Devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 1.

Durée : 2 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Dans cette épreuve, les candidats sont invités à illustrer, s'ils le jugent nécessaire, leurs réponses avec un dessin.

Exercice 1
Logique

1. Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses et écrire leurs négations :

   (a) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists x \in \mathbb{R}_+^*\ /0 < \dfrac{1}{n} < x.$

   (b) $\exists n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*\ /0 < \dfrac{1}{n} < x.$

   (c) $\exists x \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall n \in \mathbb{N}^*\ /0 < \dfrac{1}{n} < x.$

   (d) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists y \in \mathbb{R}_+^*\ /0 < y < x.$

2. Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$. Écrire la contraposée de : $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

Exercice 2
Ensembles

Soient $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; 4x - y = 1\}$ et $B = \bigcup\limits_{t\in\mathbb{R}} \{(t+1;\ 4t+3)\}$. Montrer par double inclusion que ces deux ensembles sont égaux.

Exercice 3
Inégalités

(Q 1) Montrer que : $\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2 ; 2ab \leq a^2 + b^2$.

(Q 2) Montrer que : $\forall (a; b) \in [1; +\infty[\times[1; +\infty[; |\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \frac{|a-b|}{2}$.

Exercice 4
Équations - inéquations

Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

(a) $\dfrac{x}{2x+1} \geq \dfrac{2x+1}{x}$; (b) $\sqrt{x^2 + x + 3} = 2x - 1$; (c) $\ln(x) + \ln(x + 1) + \ln(x + 2) = \ln(5x + 1)$;

(d) $\mathrm{sh}(x) = 2$; (e) $35^x \times 9 = 15^x \times 49$; (f) $|x + 2| \leq |2x + 3|$.

Exercice 5
Systèmes linéaires

Résoudre les systèmes suivants :

(a) $\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y+z & = & 1 \\ x+2y+z & = & 1 \\ x+y+2z & = & 1 \end{array}\right.$; (b) $\left\{\begin{array}{rcl} x+2y+3z & = & 1 \\ 2x+5y+7z & = & 2 \end{array}\right.$.

Exercice 6
Équation fonctionnelle

L'objectif est de trouver les fonctions f définies sur $\mathbb{R}^{*+}$ vérifiant :

$$\forall x > 0\ ,\ f(x) = 2xf(\frac{1}{x}) + x$$

(Q 1) Expliquer le raisonnement par Analyse-Synthèse.

(Q 2) Supposons qu'il existe une fonction f solution de ce problème.

- (Q a) Calculer $f(1)$.
- (Q b) Montrer que $\forall x > 0\ ,\ f(\frac{1}{x}) = \frac{2}{x}f(x) + \frac{1}{x}$.
- (Q c) Déduire des questions précédentes l'expression de $f(x)$.

(Q 3) Établir la réciproque et conclure.

⋆ ⋆ ⋆
FIN
⋆ ⋆ ⋆

Correction de l'exercice 1:

1. (a) « $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists x \in \mathbb{R}_+^*\ /0 < \frac{1}{n} < x$ »est vraie. En effet $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < \frac{1}{n} < 1$ donc $x = 1 \in \mathbb{R}_+^*$ convient. Sa négation est : « $\exists n \in \mathbb{N}^*\ /\forall x \in \mathbb{R}_+^*, x \leq \frac{1}{n}$. »

   (b) « $\exists n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*\ /0 < \frac{1}{n} < x$ »est fausse car sa négation est vraie. En effet, sa négation est : « $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x \in \mathbb{R}_+^*\ /\frac{1}{n} \geq x$ »qui est vraie car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x = \frac{1}{n}$ convient.

   (c) « $\exists x \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall n \in \mathbb{N}^*\ /0 < \frac{1}{n} < x$ »est vraie. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x = 1$ convient. Sa négation est : « $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ /\ \frac{1}{n} \geq x$ ».

   (d) « $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists y \in \mathbb{R}_+^*\ /0 < y < x$ »est vraie. En effet, soit $x > 0$ fixé. Posons $y = \frac{x}{2}$. Alors $y > 0$ car $x > 0$ et $y < x$. Sa négation est : « $\exists x \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall y \in \mathbb{R}_+^*,\ /\ y \geq x$ ».

2. La contraposée est : « $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ ».

Correction de l'exercice 2:

On procède par double inclusion.

- $\boxed{B \subset \text{A}}$. Soit $b \in B$. Par définition de l'union quelconque d'ensembles, $\exists t_0 \in \mathbb{R}\ /\ b \in \{(t_0+1;\ 4t_0+3)\}$. Ainsi : $b = (t_0+1;\ 4t_0+3)$. On constate par ailleurs que $4(t_0+1) - (4t_0+3) = 1$ donc les abscisses et ordonnées de b vérifient la condition d'appartenance à A ce qui prouve que : $b \in A$.
- $\boxed{A \subset B}$. Soit $a \in A$. Nous avons donc $a = (x;\ y)$ avec x et y deux réels tels que $4x - y = 1$. Posons : $t_0 = x - 1 \in \mathbb{R}$ de sorte que $x = t_0 + 1$. Alors : $4t_0 + 3 = 4x - 1$. Or, $4x - y = 1$ par hypothèse donc : $4x - 1 = y$. Ceci prouve donc : $4t_0 + 3 = y$. Au final, comme : $x = t_0+1$ et $y = 4t_0+3$ nous pouvons affirmer que $b = (t_0+1;\ 4t_0+3)$. On en déduit donc bien l'existence de $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que : $a \in \{(t_0+1;\ 4t_0+3)\}$ ce qui prouve que $a \in B$ par définition de la réunion quelconque d'ensembles.

Correction de l'exercice 3:

(Q 1) Montrer que : $\forall (a;b) \in (\mathbb{R})^2; 2ab \leq a^2 + b^2$.
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ fixé quelconque. Alors

$$2ab \leq a^2 + b^2 \Leftrightarrow 0 \leq (a^2 + b^2 - 2ab) \Leftrightarrow 0 \leq (a-b)^2$$

Cette dernière assertion est vraie. La première l'est donc aussi par équivalences successives et **le résultat est démontré.**

(Q 2) Montrer que : $\forall (a;b) \in [1;+\infty[\times[1;+\infty[; |\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \frac{|a-b|}{2}$.
Soit $(a,b) \in [1;+\infty[\times[1;+\infty[$. Alors, on multiplie par la quantité conjuguée :

$$|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \frac{|a-b|}{2} \Leftrightarrow \frac{|\sqrt{a}-\sqrt{b}|\times|\sqrt{a}+\sqrt{b}|}{|\sqrt{a}+\sqrt{b}|} \leq \frac{|a-b|}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|a-b|}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \leq \frac{|a-b|}{2}\ (*)$$

Or, on remarque que :

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{1} + \sqrt{1} = 2.$$

Ainsi, puisque la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, on en déduit :

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{|a-b|}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \leq \frac{|a-b|}{2}$$

puisque $|a-b|$ est un nombre positif.

On a donc montré que $(*)$ est vraie, et ainsi par équivalences successives, la première inégalité est démontrée, ainsi que le résultat.

Correction de l'exercice 4:

(a) $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1/2;\ 0\}$,

$$\frac{x}{2x+1} \geq \frac{2x+1}{x} \Leftrightarrow \frac{x^2 - (2x+1)^2}{x(2x+1)} \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x-(2x+1))(x+2x+1)}{x(2x+1)} \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{-(x+1)(3x+1)}{x(2x+1)} \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)(3x+1)}{x(2x+1)} \leq 0$$

On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$ $\quad -1 \quad -\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{3} \quad 0 \quad +\infty$
$x+1$	$-$ 0 $+$ $\quad$ $+$ $\quad$ $+$ $+$
$3x+1$	$-$ $\quad$ $-$ $\quad$ $-$ 0 $+$ ‖ $+$
x	$-$ $\quad$ $-$ $\quad$ $-$ $\quad$ $-$ ‖ $+$
$2x+1$	$-$ $\quad$ $-$ ‖ $+$ 0 $+$ $+$
$\dfrac{3x+1}{x(2x+1)}$	$+$ 0 $-$ ‖ $+$ 0 $-$ ‖ $+$

Par conséquent : $\boxed{S = \left[-1;\ -\frac{1}{2}\right[\cup \left[-\frac{1}{3};\ 0\right[.}$

(b) On procède par analyse-synthèse :

- ANALYSE. Par élévation au carré : $\sqrt{x^2+x+3} = 2x-1 \Rightarrow 3x^2-5x-2 = 0$. Les solutions du trinôme étant : 2 et $-\frac{1}{3}$, on en déduit : $\sqrt{x^2+x+3} = 2x-1 \Rightarrow x \in \left\{2;\ -\frac{1}{3}\right\}$.
- SYNTHÈSE. Il nous fauit vérifier si l'implication réciproque est vraie ce qui nous amène à tester les deux solutions potentielles. On constate que 2 est bien solution de $\sqrt{x^2+x+3} = 2x-1$ mais pas $-\frac{1}{3}$.

Au final : $S = \{2\}$.

(c) Les termes de l'équation sont définis si et seulement si $x > 0$.

$$\begin{array}{rl} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, & \ln(x) + \ln(x+1) + \ln(x+2) = \ln(5x+1) \\ \Leftrightarrow & \ln(x(x+1)(x+2)) = \ln(5x+1) \\ \Leftrightarrow & x(x+1)(x+2) = 5x+1 \text{ par stricte croissance de } \ln \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \\ \Leftrightarrow & x^3+3x^2-3x-1 = 0 \end{array}.$$

On reconnaît alors une expression de degré 3 qui s'annule en 1. On peut donc la factoriser par $x-1$ à l'aide d'une division euclidienne polynômiale :

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & 3x^2 & -3x & -1 & x \quad -1 \\ \hline -x^3 & +x^2 & & & x^2 \ +4x \ +1 \\ \hline & 4x^2 & -3x & -1 & \\ & -4x^2 & +4x & & \\ \hline & & x & -1 & \\ & & -x & +1 & \\ \hline & & 0 & 0 & \end{array}$$

Ainsi, $x^3+3x^2-3x-1 = (x-1)(x^2+4x+1)$.

On résout maintenant l'équation $x^2+4x+1 = 0$. Il s'agit d'un trinôme. On calcule alors le discriminant $\Delta = 12 = (2\sqrt{3})^2 > 0$. L'équation précédente admet donc deux solutions distinctes : $x_1 \begin{array}{l} = \frac{-4-2\sqrt{3}}{2}, \\ = -2-\sqrt{3} \end{array}$ $\quad x_2 \begin{array}{l} = \frac{-4+2\sqrt{3}}{2} \\ = -2+\sqrt{3} \end{array}$.

$$\text{On en déduit donc : } x^3-4x^2+9=0 \begin{array}{l} \Leftrightarrow (x-1)(x^2+4x+1) = 0 \\ \Leftrightarrow x-1 = 0 \text{ ou } x^2+4x+1 = 0 \\ \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -2-\sqrt{3} \text{ ou } x = -2+\sqrt{3}. \end{array}$$

Or, $x > 0$ donc nécessairement : $\boxed{S = \{1\}.}$

(d) Les membres de l'inéquation sont définis pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rl} \mathrm{sh}(x) = 2 & \Leftrightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 2 \\ & \Leftrightarrow X - \frac{1}{X} = 4 \text{ et } X = e^x \\ & \Leftrightarrow_{\text{car X>0}} X^2 - 1 - 4X = 0 \text{ et } X = e^x \\ & \Leftrightarrow X = \frac{4\pm\sqrt{20}}{2} = 1 \pm \sqrt{5} \text{ et } X = e^x \\ & \Leftrightarrow e^x = 2+\sqrt{5} \\ & \Leftrightarrow x = \ln(2+\sqrt{5}) \text{ car } \forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0 \end{array}$$

Finalement, l'ensemble des solutions est $\{\ln(2+\sqrt{5})\}$.

(e) $\forall x \in \mathbb{R},\ 35^x \times 9 = 15^x \times 49 \Leftrightarrow (7\times 5)^x \times 9 = (3\times 5)^x \times 49$

$$\Leftrightarrow 7^x \times \cancel{5^x} \times 9 = 3^x \times \cancel{5^x} \times 49$$
$$\Leftrightarrow \frac{7^x}{3^x} = \frac{49}{9}$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{7}{3}\right)^x = \frac{49}{9}$$
$$\Leftrightarrow x \ln\left(\frac{7}{3}\right) = \ln\left(\frac{49}{9}\right)$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln\left(\frac{49}{9}\right)}{\ln\left(\frac{7}{3}\right)}$$

De plus : $\dfrac{\ln\left(\left(\frac{7}{3}\right)^2\right)}{\ln\left(\frac{7}{3}\right)} == \dfrac{2\ln\left(\frac{7}{3}\right)}{\ln\left(\frac{7}{3}\right)} =$. On en déduit : $\boxed{S = \{2\}.}$

(f) On peut faire une disjonction des cas :
- Si $x \geq -\frac{3}{2}$: Alors : $x+2 \geq 0$ et $2x+3 \geq 0$ donc : $|x+2| \leq |2x+3| \Leftrightarrow x+2 \leq 2x+3 \Leftrightarrow x \geq -1$. Ainsi $x \in [-\frac{3}{2};\ +\infty[\cap[-1;\ +\infty[= [-1;\ +\infty[$.
- Si $x \leq -2$: Alors : $x+2 \leq 0$ et $2x+3 \leq 0$ donc : $|x+2| \leq |2x+3| \Leftrightarrow -x-2 \leq -2x-3 \Leftrightarrow x \leq -1$. Ainsi $x \in]-\infty;\ -2]\cap]-\infty;\ -1] =]-\infty;\ -2]$.
- Sinon : $x+2 > 0$ et $2x+3 < 0$ donc : $|x+2| \leq |2x+3| \Leftrightarrow x+2 \leq -2x-3 \Leftrightarrow x \leq -\frac{5}{3}$. Ainsi : $x \in]-2;\ -\frac{3}{2}[\cap]-\infty;\ -\frac{5}{3}] =]-2;\ -\frac{5}{3}]$.

Au final $S = [-1;\ +\infty[\cup]-\infty;\ -2]\cup]-2;\ -\frac{5}{3}] = \boxed{]-\infty;\ -\frac{5}{3}]\cup[-1;\ +\infty[.}$

Correction de l'exercice 5:

(S 1) Cf. exemple vu en cours.

(S 2)

$$\begin{cases} x + 2y + 3z &= 1 \\ 2x + 5y + 7z &= 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boxed{x} + 2y + 3z &= 1 \\ 2x + 5y + 7z &= 2 \end{cases} \Leftrightarrow_{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{cases} \boxed{x} + 2y + 3z &= 1 \\ \boxed{y} + z &= 0 \end{cases}$$

Nous avons donc deux inconnues principales : x et y que l'on exprime à l'aide de l'inconnue secondaire, à savoir z. Ainsi,

$$\begin{cases} \boxed{x} + 2y + 3z &= 1 \\ \boxed{y} + z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} &= -z+1 \\ \boxed{y} &= -z \end{cases}$$

Ainsi,

$$\boxed{S = \left\{(-z+1, -z, z) \in \mathbb{R}^3 / z \in \mathbb{R}\right\}}$$

Correction de l'exercice 6:

L'objectif est de trouver les fonctions f définies sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant :

$$\forall x > 0\ ,\ f(x) = 2xf(\frac{1}{x}) + x$$

(Q 1) Expliquer le raisonnement par Analyse-Synthèse.

- Analyse : on cherche les solutions par implications successives.
- Synthèse : on vérifie si les éléments obtenus sont solutions, autrement dit on établit la véracité de la réciproque.
- On conclut sur l'ensemble des solutions.

(Q 2) Supposons qu'il existe une fonction f solution de ce problème.

(Q a) Calculer $f(1)$.
On remplace x par 1 et on trouve : $\underline{f(1) = 2f(1) + 1 \Leftrightarrow f(1) = -1.}$

(Q b) Montrer que $\forall x>0\ ,\ f(\frac{1}{x})=\frac{2}{x}f(x)+\frac{1}{x}$.
On remplace x par $1/x$ et on a : $\underline{f(\frac{1}{x})=\frac{2}{x}f(x)+\frac{1}{x}}$

(Q c) Déduire des questions précédentes l'expression de $f(x)$.
On part de l'égalité :

$$\begin{aligned} f(x) &= 2xf(\tfrac{1}{x})+x \\ &= 2x\left(\tfrac{2}{x}f(x)+\tfrac{1}{x}\right)+x \text{ par la question précédente} \\ &= 4f(x)+2+x \end{aligned}$$

Ainsi $\underline{\forall x>0\ ,\ f(x)=\frac{-2-x}{3}}$
On a donc montré que

$$\boxed{\text{SI } f \text{ est solution de ce problème ALORS } f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^{*+} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{-2-x}{3}\end{array}.}$$

(Q 3) Soit alors $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^{*+} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{-2-x}{3}\end{array}$. Nous avons donc $\forall x>0$:

$$2xf(\frac{1}{x})+x=2x\frac{-2-\frac{1}{x}}{3}+x=\frac{-4x}{3}-\frac{2}{3}+x=\frac{-x}{3}-\frac{2}{3}=\frac{-2-x}{3}=f(x)$$

Ainsi, f est solution du problème. On a donc montré que :

$$\boxed{\text{SI } f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^{*+} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{-2-x}{3}\end{array} \text{ ALORS } f \text{ est solution du problème.}}$$

Ainsi, par double implication, nous avons montré que la seule solution de ce problème est

$$\boxed{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^{*+} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{-2-x}{3}\end{array}}.$$

⋆ ⋆ ⋆
FIN
⋆ ⋆ ⋆