \sum_{p=0}^{n}(-1)^p \binom{n}{p} x^p = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}(-x)^p$. Par conséquent, en utilisant la formule du binôme de Newton, on en déduit :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{\displaystyle\sum_{p=0}^{n} a_p x^p = (1-x)^n.}$

Correction de l'exercice 2:

1. (a) $\forall p \in \mathbb{N}, g_1(p+n) = w^{p+n} = w^p w^n$. Or w est une racine n-ème de l'unité donc : $w^n = 1$. Ainsi : $g_1(p+n) = g_1(p)$ ce qui prouve que g_1 est n-périodique.

De même : $\forall p \in \mathbb{N}, g_2(p+n) = w^{-p^2} w^{-np} w^{-n^2} = \dfrac{w^{-p^2}}{(w^n)^p (w^n)^n} = w^{-p^2} = g_2(p)$ donc g_2 est n-périodique.

(b) Soient : $h_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ et $h_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ deux fonctions n-périodiques. Posons : $h : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ défini par $h(p) = h_1(p)h_2(p)$. Alors $\forall p \in \mathbb{N}, h(p+n) = h_1(p+n)h_2(p+n)$. Or, h_1 et h_2 sont n-périodiques donc : $\forall p \in \mathbb{N}, h_1(p+n) = h_1(p)$ et $\forall p \in \mathbb{N}, h_2(p+n) = h_2(p)$. Ainsi : $\forall p \in \mathbb{N},\ h(p+n) = h_1(p)h_2(p) = h(p)$ ce qui prouve que h est n-périodique.

(c) Par glissement d'indice, $\displaystyle\sum_{p=n}^{n+k-1} f(p) = \sum_{p=0}^{k-1} f(p+n)$. Or, f est n-périodique donc $\forall p \in \mathbb{N},\ f(p+n) = f(k)$. On en déduit : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{p=n}^{n+k-1} f(p) = \sum_{p=0}^{k-1} f(p).}$

(d) Si $k = n$ le résultat est une conséquence directe de la proposition précédente.

Si $k < n$, par Chasles $\displaystyle\sum_{p=k}^{n+k-1} f(p) = \sum_{p=k}^{n-1} f(p) + \sum_{p=n}^{n+k-1} f(p)$. Or d'après la question précédente, $\displaystyle\sum_{p=n}^{n+k-1} f(p) = \sum_{p=0}^{k-1} f(p)$. Ainsi, $\displaystyle\sum_{p=k}^{n+k-1} f(p) = \sum_{p=k}^{n-1} f(p) + \sum_{p=0}^{k-1} f(p) = \sum_{p=0}^{n-1} f(k)$ par Chasles.

Si $k > n$, par Chasles $\displaystyle\sum_{p=k}^{n+k-1} f(p) = \sum_{p=n}^{n+k-1} f(p) - \sum_{p=n}^{k-1} f(p)$. Or d'après la question précédente, $\displaystyle\sum_{p=n}^{n+k-1} f(p) = \sum_{p=0}^{k-1} f(p)$. Ainsi, $\displaystyle\sum_{p=k}^{n+k-1} f(p) = \sum_{p=n}^{n+k-1} f(p) - \sum_{p=n}^{k-1} f(p) = \sum_{p=k}^{n-1} f(k)$ par Chasles.

Nous avons donc : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{p=k}^{n+k-1} f(k) = \sum_{p=0}^{n-1} f(k).}$

2. (a) D'une part : $T = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} w^{k^2}\left(\sum_{p=0}^{n-1} \overline{w^{p^2}}\right)$. Or $\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} \overline{w^{p^2}} = \overline{\sum_{p=0}^{n-1} w^{p^2}} = \overline{S}$. Ainsi,

$\boxed{T =} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} w^{k^2}\overline{S} = \overline{S}\sum_{k=0}^{n-1} w^{k^2} = \boxed{\overline{S}S = |S|^2.}$

D'autre part, puisque par glissement d'indice, $\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} w^{k^2}\overline{w^{p^2}} = \sum_{p=k}^{n+k-1} w^{k^2}\overline{w^{(p-k)^2}} = \sum_{p=k}^{n+k-1} w^{k^2-p^2+2pk-k^2} = \sum_{p=k}^{n+k-1} w^{-p^2+2pk}$, on en déduit également : $\boxed{T = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=k}^{n+k-1} w^{-p^2+2pk}.}$

(b) On sait que $w^{2p} = 1$ si et seulement si $2p \equiv 0[n]$ soit n divise $2p$. Or $1 < 2p < 2n$ car $1 < p \leq n-1$ par hypothèse. Ainsi, $2p = n$ ce qui est impossible puisque n est impair par hypothèse et $2p$ est impair. Ceci prouve donc que $w^{2p} \neq 1$. Alors, par propriété des sommes de suites en progression géométrique : $\sum_{k=0}^{n-1} w^{2pk} = \sum_{p=0}^{n-1} (w^k)^p = \frac{1-w^{2pn}}{1-w^{2p}}$. Comme $w^{2pn} = (w^n)^{2p} = 1$ on en déduit au final : $\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} w^{2pk} = 0.}$

(c) $\forall p \in \mathbb{N}$, $f(p) = g_1(p)(g_2(p))^2$. Or g_1 et g_2 sont des fonctions n-périodiques et un produit de fonctions n-périodiques est n-périodique. Par conséquent f est n-périodique.

(d) D'après 2a, $|S|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=k}^{n+k-1} f(p)$. Or f est n-périodique donc d'après 1d, $\sum_{p=k}^{n+k-1} f(p) = \sum_{p=0}^{n-1} f(p)$. Ainsi :

$|S|^2 = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{p=0}^{n-1} f(p) = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{p=0}^{n-1} w^{-p^2} w^{2pk}$. Or, la somme étant rectangulaire nous avons également : $|S|^2 = \sum_{p=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} w^{-p^2} w^{2pk} = \sum_{p=0}^{n-1} w^{-p^2} \sum_{k=0}^{n-1} w^{2pk}$. De plus, d'après la question précédente, si $p \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n-1} w^{2pk} = 0$. Ainsi, seul le terme pour $p = 0$ de la somme est non nul ce qui entraîne : $|S|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$;

Au final, $|s|^2 = n$ donc $\boxed{|s| = \sqrt{n}.}$

Correction de l'exercice 3:

1. **Questions préliminaires.**

(a) Cf fiche méthode chapitre trigonométrie.

(b) Si $z_0 \in \mathbb{U}$, alors $|z_0| = 1$ donc $|z_0|^2 = 1$. Ainsi : $z_0\overline{z_0} = 1$ donc $\overline{z_0} = \frac{1}{z_0}$.

(c) Puisque a et b sont des éléments de $\mathbb{U}$, nous avons : $\left|\frac{b}{a}\right| = \frac{|b|}{|a|} = \frac{1}{1}$. La forme exponentielle de ce nombre complexe est donc $e^{i\alpha}$, ce qui justifie l'existence de $\alpha \in [0;\ 2\pi]$ tel que : $\boxed{\frac{b}{a} = e^{i\alpha}.}$ De la même façon, $\boxed{\frac{c}{b} = e^{i\beta},}$ $\boxed{\frac{a}{c} = e^{i\gamma}}$ avec $\beta \in [0;\ 2\pi]$ et $\gamma \in [0;\ 2\pi]$.

Comme : $\frac{b}{a}\frac{c}{b}\frac{a}{c} = 1$, en passant aux arguments nous avons : $\arg\left(\frac{b}{a}\right) + \arg\left(\frac{c}{b}\right) + \arg\left(\frac{a}{c}\right) \equiv 0\ [2\pi]$. Par conséquent : $\boxed{\alpha+\beta+\gamma \equiv 0\ [2\pi].}$

(d) La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$. De plus, elle est 4π-périodique car $g(x+4\pi) = \sin(x+4\pi) + 2\sin(\frac{x}{2}+2\pi) = g(x)$ par 2π-périodicité de $\sin$. De plus g est impaire car $\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$ et $g(-x) = \sin(-x) + 2\sin(-\frac{x}{2}) = -\sin(x) - 2\sin(\frac{x}{2} = -g(x)$ par imparité de $\sin$.

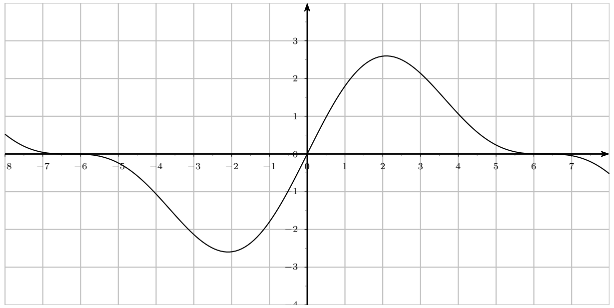
Nous restreignons donc l'étude à $[0;\ 2\pi]$ puis nous complétons le tracé sur $[-2\pi;\ 2\pi]$ par symétrie par rapport à l'origine du repère puis enfin sur $\mathbb{R}$ en translatant le morceau de courbe obtenu sur $[-2\pi;\ 2\pi]$.

Par opérations usuelles, g est dérivable sur $[0;\ 2\pi]$ et $\forall x \in [0;\ 2\pi],\ g'(x) = \cos(x) + \cos\left(\frac{x}{2}\right)$. En utilisant 1a, nous avons donc : $\forall x \in [0;\ 2\pi],\ g'(x) = 2\cos\left(\frac{3x}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{4}\right)$. Par ailleurs $\forall x \in [0;\ 2\pi], \cos\left(\frac{x}{4}\right) \geq 0$. De même, $\forall x \in \left[0;\ \frac{2\pi}{3}\right], \cos\left(\frac{3x}{4}\right) \geq 0$ et $\forall x \in \left[\frac{2\pi}{3};\ 2\pi\right], \cos\left(\frac{3x}{4}\right) \leq 0$

On en déduit au final le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		2π
g	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

puis le tracé de la courbe représentative :



(e) Nous avons : $h\left(\pi - \frac{\alpha}{2}\right) = \sin(\alpha) + \sin\left(\pi - \frac{\alpha}{2}\right) - \sin\left(\pi + \frac{\alpha}{2}\right) = \sin(\alpha) + 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ car pour tout réel u, $\sin(\pi - u) = u$ et $\sin(\pi + u) = -\sin(u)$. On en déduit : $\boxed{h\left(\pi - \frac{\alpha}{2}\right) = g(\alpha).}$

(f) Nous démontrons cette inégalité à l'aide de l'étude de la fonction h.

Par opérations usuelles h est dérivable sur $[0;\ 2\pi]$ et : $\forall x \in [0;\ 2\pi],\ h'(x) = \cos(x) - \cos(\alpha + x)$. Or $\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$ donc : $\forall x \in [0;\ 2\pi],\ h'(x) = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(x + \frac{\alpha}{2}\right)$. Comme $\alpha \in [0;\ 2\pi]$, $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \geq 0$ donc le signe de la dérivée est déterminé par $\sin\left(x + \frac{\alpha}{2}\right)$. Le sinus étant positif sur $[0;\ \pi]$, nous avons : $\forall x \in \left[0;\ \pi - \frac{\alpha}{2}\right],\ \sin\left(x + \frac{\alpha}{2}\right) \geq 0$, $\forall x \in \left[\pi - \frac{\alpha}{2};\ 2\pi - \frac{\alpha}{2}\right],\ \sin\left(x + \frac{\alpha}{2}\right) \leq 0$ et $\forall x \in \left[2\pi - \frac{\alpha}{2};\ 2\pi\right],\ \sin\left(x + \frac{\alpha}{2}\right) \geq 0$ car $2\pi + \frac{\alpha}{2} \leq 3\pi$ puisque $\alpha \in [0; 2\pi]$. On en déduit le tableau de variations :

x	0		$\pi - \frac{\alpha}{2}$		$2\pi - \frac{\alpha}{2}$		2π
h	0	$\nearrow$	$g(\alpha)$	$\searrow$	$g(\alpha - 2\pi)$	$\nearrow$	0

Ainsi, d'après le tableau de variations, et puisque $g(\alpha) \geq 0$ d'après la question précédente : $\forall x \in [0;\ 2\pi], g(\alpha - 2\pi) \leq h(x) \leq g(\alpha)$. De plus $g(\alpha) \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ et $g(\alpha - 2\pi) \geq -\frac{3\sqrt{3}}{2}$ d'après la question précédente, nous en déduisons que :

$$\boxed{\forall x \in [0;\ 2\pi],\ -\frac{3\sqrt{3}}{2} \leq \sin(\alpha) + \sin(x) - \sin(\alpha + x) \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.}$$

2. Nous reconnaissons les racines troisièmes de l'unité donc les trois points associés sont les sommets d'un triangle équilatéral de côté de longueur $|1 - j| = \sqrt{3}$. Une hauteur a donc pour longueur $\sqrt{3 - \frac{3}{4}} = \frac{3}{2}$ d'après le théorème de Pythagore. Une base ayant pour longueur $\sqrt{3}$, nous en déduisons, à l'aide de la formule de l'aire d'un triangle, que : $\boxed{\mathcal{A} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.}$

3. (a) Nous avons : $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) \equiv \arg\left(\frac{a-c}{b-c}\right)[2\pi]$. Or le triangle est rectangle en C donc : $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ ce qui entraîne que : $\frac{a-c}{b-c}$ est imaginaire pur, donc que : $\overline{\left(\frac{a-c}{b-c}\right)} = -\frac{a-c}{b-c}$.

Par propriété de la conjugaison, $\overline{\left(\frac{a-c}{b-c}\right)} = \frac{\overline{a} - \overline{c}}{\overline{b} - \overline{c}}$. Or, d'après les préliminaires, $\overline{a} = \frac{1}{a}$ et de même pour b et c. On en déduit après simplifications :

$\overline{\left(\dfrac{a-c}{b-c}\right)} = \dfrac{c-a}{c-b}\dfrac{b}{a}$. Ainsi :

$\overline{\left(\dfrac{a-c}{b-c}\right)} = -\dfrac{a-c}{b-c} \Leftrightarrow \dfrac{c-a}{c-b}\dfrac{b}{a} = -\dfrac{a-c}{b-c} \Leftrightarrow \dfrac{b}{a} = -1 \Leftrightarrow \boxed{a+b=0.}$

Soit I le milieu de $[AB]$. Alors $z_I = \dfrac{a+b}{2} = 0$ donc I est l'origine du repère ce qui prouve que $[AB]$ est bien un diamètre du cercle unité.

(b) $\forall z \in \mathbb{C}$, $|c| \geq 0$ donc $x \geq 0$ et d'après l'inégalité triangulaire, $x \leq |a| + |c|$. Or $|a| = |c| = 1$ donc $x \leq 2$. Au final $0 \leq x \leq 2$. $x = AC$ est une base du triangle rectangle en C. Une hauteur est donc BC. D'après Pythagore, $BC^2 = AB^2 - AC^2$. Comme $[AB]$ est un diamètre du cercle unité, $AB = 2$.

Ainsi : $BC = \sqrt{4-x^2}$ et par conséquent : $\boxed{\mathcal{A} = \dfrac{x\sqrt{4-x^2}}{2}.}$

(c) Posons, $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$. Par opérations usuelles la fonction f est dérivable sur $[0;\ 2[$ et $\forall x \in [0;\ 2[$, $f'(x) = \sqrt{4-x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \dfrac{2(2-x^2)}{\sqrt{4-x^2}}$. Nous avons donc une dérivée positive sur $[0;\ \sqrt{2}]$ et négative sur $]\sqrt{2};\ 2[$. La fonction f admet donc un maximum en $\sqrt{2}$ de valeur 2. Ainsi, $\forall x \in [0;\ 2], \mathcal{A} \leq 1$. de plus $\mathcal{A} = 1$ si et seulement si $x = \sqrt{2}$. Dans cette configuration, $Ac = \sqrt{2}$ et $BC = \sqrt{2}$ donc le triangle est isocèle. Comme il est rectangle il est donc rectangle isocèle.

Pour finir, on constate que cette aire est inférieure à la valeur $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ obtenue en 2 car $\dfrac{3\sqrt{3}}{4} > 1 \Leftrightarrow 3\sqrt{3} > 4 \Leftrightarrow 27 > 16$.

4. (a) Par hypothèse, $H \in (AC)$ donc les points H, A et C sont alignés ce qui par propriété revient à dire que : $\dfrac{h-c}{a-c}$ est réel donc égal à son conjugué. D'où (1).

De même, l'orthogonalité entre (AC) et (HB) entraîne que $\left(\dfrac{h-b}{c-a}\right)$ est imaginaire pur. D'où (2).

(b) Nous avons : $\overline{\dfrac{h-c}{a-c}} = \dfrac{\overline{h}-1/c}{1/a-1/c} = -\dfrac{c(a\overline{h}-1)}{c-a}$ donc :

$\overline{\left(\dfrac{h-c}{a-c}\right)} = \dfrac{h-c}{a-c} \Leftrightarrow -a(c\overline{h}-1) = h-c \Leftrightarrow \boxed{h + ac\overline{h} = c+a.}$

De même : $\overline{\left(\dfrac{h-b}{c-a}\right)} = \dfrac{\overline{h}-1/b}{1/c-1/a} = -\dfrac{ac(b\overline{h}-1)}{c-a}$ donc :

$\overline{\left(\dfrac{h-b}{c-a}\right)} = -\dfrac{h-b}{c-a} \Leftrightarrow ac\dfrac{b\overline{h}-1}{b} = h-b \Leftrightarrow \boxed{h - ac\overline{h} = b - \dfrac{ac}{b}.}$

En sommant les deux inégalités obtenues nous en déduisons : $\boxed{h = \dfrac{1}{2}\left(a+b+c-\dfrac{ac}{b}\right).}$

(c) Par propriété : $\mathcal{A} = \dfrac{AC \times HB}{2}$. Or :

$$\begin{aligned}
BH &= |h-b| \\
&= \tfrac{1}{2}|a+c-b-\tfrac{ac}{b}| \\
&= \tfrac{1}{2}|a-b+c\tfrac{b-a}{b}| \\
&= \tfrac{1}{2}\left|1-\tfrac{c}{b}\right| |a-b| \\
&= \tfrac{1}{2}\left|1-\tfrac{c}{b}\right| |a(1-\tfrac{b}{a})| \\
&= \tfrac{1}{2}\left|1-\tfrac{c}{b}\right| |a||1-\tfrac{b}{a}| \\
&= \tfrac{1}{2}\left|1-\tfrac{c}{b}\right| |1-\tfrac{b}{a}|
\end{aligned}.$$

De plus : $AC = |c-a| = |c||1-\frac{a}{c}| = \left|1-\frac{a}{c}\right|$. Nous obtenons au final :

$\boxed{\mathcal{A} = \dfrac{1}{4}\left|1-\dfrac{b}{a}\right|\left|1-\dfrac{c}{b}\right|\left|1-\dfrac{a}{c}\right|.}$

(d) D'après précédemment : $1 - \dfrac{b}{a} = 1 - e^{i\alpha} = e^{i\alpha/2}(e^{-i\alpha/2} - e^{i\alpha/2}) = -2i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\alpha/2}$. En passant au module on en déduit : $\left|1-\dfrac{b}{a}\right| = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

De même : $\left|1-\dfrac{c}{b}\right| = 2\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)$ et $\left|1-\dfrac{a}{c}\right| = 2\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)$. On en déduit :

$\boxed{\mathcal{A} = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right).}$

(e) Puisque : $\sin(u)\sin(v) = \frac{1}{2}(-\cos(u+v)+\cos(u-v))$ nous en déduisons : $\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{y}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(-\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)+\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\right)$.

Ainsi :

$$\begin{aligned}&\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{y}{2}\right)\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\\ =\ & \tfrac{1}{2}\left(-\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)+\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)\end{aligned}.$$

Par ailleurs, puisque : $\sin(u)\cos(v) = \frac{1}{2}(\sin(u+v)+\sin(u-v))$ on en déduit :

$$\boxed{\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{y}{2}\right)\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(-\sin(x+y)+\sin(x)+\sin(y)\right).}$$

(f) Nous avons : $\mathcal{A} = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)$. Or, d'après les préliminaires, $\alpha+\beta+\gamma \equiv 0\ [2\pi]$ donc :$\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2} \equiv 0\ [\pi]$. Or, $0 < \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2} < 3\pi$ car les trois points sont deux à deux distincts. Par conséquent : $\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = \pi$ ou $\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = 2\pi$.

- Si $\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = \pi$, alors : $\dfrac{\gamma}{2} = \pi - \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ ce qui entraîne : $\sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = \sin\left(\dfrac{\gamma}{2}\right)$. On en déduit donc que :

  $\mathcal{A} = 2\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\beta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$.
- Si $\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = 2\pi$, alors : $\dfrac{\gamma}{2} = 2\pi - \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ ce qui entraîne : $-\sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = \sin\left(\dfrac{\gamma}{2}\right)$. On en déduit donc que :

  $\mathcal{A} = -2\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\beta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$.

D'après la question précédente, il s'ensuit : $\mathcal{A} = \pm\frac{1}{2}\left(-\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha)+\sin(\beta)\right)$ puis ($|\mathcal{A}| = \mathcal{A}$ car une aire est positive) : $\boxed{\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}\left|-\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha)+\sin(\beta)\right|.}$

De plus, toujours d'après les préliminaires :

$\forall x \in [0;\ 2\pi];\ -\dfrac{3\sqrt{3}}{2} \leq \sin(\alpha)+\sin(x)-\sin(\alpha+x) \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ ce qui entraîne : $\forall x \in [0;\ 2\pi];\ |\sin(\alpha)+\sin(x)-\sin(\alpha+x)| \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$,. En particulier :

$|-\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha)+\sin(\beta)| \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ et donc : $\boxed{\mathcal{A} \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{4}.}$

(g) En reprenant les calculs du préliminaire, lorsque la valeur maximale est atteinte :

- Soit $\beta = \pi - \dfrac{\alpha}{2}$ et $\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$. On en déduit : $\alpha = \beta = \gamma = \dfrac{2\pi}{3}$. Nous avons alors : $\dfrac{a}{b} = j$ ($j = e^{2i\pi/3}$) soit $a = bj$. De même : $\dfrac{c}{b} = j$ donc : $c = bj = j^2 a$. Alors : $\underline{a+b+c = a(1+j+j^2) = 0 \text{ car la somme des racines troisièmes de l'unité est nulle.}}$
- Soit $\beta = 2\pi - \dfrac{\alpha}{2}$ et $\alpha - 2\pi = -\dfrac{2\pi}{3}$. On en déduit : $\alpha = \beta = \gamma = \dfrac{4\pi}{3}$. Nous avons alors : $\dfrac{a}{b} = j^2$ ($j = e^{2i\pi/3}$) soit $a = bj^2$. De même : $\dfrac{c}{b} = j^2$ donc : $c = bj^2 = ja$. Alors : $\underline{a+b+c = a(1+j^2+j) = 0 \text{ car la somme des racines troisièmes de l'unité est nulle.}}$

(h) Réciproquement, si $a+b+c = 0$ alors en passant au conjugué, et d'après les préliminaires, $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} = 0$. Comme $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} = \dfrac{ab+ac+bc}{abc}$ on en déduit : $ab+ac+bc = 0$. Alors, de $a+b+c = 0$ nous obtenons : $ab = -(b^2+cb)$ et en injectant dans $ab+ac+bc = 0$ cela donne : $ac = b^2$. Par conséquent : $\dfrac{c-a}{b-a} = \dfrac{\frac{b^2}{a}-a}{b-a} = \dfrac{b^2-a^2}{a(b-a)} = \dfrac{b+a}{a} = -\dfrac{c}{a}$. Comme $|a| = |c| = 1$, $\left|\dfrac{c-a}{b-a}\right| = 1$ donc $|c-a| = |b-a|$ soit $AB = AC$. De la même façon, nous obtenons :

$\dfrac{b-c}{a-c} = -\dfrac{b}{c}$ ce qui donne : $BC = AC$.

Bref, $AB = BC = AC$ donc le triangle est équilatéral. La réciproque est vraie.

⋆⋆⋆

FIN

⋆⋆⋆