Devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 2.

Durée : 3 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Dans cette épreuve, les candidats sont invités à illustrer, s'ils le jugent nécessaire, leurs réponses avec un dessin.

Exercice

Petits exercices indépendants

1. Linéariser $\cos^3(x)$.
2. Résoudre $\sin(2x) \geq \sin(x)$.
3. (a) Soit $x \in \mathbb{R} - \{\pi\ [2\pi]\}$. On pose : $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Montrer que :
$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}.$$
   (b) Résoudre l'équation : $(\sqrt{3}+1)\cos(x) + (\sqrt{3}-1)\sin(x) + \sqrt{3} - 1 = 0$ en posant : $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.
4. (a) Montrer que : $\sin(p) - \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$.
   (b) En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation : $\sin(x) + \sin(2x) < \sin(3x)$.
5. On pose : $B = \dfrac{(-\sqrt{3}+i)^{13}}{(\sqrt{3}-3i)^{14}}$. Mettre B sous forme trigonométrique et algébrique.
6. Pour $z \in \mathbb{C}$, résoudre $|z - i| = |z + 1 + 2i|$.
7. Soit $\theta \in \mathbb{R} - \{0\ [2\pi]\}$.
   (a) Énoncer et démontrer les formules de factorisations par l'angle moitié.
   (b) En déduire que $\dfrac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}$ est imaginaire pur.
   (c) Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles $\dfrac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = \sqrt{3}i$.
   (d) Soit $z \in \mathbb{C} - \{1\}$. Montrer que $\dfrac{1+z}{1-z}$ est imaginaire pur si et seulement si $|z| = 1$.
8. (a) Montrer que $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2,\ |z+z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2\mathcal{R}e(z\overline{z'})$ et $|z-z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 - 2\mathcal{R}e(z\overline{z'})$.
   (b) En déduire que $\forall w \in \mathbb{C}$, $2\mathcal{R}e(w) \leq 1 + |w|^2$.
   (c) En déduire : $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2,\ |z+z'|^2 \leq (1+|z|^2)(1+|z'|^2)$.

Problème

Le but du problème est de proposer deux méthodes de calcul de :
$$P = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right).$$
Les questions 1 et 2 établissent des résultats préliminaires nécessaires au calcul de P selon la méthode proposée à la question 3.

La question 4 propose une deuxième méthode, plus directe, pour obtenir les résultats de 2.

La question 4 est indépendante du reste du problème.

Dans tout le problème on note : $\alpha = \tan^2\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\beta = \tan^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

1. (Question préliminaire) Soient x_1 et x_2 les deux solutions réelles de $ax^2+bx+c=0$ avec $a \neq 0$. Montrer que $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ et $x_1x_2=\frac{c}{a}$.

2. Le but de cette question est de calculer $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$ ainsi que $\alpha\beta$ sans connaître les valeurs de α et β.

   (a) Soit $\theta \in \mathbb{R} - \{0\ [\frac{\pi}{2}]\}$. Montrer que $\cos(5\theta)+i\sin(5\theta)=(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^5=\sin^5(\theta)\left(\dfrac{1}{\tan(\theta)}+i\right)^5$.

   (b) En déduire : $\sin(5\theta)=\sin^5(\theta)\left(\dfrac{5}{\tan^4(\theta)}-\dfrac{10}{\tan^2(\theta)}+1\right)$.

   (On pourra utiliser l'identité remarquable $(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$.)

   (c) En déduire que $\dfrac{1}{\alpha}$ et $\dfrac{1}{\beta}$ sont les solutions de $5x^2-10x+1=0$.

   (d) En déduire les valeurs de $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$ et $\alpha\beta$.

3. On rappelle la notation $P=\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)\sin\left(\dfrac{3\pi}{5}\right)\sin\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$. On note $T=\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\dfrac{3\pi}{5}\right)\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$.

   (a) Montrer que $P \neq 0$.

   (b) Montrer que $\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)\sin\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)\sin\left(\dfrac{6\pi}{5}\right)\sin\left(\dfrac{8\pi}{5}\right)=P$.

   (c) En déduire que $PT=\dfrac{P}{2^4}$ puis la valeur de T.

   (d) Vérifier que $\dfrac{P}{T}=\alpha\beta$. En déduire la valeur de P.

4. (a) Résoudre l'équation (E) $\sin(4x)=\sin(x)$.

   (b) Exprimer simplement $\sin(4x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

   (c) Soit x_0 une solution de (E). Montrer que si $\sin(x_0)\neq 0$, alors $\cos(x_0)$ est solution de l'équation : $8X^3-4X-1=0$.

   (d) En vous aidant de (4a) uniquement, expliquer pourquoi $-\frac{1}{2}$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\dfrac{3\pi}{5}\right)$ sont solutions de l'équation : $8X^3-4X-1=0$.

   (e) En déduire : $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ et $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$.

   (f) En déduire également les valeurs de $\tan^2\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ puis $\tan^2\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ puis retrouver les valeurs de $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$ et $\alpha\beta$ précédemment obtenues.

⋆⋆⋆
FIN
⋆⋆⋆

Correction de l'exercice :

1. Cf cours.
2. Cf TD.
3. (a) Cf fiche méthode.

   (b) Soit l'équation : $(\sqrt{3}+1)\cos(x)+(\sqrt{3}-1)\sin(x)+\sqrt{3}-1=0$ en posant : $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$. On remarque dans un premier temps que si $x=\pi\ [2\pi]$, alors x n'est pas solution de l'équation. On considère donc $x\in\mathbb{R}-\{\pi\ [2\pi]\}$ et on pose : $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$. L'équation devient alors :

$$\begin{aligned}
& (\sqrt{3}+1)\frac{1-t^2}{1+t^2}+(\sqrt{3}-1)\frac{2t}{1+t^2}+\sqrt{3}-1=0\\
\Leftrightarrow\ & (\sqrt{3}-1)(1-t^2)+2t(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}-1)(1+t^2)=0\\
\Leftrightarrow\ & -2t^2+2t(\sqrt{3}-1)+2\sqrt{3}=0\\
\Leftrightarrow\ & -t^2+t(\sqrt{3}-1)+\sqrt{3}=0\\
\Leftrightarrow\ & t^2-(\sqrt{3}-1)t-\sqrt{3}=0
\end{aligned}$$

   On reconnaît alors un trinôme de discriminant : $\Delta=((-\sqrt{3}-1))^2+4\sqrt{3}=4-2\sqrt{3}+4\sqrt{3}=4+2\sqrt{3}=(\sqrt{3}+1)^2$. Le discriminant est strictement positif, on en déduit donc deux solutions réelles distinctes :

$$t_1=\frac{\sqrt{3}-1-(\sqrt{3}+1)}{2}=-1,\quad t_2=\frac{\sqrt{3}-1+(\sqrt{3}+1)}{2}=\sqrt{3}.$$

   Ainsi :

$$\begin{aligned}
& (\sqrt{3}+1)\cos(x)+(\sqrt{3}-1)\sin(x)+\sqrt{3}-1=0\\
\Leftrightarrow\ & \tan\left(\frac{x}{2}\right)=-1 && \text{ou}\tan\left(\frac{x}{2}\right)=\sqrt{3}\\
\Leftrightarrow\ & \tan\left(\frac{x}{2}\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) && \text{ou }\tan\left(\frac{x}{2}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\\
\Leftrightarrow\ & \frac{x}{2}=-\frac{\pi}{4}\ [\pi] && \text{ou }\frac{x}{2}=\frac{\pi}{3}\ [\pi]\\
\Leftrightarrow\ & x=-\frac{\pi}{2}\ [2\pi] && \text{ou }x=\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]
\end{aligned}$$

   Au final, $\boxed{S=\left\{-\frac{\pi}{2};\ \frac{2\pi}{3}\right\}\ [2\pi].}$

4. (a) Cf fiche méthode.

   (b) $\sin(x)+\sin(2x)<\sin(3x)\Leftrightarrow\sin(2x)<\sin(3x)-\sin(x)$. Or d'après la formule précédente, $\sin(3x)-\sin(x)=2\sin(x)\cos(2x)$. De plus : $\sin(2x)=2\sin(x)\cos(x)$. Ainsi :

$$\sin(x)+\sin(2x)<\sin(3x)\Leftrightarrow 2\sin(x)(\cos(2x)-\cos(x))<0.$$

   Or, on sait que :

   - $\sin(x)\geq 0\Leftrightarrow x\in[0;\ \pi]\ [2\pi]$.
   - Par ailleurs : $\cos(2x)-\cos(x)>0\Leftrightarrow 2\cos^2(x)-\cos(x)-1>0$. On pose alors $X=\cos(x)$. Alors : $2X^2-X-1>0\Leftrightarrow X\in]-\infty;\ -\frac{1}{2}[\cup]1;\ +\infty[$. Donc $2\cos^2(x)-\cos(x)-1>0\Leftrightarrow\cos(x)<-\frac{1}{2}$ ou $\cos(x)>1$ c'est à dire : $\cos(x)<-\frac{1}{2}$ car $\forall x\in\mathbb{R},\ \cos(x)\leq 1$. Pour finir : $\cos(x)<-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x\in\left]\frac{2\pi}{3};\ \frac{4\pi}{3}\right[\ [2\pi]$.

   On en déduit finalement :

$$\boxed{S=\left]\frac{2\pi}{3};\ \pi\right[\cup\left]\frac{4\pi}{3};\ 2\pi\right[\ [2\pi].}$$

5. Cf techniques de la fiche méthode mais avec des valeurs numériques différentes !!

   On met dans un premier temps sous forme trigonométrique : $z_1=-\sqrt{3}+i$ et $z_2=\sqrt{3}-3i$. Le numérateur est classique : $z_1=2e^{i5\pi/6}$. Pour le deuxième, le module est $2\sqrt{3}$ et $z_2=2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\sqrt{3}e^{-i\pi/3}$. Par conséquent :

$$\begin{aligned}
B &= \frac{z_1^{13}}{z_2^{14}}\\
&= \frac{2^{13}e^{i65\pi/6}}{(2\sqrt{3})^{14}e^{-i14\pi/3}}\\
&= \frac{e^{i93\pi/6}}{2.3^7}
\end{aligned}.$$

   On cherche la mesure principale de $\frac{93\pi}{6}$. Pour ceci, $\frac{93\pi/6}{2\pi}=\frac{93}{12}=7,75$. Le nombre de tours est donc 8. Ainsi : $\frac{93\pi}{6}-8\times 2\pi=\frac{(93-96)\pi}{6}=-\frac{\pi}{2}$. Par conséquent :

$B = \frac{1}{3^7}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right) = \boxed{\dfrac{-\sqrt{3}}{2.3^7}i.}$

6. Cf fiche méthode (avec des valeurs numériques différentes mais bon ...)
7. (a) Cf cours.

   (b) D'après les formules de factorisation par l'angle moitié : $\dfrac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = \dfrac{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \dfrac{2i\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{-2i^2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \dfrac{i\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \boxed{\dfrac{i}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}.}$

   (c) Soit $\theta \in \mathbb{R} - \{0\ [2\pi]\}$. D'après ci-dessus : $\dfrac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = \sqrt{3}i \Leftrightarrow \tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \tan\left(\dfrac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \dfrac{\theta}{2} \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [\pi] \Leftrightarrow \boxed{x \equiv \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi].}$

   (d) Posons $w = \dfrac{1+z}{1-z}$. Alors w est imaginaire pur si et seulement si $\overline{w} = -w$. Or, par propriétés de la conjugaison, $\overline{w} = \dfrac{1+\overline{z}}{1-\overline{z}}$. Donc : $\overline{w} = -w \Leftrightarrow \dfrac{1+\overline{z}}{1-\overline{z}} = \dfrac{1+z}{z-1} \Leftrightarrow (1+\overline{z})(z-1) = (1+z)(1-\overline{z}) \Leftrightarrow z - 1 + z\overline{z} - \overline{z} = 1 - \overline{z} + z - z\overline{z} \Leftrightarrow z\overline{z} = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow \boxed{|z| = 1.}$

8. (a) Cf. fiche méthode.

   (b) D'après la question précédente : $|1-w|^2 = 1 - 2\mathcal{R}e(w) + |w|^2$. Or $|1-w|^2 \geq 0$ donc : $1 - 2\mathcal{R}e(w) + |w|^2 \geq 0 \Leftrightarrow \boxed{2\mathcal{R}e(w) \leq 1 + |w|^2.}$

   (c) En développant, et d'après la première question : $|z+z'|^2 \leq (1+|z|^2)(1+|z'|^2) \Leftrightarrow 2\mathcal{R}e(z\overline{z'}) \leq 1 + |z|^2|z'|^2$. Posons alors : $w = z\overline{z'}$. Alors $|w| = |z||\overline{z'}| = |z||z'|$ donc $|w|^2 = |z|^2|z'|^2$. Or, d'après (b), $2\mathcal{R}e(w) \leq 1 + |w|^2$. Ainsi : $2\mathcal{R}e(z\overline{z'}) \leq 1 + |z|^2|z'|^2$ ce qui prouve par équivalences successives que : $\boxed{|z+z'|^2 \leq (1+|z|^2)(1+|z'|^2).}$

Correction du problème :

1. (Question préliminaire)

   Nous écrivons $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ avec $\Delta = b^2 - 4ac$.

   Alors en sommant nous obtenons directement : $\boxed{x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}.}$

   Pour le produit on utilise $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$ ce qui donne : $x_1x_2 = \dfrac{b^2-\Delta}{4a^2}$.

   Or, par définition, $\Delta = b^2 - 4ac$ donc : $x_1x_2 = \dfrac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \dfrac{4ac}{4a^2} = \boxed{\dfrac{c}{a}.}$

2. (a) Soit $\theta \in \mathbb{R} - \{0\ [\frac{\pi}{2}]\}$.
   D'après la formule de De Moivre nous avons : $\cos(5\theta) + i\sin(5\theta) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^5$.

   Par ailleurs :
   $$\begin{aligned}(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^5 &= \left(\sin(\theta)\left(\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} + i\right)\right)^5 \\ &= \left(\sin(\theta)\left(\frac{1}{\tan(\theta)} + i\right)\right)^5 \\ &= \boxed{\sin(\theta)^5\left(\frac{1}{\tan(\theta)} + i\right)^5.}\end{aligned}$$

   (b) Puisque $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$, nous avons : $\left(\dfrac{1}{\tan(\theta)} + i\right)^5 = \left(\dfrac{1}{\tan(\theta)}\right)^5 + 5\left(\dfrac{1}{\tan(\theta)}\right)^4 i + 10\left(\dfrac{1}{\tan(\theta)}\right)^3 i^2 + 10\left(\dfrac{1}{\tan(\theta)}\right)^2 i^3 + 5\left(\dfrac{1}{\tan(\theta)}\right) i^4 + i^5$.

   Or, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$ et $i^5 = i$ donc : $\left(\dfrac{1}{\tan(\theta)} + i\right)^5 = A + iB$ avec :

$$A = \left(\frac{1}{\tan(\theta)}\right)^5 - 10\left(\frac{1}{\tan(\theta)}\right)^3 + 5\left(\frac{1}{\tan(\theta)}\right)$$
$$B = 5\left(\frac{1}{\tan(\theta)}\right)^4 - 10\left(\frac{1}{\tan(\theta)}\right)^2 + 1$$

Il s'ensuit : $\cos(5\theta) + i\sin(5\theta) = \sin(\theta)^5 A + i\sin(\theta)^5 B$ donc par identification des parties imaginaires :

$\boxed{\sin(5\theta) = \sin^5(\theta)\left(\frac{5}{\tan^4(\theta)} - \frac{10}{\tan^2(\theta)} + 1\right).}$

(c) La relation précédente avec $\theta_0 = \frac{\pi}{5}$ entraîne : $\sin(\pi) = \sin^5(\frac{\pi}{5})\left(\frac{5}{\tan^4(\frac{\pi}{5})} - \frac{10}{\tan^2(\frac{\pi}{5})} + 1\right)$. Comme $\sin(\pi) = 0$ et $\sin^5(\frac{\pi}{5}) \neq 0$ il s'ensuit :
$\frac{5}{\tan^4(\frac{\pi}{5})} - \frac{10}{\tan^2(\frac{\pi}{5})} + 1 = 0$. En posant $x_1 = \frac{1}{\tan^2(\frac{\pi}{5})}$ cela s'écrit :

$\boxed{5x_1^2 - 10x_1 + 1 = 0 \text{ donc } x_1 = \frac{1}{\alpha_1} \text{ est solution de } 5x^2 - 10X + 1 = 0.}$ On raisonne de même avec $\theta_1 = \frac{2\pi}{5}$ pour obtenir que $\frac{1}{\beta}$ est solution de la même équation.

(d) D'après la question précédente, $\frac{1}{\alpha}$ et $\frac{1}{\beta}$ sont les solutions de $5x^2 - 10x + 1 = 0$. Ainsi, d'après 1, $\boxed{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 2}$ et $\frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \boxed{\alpha\beta = 5.}$

3. (a) $\frac{\pi}{5} \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ donc $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \neq 0$. De même $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \neq 0$, $\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right) \neq 0$ et $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) \neq 0$ donc par produit de nombres non nuls, $\boxed{P \neq 0.}$

(b) Nous avons :

$$\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$$
$$\sin\left(\frac{6\pi}{5}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$$
$$\sin\left(\frac{8\pi}{5}\right) = \sin\left(\pi + \frac{3\pi}{5}\right) = -\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)$$

donc par produit : $\boxed{\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\sin\left(\frac{6\pi}{5}\right)\sin\left(\frac{8\pi}{5}\right) = P.}$

(c) $PT = A_1A_2A_3A_4$ avec $A_k = \sin\left(\frac{k\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{k\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{2k\pi}{5}\right)$. Par conséquent : $A_1A_2A_3A_4 = \frac{1}{2^4}\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\sin\left(\frac{6\pi}{5}\right)\sin\left(\frac{8\pi}{5}\right)$. Mais, d'après la question précédente : $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\sin\left(\frac{6\pi}{5}\right)\sin\left(\frac{8\pi}{5}\right) = P$ donc : $\boxed{PT = \frac{P}{2^4}.}$

Comme $P \neq 0$ (cf (a)), en divisant par P dans la relation ci-dessus nous obtenons : $\boxed{T = \frac{1}{2^4}.}$

(d) Nous voyons facilement que : $\frac{P}{T} = \tan\left(\frac{\pi}{5}\right)\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)\tan\left(\frac{3\pi}{5}\right)\tan\left(\frac{4\pi}{5}\right)$. Or,

$$\tan\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \tan\left(\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = -\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$
$$\tan\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

Donc en faisant le produit nous obtenons : $\boxed{\dfrac{P}{T} = \tan^2\left(\dfrac{\pi}{5}\right)\tan^2\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \alpha\beta.}$ d'après les définitions de α et β

Or, d'après 2, $\alpha\beta = 5$ et d'après précédemment $T = \dfrac{1}{2^4}$. Ainsi, $\boxed{P = \alpha\beta T = \dfrac{5}{2^4}.}$

4. (a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(4x) = \sin(x) \Leftrightarrow 4x \equiv x\ [2\pi]$ ou $4x \equiv \pi - x\ [2\pi]$
$\Leftrightarrow 3x \equiv 0\ [2\pi]$ ou $5x \equiv \pi\ [2\pi]$
$\Leftrightarrow \boxed{x \equiv 0\ [2\pi/3] \text{ ou } x \equiv \pi/5\ [2\pi/5]}$

(b) Nous avons : $\sin(4x) = 2\sin(2x)\cos(2x)$. Or $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ et $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ donc : $\boxed{\sin(4x) = \sin(x)(8\cos^3(x) - 4\cos(x)).}$

(c) Soit x_0 une solution de (E).
Alors $\sin(4x_0) = \sin(x_0) \Leftrightarrow \sin(x_0)(8\cos^3(x_0) - 4\cos(x_0)) = \sin(x_0)$ d'après la question précédente. Comme $\sin(x_0) \neq 0$ par hypothèse, il est possible de diviser par $\sin(x_0)$ la relation ci-dessus ce qui mène à :
$8\cos^3(x_0) - 4\cos(x_0) - 1$. Ceci prouve bien que $\underline{\cos(x_0) \text{ est solution de l'équation : } 8X^3 - 4X - 1 = 0.}$

(d) Or, d'après (4a), $x_0 = \dfrac{2\pi}{3}$, $x_1 = \dfrac{\pi}{5}$ et $x_2 = \dfrac{3\pi}{5}$ sont solutions de (E). Par ailleurs $\sin(x_0) \neq 0$, $\sin(x_1) \neq 0$ et $\sin(x_2) \neq 0$ donc d'après la question précédente $\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\dfrac{3\pi}{5}\right)$ sont solutions de $8X^3 - 4X - 1 = 0$. Enfin $\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ ce qui prouve bien que $-\frac{1}{2}$ est solution de $8X^3 - 4X - 1 = 0$.

(e) On fait donc la division euclidienne de $8X^3 - 4X - 1$ par $X + \frac{1}{2}$ ce qui donne : $8X^3 - 4X - 1 = (X + \frac{1}{2})(8X^2 - 4X - 2)$. Par conséquent : $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\dfrac{3\pi}{5}\right)$ sont solutions du trinôme : $8X^2 - 4X - 2 = 0$. Or ce-dernier a pour discriminant $\Delta = 80 = (4\sqrt{5})^2$. Ses racines sont donc : $\dfrac{4 - 4\sqrt{5}}{16} = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{4}$ et $\dfrac{4 + 4\sqrt{5}}{16} = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{4}$.

Ainsi, $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{4}$ ou $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{4}$. Mais $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) > 0$ donc nécessairement : $\boxed{\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{4}.}$ Il s'ensuit $\cos\left(\dfrac{3\pi}{5}\right) = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{4}$. Or, $\cos\left(\dfrac{3\pi}{5}\right) = \cos\left(\pi - \dfrac{2\pi}{5}\right) = -\cos\left(\dfrac{3\pi}{5}\right)$ d'où au final : $\boxed{\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{4}.}$

(f) Nous avons donc : $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = \dfrac{(\sqrt{5} + 1)^2}{16} = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{8}$.

On utilise de plus : $1 + \tan^2\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = \dfrac{1}{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{5}\right)}$ donc :

$$\tan^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{8}{3 + \sqrt{5}} - 1 = \frac{5 - \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} = \frac{(5 - \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})}{(3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})} = \boxed{5 - 2\sqrt{5}.}$$

De la même façon nous obtenons : $\tan^2\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \boxed{5 + 2\sqrt{5}.}$

En utilisant l'identité remarquable $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$ on en déduit directement : $\boxed{\alpha\beta = 5.}$

Enfin :

$$\boxed{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}} = \frac{1}{5 - 2\sqrt{5}} + \frac{1}{5 + 2\sqrt{5}} = \frac{5 + 2\sqrt{5} + 5 - 2\sqrt{5}}{(5 - 2\sqrt{5})(5 + 2\sqrt{5})} = \frac{10}{5} = \boxed{2.}$$

⋆⋆⋆

FIN

⋆ ⋆ ⋆