Devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 1.

Durée : 4 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Dans cette épreuve, les candidats sont invités à illustrer, s'ils le jugent nécessaire, leurs réponses avec un dessin.

Exercice 1
- Questions de « cours »-

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que x n'est pas congru à 0 modulo π. On pose : $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Exprimer simplement $\cos(x)$, $\sin(x)$ et $\tan(x)$ en fonction de t.
2. Résoudre les équations suivantes :

   (a) $\sqrt{x^2 - 3x - 3} = x + 2\,;$ (b) $|3x - 1| = 5x - 2\,;$ (c) $\ln(x) + \ln(x^2 - 3x) = \ln(2x - 6)\,;$

   (d) $3\mathrm{sh}(x) - 2\mathrm{ch}(x) = 0\,;$ (e) $2^{\sqrt{x}} = 8^x\,;$ (f) $\sin(3x) = \sin(x)$.

3. Résoudre les inéquations suivantes :

   (a) $x^3 < x\,;$ (b) $\dfrac{e^x + 1}{e^x - 1} \leq 2\,;$ (c) $2 - x < |x + 1|\,;$ (d) $\sin(3x) < \sin(x)$.

4. On pose $\mathrm{th}(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$. Montrer que : $\mathrm{th}(a + b) = \dfrac{\mathrm{th}(a) + \mathrm{th}(b)}{1 + \mathrm{th}(a)\mathrm{th}(b)}$.

Exercice 2
- Inégalités -

1. Soient $(a;\ b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Montrer que : $\dfrac{3a - b}{4} \leq \dfrac{a^2}{a + b}$.
2. En déduire : $\forall (a;\ b;\ c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3,\ \dfrac{a + b + c}{2} \leq \dfrac{a^2}{a + b} + \dfrac{b^2}{b + c} + \dfrac{c^2}{c + a}$.
3. Montrer que : $\forall (a;\ b;\ c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$, $\dfrac{a^2}{a + b} + \dfrac{b^2}{b + c} + \dfrac{c^2}{c + a} < a + b + c$.

Exercice 3
- Systèmes -

Les nombres a et b étant deux réels, on considère le système suivant : $\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}$.

1. Résoudre le système pour $a = 1$.
2. Résoudre le système pour $a = -2$ et $b = -2$.
3. Résoudre le système pour $a \neq 1$.

Exercice 4
- Logique -

Soit $A \subset \mathbb{R}$ et on considère les assertions suivantes :

$\mathcal{P}$: « $\forall (x;\ y) \in A^2, \forall t \in [0;\ 1],\ tx + (1-t)y \in A$ »
$\mathcal{Q}$: « $\forall (x;\ y) \in A^2, \forall t \in [0;\ 1],\ (1-t)x + ty \in A$ »
$\mathcal{R}_1$: « $\exists M \in \mathbb{R}\ /\ \forall x \in A,\ x \leq M$ »
$\mathcal{R}_2$: « $\exists m \in \mathbb{R}\ /\ \forall x \in A,\ x \geq m$ ».

1. Écrire les négations de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}_1$.
2. On pose : $A = [0;\ 1]$. L'assertion $\mathcal{P}$ est-elle vraie ? L'assertion $\mathcal{R}_1$ est-elle vraie ? Justifiez.
3. On pose $A = \mathbb{Z}$. L'assertion $\mathcal{P}$ est-elle vraie ? L'assertion $\mathcal{R}_1$ est-elle vraie ? Justifiez.
4. Écrire la contraposée de $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$.
5. Montrer que $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$.
6. On considère dans cette question : $A \subset \mathbb{R}$ tel que A vérifie la propriété $\mathcal{P}$ mais ne vérifie ni la propriété $\mathcal{R}_1$, ni la propriété $\mathcal{R}_2$. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Justifier l'existence de $(a_1;\ a_2) \in A^2$ tel que $a_1 < x < a_2$.
   (b) Déterminer $t_0 \in [0;\ 1]$ tel que $x = t_0 a_1 + (1-t_0)a_2$. Qu'en déduit-on pour x ?
   (c) Montrer que $A = \mathbb{R}$.

Exercice 5
- Trigonométrie -

PARTIE (A). **Des formules que l'on redémontre.**

(Q 1) Énoncer et démontrer la formule transformant $\tan(x+y)$ en fonction de $\tan(x)$ et de $\tan(y)$, les nombres x et y étant définis de telle sorte que les tangentes le soient aussi.
(Q 2) En déduire que $\tan(2x) = \frac{2X}{1-X^2}$ où $X = \tan(x)$.
(Q 3) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$.

PARTIE (B). **Des nouvelles valeurs remarquables.**

(Q 1) Quel est l'ensemble de définition de $x \mapsto \tan(5x)$.
(Q 2) Résoudre $\tan(5x) = 0$.
(Q 3) Résoudre également l'équation polynomiale $X[X^4 - 10X^2 + 5] = 0$.
(Q 4) En utilisant les questions A2 et A1, montrer que $\tan(5x) = \frac{X[X^4-10X^2+5]}{5X^4-10X^2+1}$ où $X = \tan(x)$.
(Q 5) De ces trois questions, en déduire que $\tan(\frac{\pi}{5}) = \sqrt{5-2\sqrt{5}}, \tan(\frac{2\pi}{5}) = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$ ainsi que les valeurs de $\tan(\frac{3\pi}{5})$ et $\tan(\frac{4\pi}{5})$.
(Q 6) Montrer que $\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$. En déduire $\cos(\frac{\pi}{5}) = \frac{1}{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$ puis que $\cos(\frac{\pi}{5}) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$.
(Q 7) En utilisant la question A3 , en déduire que $\cos(\frac{3\pi}{5}) = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$.
(Q 8) Résoudre alors $2\cos(2x) - 2\cos(x) + 1 = 0$.

⋆ ⋆ ⋆
FIN
⋆ ⋆ ⋆

Correction de l'exercice 1:

1. Cf. fiche méthode 3.
2. (a) cf TD1.
   (b) Cousin germain de l'exercice 1(b) du TD2. $\boxed{S=\{\frac{1}{2}\}.}$
   (c) Cousin germain de l'exercice 3(e) du TD2. $\boxed{S=\emptyset.}$
   (d) Comme pour $\mathrm{sh}(x)=2$ (cf fiche mthode 2) on pose : $X=e^x$. $\boxed{S=\{\frac{1}{2}\ln(5)\}.}$
   (e) Petit frère de l'exercice 6(a) du TD2.
   (f) Cousin germain de l'exercice 1(a) du TD3.
3. (a) cf TD1.
   (b) cf TD2.
   (c) Cf TD2.
   (d) Cousin germain de l'exercice 2(b) du TD3. $\boxed{S=]-\pi/4;\ 0[\cup]\pi/4;\ 3\pi/4[\cup]\pi;\ 5\pi/4[\ [2\pi].}$
4. On écrit $\mathrm{th}(a+b)=\dfrac{\mathrm{sh}(a+b)}{\mathrm{ch}(a+b)}$. Ensuite on exprime $\mathrm{ch}(a+b)$ et $\mathrm{sh}(a+b)$ en focntion de $\mathrm{sh}(a), \mathrm{sh}(b), \mathrm{ch}(a), \mathrm{ch}(b)$ (exercice 5 du TD3) puis on utilise la même technique que pour la démonstration de $\tan(a+b)$ (cf Cours).

Correction de l'exercice 2:

1. Par équivalences :
$$\begin{aligned}\frac{3a-b}{4}\leq\frac{a^2}{a+b} &\Leftrightarrow (3a-b)(a+b)\leq 4a^2\\ &\Leftrightarrow 3a^2+2ab-b^2\leq 4a^2\\ &\Leftrightarrow a^2-2ab+b^2\geq 0\\ &\Leftrightarrow (a-b)^2\geq 0\end{aligned}$$
Puisque $\forall(a;\ b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2, (a-b)^2\geq 0$ on en déduit que $\boxed{\forall(a;\ b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2,\ \frac{3a-b}{4}\leq\frac{a^2}{a+b}.}$
2. D'après la question précédente nous avons donc :
$$\frac{3a-b}{4}\leq\frac{a^2}{a+b} \quad (1)$$
$$\frac{3b-c}{4}\leq\frac{b^2}{b+c} \quad (2)$$
$$\frac{3c-a}{4}\leq\frac{c^2}{c+a} \quad (3)$$
Ainsi, en sommant, nous obtenons : $\boxed{\frac{a+b+c}{2}\leq\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}.}$
3. Puisque $ab>0$ par hypothèse, nous avons $a^2<a^2+ab$ donc $a^2<a(a+b)$ ce qui donne : $\dfrac{a^2}{a+b}<a$; De la même façon $\dfrac{b^2}{b+c}<b$ et $\dfrac{c^2}{c+a}<c$ ce qui donne en sommant : $\boxed{\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}<a+b+c.}$

Correction de l'exercice 3:

1.
$$\left\{\begin{array}{l}x+by+z=1\\x+by+z=b\\x+by+z=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x+by+z=1\\x+by+z=b\end{array}\right.$$
Nous avons donc deux cas :
— <u>Si $b\neq 1$</u>, le système est impossible : $S=\emptyset$.

— Si $b=1$, le système est équivalent à : $x+y+z=1 \Leftrightarrow x=1-y-z$. On en déduit une infinité de solutions et plus précsicément : $\boxed{S=\{(1-y-z,y,z),(y,z)\in\mathbb{R}^2\}}$.

2.

$$\begin{cases} -2x-2y+z=1 \\ x+4y+z=-2 \\ x-2y-2z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+4y+z=-2 \\ x-2y-2z=1 \\ -2x-2y+z=1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+4y+z=-2 \\ 6y+3z=-3 \\ 6y+3z=-3 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+4y+z=-2 \\ 2y+z=-1 \\ 0=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=z \\ y=-\frac{1}{2}-\frac{z}{2} \end{cases}$$

Ainsi : $\boxed{S=\{(z,-\frac{1}{2}-\frac{z}{2},z).\}}$.

3.

$$\begin{cases} ax+by+z=1 \\ x+aby+z=b \\ x+by+az=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+by+az=1 \\ x+aby+z=b \\ ax+by+z=1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+by+az=1 \\ b(1-a)y+(a-1)z=1-b \\ b(1-a)y+(1-a)(1+a)z=1-a \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+by+az=1 \\ b(1-a)y+(a-1)z=1-b \\ (a-1)(a+2)z=a-b \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+by+az=1 \\ by-z=\dfrac{b-1}{a-1} \\ (a+2)z=\dfrac{a-b}{a-2} \end{cases}$$

On distingue alors plusieurs cas :

— Si $a=-2$ et $b=-2$, alors le système déjà été résolu précédemment.

— Si $a=-2$ et $b\neq -2$, alors le est équivalent au système : $\begin{cases} x+by+az=1 \\ a-b=0 \end{cases}$ ce qui est impossible : $S=\emptyset$.

— Si $a\neq -2$ et $b\neq 0$. Alors :

$$\left\{\begin{array}{l} x+by+az=1 \\ x+aby+z=b \\ z=\dfrac{a-b}{(a-1)(a+2)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x+by+az=1 \\ by-z=\dfrac{b-1}{a-1} \\ z=\dfrac{a-b}{(a-1)(a+2)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x=\dfrac{a-b}{(a-1)(a+2)} \\ y=\dfrac{ab+b-2}{b(a-1)(a+2)} \\ z=\dfrac{a-b}{(a-1)(a+2)} \end{array}\right.$$

ce qui donne une unique solution.

— Si $a \neq -2$ et $a \neq -1$ et $b=0$. Nous avons donc nécessairement : $z=\dfrac{1}{a-1}$ et $z=\dfrac{1}{(a-1)(a+2)}$ donc : $1=\dfrac{1}{a+2}$ c'est à dire $a=-1$. Donc $S=\emptyset$.

— Si $a \neq -2$ et $a=-1$ et $b=0$, alors $x-z=1$ et $z-x=1$ ce qui est impossible : $S=\emptyset$.

Correction de l'exercice 4:

1. La négation de $\mathcal{P}$ est : « $\exists x \in A, \exists y \in A, \exists t \in [0;\ 1]\ /\ tx+(1-t)y \notin A$ »

   La négation de $\mathcal{R}_1$ est : « $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in A\ /x > M$ »

2. Oui l'assertion est L'assertion $\mathcal{P}$ vraie. En effet, soient x et y deux éléments de A c'est à dire tels que : $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq 1$. Prenons $t \in [0;\ 1]$. Alors $0 \leq (1-t)y \leq 1-t$ car $1-t \geq 0$ et $0 \leq tx \leq t$ car $t \geq 0$. En sommant nous en déduisons : $0 \leq tx+(1-t)y \leq 1$ ce qui prouve que : $(1-t)x+ty \in A$, ce qu'il fallait démontrer.

   Oui l'assertion $\mathcal{R}_1$ est vraie car $M=1$ convient.

3. Non l'assertion est fausse car si $x=0$, $y=1$ nous avons bien $x \in A$, $y \in A$ mais $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y \notin A$ donc nous n'avons pas pour tout $t \in [0;\ 1]$, $tx+(1-t)y \in A$.

   L'assertion $\mathcal{R}_1$ est également fausse car sa négation est vraie. En effet si M est un réel quelconque, alors en considérant x l'entier relatif strictement plus grand que M, nous avons bien $x > M$.

4. La contraposée est $\neq \mathcal{Q} \Rightarrow \neq \mathcal{P}$. $\neg\mathcal{P}$ a été déterminée précédemment. On écrit $\neq \mathcal{Q}$ de façon similaire.

5. On suppose que $\mathcal{P}$ est vraie. On veut montrer que $\mathcal{Q}$ est vraie. Soient donc x et y deux éléments de A et $t \in [0;\ 1]$/ On veut montrer qu'alors $(1-t)x+ty \in A$. Posons $T=1-t$. Alors $T \in [0;\ 1]$. Or, $\mathcal{P}$ est vraie donc nécessairement $Tx+(1-T)y \in A$. Puisque $Tx+(1-T)y=(1-t)x+ty$ on en déduit que $(1-t)x+ty \in A$ ce qu'il fallait démontrer.

   On suppose que $\mathcal{Q}$ est vraie. On veut montrer que $\mathcal{P}$ est vraie. Soient donc x et y deux éléments de A et $t \in [0;\ 1]$/ On veut montrer qu'alors $tx+(1-t)y \in A$. Posons $T=1-t$. Alors $T \in [0;\ 1]$. Or, $\mathcal{Q}$ est vraie donc nécessairement $(1-T)x+Ty \in A$. Puisque $(1-T)x+Ty=tx+(1-t)y$ on en déduit que $tx+(1-t)y \in A$ ce qu'il fallait démontrer.

   Par double implication : $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$.

6. (a) Nous avons :
   $\neg\mathcal{R}_1$: « $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in A\ /x > M$ »et $\neg\mathcal{R}_2$: « $\forall m \in \mathbb{R}, \exists x \in A\ /x < m$ ».

   Soit donc $x \in \mathbb{R}$. La négation de $\mathcal{R}_1$ étant vraie par hypothèse, $\exists a_2 \in A\ /\ a_2 > x$. De même la négation de $\mathcal{R}_2$ étant vraie on en déduit l'existence de $a_2 \in A$ tel que : $a_1 < x$. Nous avons donc $a_1 < x < a_2$ ce qu'il fallait démontrer.

   (b) Puisque $a_1 < x < a_2$ nous avons $a_1 - a_2 \neq 0$. Posons alors $t_0 = \dfrac{a_2 - x}{a_2 - a_1}$. Des inégalités $a_1 < x < a_2$, il est clair que $a_2 - x > 0$ et $a_2 - a_1 > 0$ ce qui prouve que $t > 0$. De plus : $x > a_1$ donc $-x < -a_1$ ce qui donne en sommant

$a_2 - x < a_2 - a_1$. En divisant par $a_2 - a_1 > 0$ on en déduit : $t_0 < 1$. Par conséquent $t \in [0;\ 1]$. Pour finir :

$\boxed{t_0 a_1 + (1 - t_0)a_2 =} t_0(a_1 - a_2) + a_2 = -(a_2 - x) + a_2 = \boxed{x}$ ce qu'il fallait démontrer.

Comme $\mathcal{P}$ est satisfaite et que $(a_1;\ a_2) \in A^2$ on en déduit $t_0 a_1 + (1 - t_0)a_2 \in A$ ce qui prouve que $x \in A$!

(c) La question précédente montre l'inclusion $\mathbb{R} \subset A$. Comme $A \subset \mathbb{R}$ par hypothèse, par double inclusion : $\boxed{A = \mathbb{R}.}$

Correction de l'exercice 5:

PARTIE (A). **Des formules que l'on redémontre.**

(Q 1) Énoncer et démontrer la formule transformant $\tan(x + y)$ en fonction de $\tan(x)$ et de $\tan(y)$, les nombres x et y étant définis de telle sorte que les tangentes le soient aussi.

$$\begin{aligned}
\tan(x+y) &= \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin(x)\cos(y)+\sin(y)\cos(x)}{\cos(x)\cos(y)-\sin(y)\sin(x)} \\
&\underset{\sin(a)=\tan(a)\cos(a)}{=} \frac{\cos(x)\tan(x)\cos(y)+\tan(y)\sin(y)\sin(x)}{\cos(x)\cos(y)-\cos(x)\cos(y)\tan(x)\tan(y)} \\
&= \frac{\cancel{\cos(x)\cos(y)}\Big(\tan(x)+\tan(y)\Big)}{\cancel{\cos(x)\cos(y)}\Big(1-\tan(x)\tan(y)\Big)} \\
&= \boxed{\frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}}
\end{aligned}$$

(Q 2) En déduire que $\tan(2x) = \frac{2X}{1-X^2}$ où $X = \tan(x)$.

$$\tan(2x) = \frac{\tan(x)+\tan(x)}{1-\tan(x)\tan(x)} = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$$

(Q 3) Cf fiche méthode, chapitre 3 !

PARTIE (B). **Des nouvelles valeurs remarquables.**

(Q 1) $\tan(5x)$ a un sens si et seulement si $5x \neq \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{10}[\frac{\pi}{5}]$. Donc, l'ensemble de définition de cette fonction est $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{10}[\frac{\pi}{5}]\}$.

(Q 2) Par propriété,

$$\tan(5x) = 0 \Leftrightarrow 5x \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow x \equiv 0[\frac{\pi}{5}]$$

(Q 3)

$$X(X^4 - 10X^2 + 5) = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} X &=& 0 \\ X^4 - 10X^2 + 5 &=& 0 \end{array}\right.$$

On reconnait une équation bicarrée. on pose $Y = X^2$. On résout $Y^2 - 10Y + 5 = 0 \Leftrightarrow Y = \frac{10\pm\sqrt{80}}{2} = \frac{10\pm4\sqrt{5}}{2} = 5 \pm 2\sqrt{5}$. Ces deux solutions sont des réels positifs. On en déduit que

$$X^2 = 5 \pm 2\sqrt{5} \Leftrightarrow X = \sqrt{5 \pm 2\sqrt{5}} \text{ ou } X = -\sqrt{5 \pm 2\sqrt{5}}.$$

Ainsi

$$\boxed{S = \left\{0; \sqrt{5+2\sqrt{5}}; \sqrt{5-2\sqrt{5}}; -\sqrt{5+2\sqrt{5}}; -\sqrt{5-2\sqrt{5}}\right\}}$$

(Q 4)

$$\tan(5x) = \tan(2x+3x) = \frac{\tan(2x)+\tan(3x)}{1-\tan(2x).\tan(3x)}$$

Or

$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$$

$$\begin{aligned}
\tan(3x) &= \frac{\tan(x)+\tan(2x)}{1-\tan(x).\tan(2x)} \\
&= \frac{\tan(x)+\frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}}{1-\tan(x)\times\frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}} \\
&= \frac{\frac{\tan(x)-\tan^3(x)+2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}}{\frac{1-\tan^2(x)-2\tan^2(x)}{1-\tan^2(x)}} \\
&= \frac{\tan(x)-\tan^3(x)+2\tan(x)}{1-\tan^2(x)-2\tan^2(x)} = \frac{-\tan^3(x)+3\tan(x)}{1-3\tan^2(x)}
\end{aligned}$$

En conclusion, posons $X=\tan(x)$. Alors

$$\begin{aligned}
\tan(5x) &= \frac{\frac{2X}{1-X^2}+\frac{3X-X^3}{1-3X^2}}{1-\frac{2X}{1-X^2}\times\frac{3X-X^3}{1-3X^2}} \\
&= \frac{2X[1-3X^2]+[3X-X^3][1-X^2]}{(1-3X^2)(1-X^2)-2X\times(3X-X^3)} \\
&= \frac{2X-6X^3+3X-X^3-3X^3+X^5}{1-X^2-3X^2+3X^4-6X^2+2X^4} \\
&= \frac{5X-10X^3+X^5}{1-10X^2+5X^4}
\end{aligned}$$

(Q 5) Finalement, on sait que les nombres $0;\frac{\pi}{5};\frac{2\pi}{5};\frac{3\pi}{5};\frac{4\pi}{5}$ sont solutions de $\tan(5x)=0$. De plus, pour $x\in\mathbb{R}-\{\frac{\pi}{10}[\frac{\pi}{5}]\}$:

$$\tan(5x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan(x) &= \;= X \\ \frac{5X-10X^3+X^5}{1-10X^2+5X^4} &= \;0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan(x) &= \;= X \\ X &\in \;\left\{0;\sqrt{5+2\sqrt{5}};\sqrt{5-2\sqrt{5}};-\sqrt{5+2\sqrt{5}};-\sqrt{5-2\sqrt{5}}\right\} \end{cases}$$

Or $\frac{\pi}{5};\frac{2\pi}{5}\in[0;\frac{\pi}{2}[\Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{5}\right)>0;\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)>0$. De plus, $\tan$ est croissante sur $[0:\frac{\pi}{2}[$. Ainsi,

$$0\leq\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)<\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

En conclusion, $\tan(\frac{\pi}{5})=\sqrt{5-2\sqrt{5}}$ et $\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\sqrt{5+2\sqrt{5}}$. De même, $0>\tan\left(\frac{3\pi}{5}\right)>\tan\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ et $\tan(\frac{3\pi}{5})=-\sqrt{5-2\sqrt{5}}$ et $\tan\left(\frac{4\pi}{5}\right)=-\sqrt{5+2\sqrt{5}}$.

(Q 6) On a $\forall x\in\mathbb{R}-\pi/2[\pi]$

$$1+\tan^2(x)=1+\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}=\frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}=\frac{1}{\cos^2(x)}$$

par la relation fondamentale de la trigonométrie. Puis,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos^2(\pi/5)} &= 1+\tan^2(\pi/5)=1+\sqrt{5-2\sqrt{5}}^2=1+5-2\sqrt{5}=6-2\surd \\
\Leftrightarrow\quad \cos^2(\pi/5) &= \frac{1}{6-2\sqrt{5}} \\
\Leftrightarrow\quad \cos(\pi/5) &= \pm\frac{1}{\sqrt{6-2\sqrt{5}}} \\
\Leftrightarrow\quad \cos(\pi/5) &= +\frac{1}{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}
\end{aligned}$$

puisque $\cos$ est positive sur $]-\pi/2;\pi/2[$.

Montrons que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}=\frac{\sqrt{5}+1}{4} \quad&\Leftrightarrow\quad \text{car les nombres sont positifs } \frac{1}{6-2\sqrt{5}}=\frac{[\sqrt{5}+1]^2}{16} \\
&\Leftrightarrow\quad \frac{1}{6-2\sqrt{5}}=\frac{5+1+2\sqrt{5}}{16} \\
&\Leftrightarrow\quad 16=\left(6-2\sqrt{5}\right)\left(6+2\sqrt{5}\right) \\
&\Leftrightarrow\quad 16=36-4\times5
\end{aligned}$$

Cette dernière égalité est vraie, la première l'est aussi par équivalences successives. Ainsi, $\cos(\frac{\pi}{5}) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

(Q 7)

$$\begin{aligned}\cos(\tfrac{3\pi}{5}) &= 4(\cos(\tfrac{\pi}{5}))^3 - 3\cos(\tfrac{\pi}{5})\\ &= \tfrac{\sqrt{5}+1}{4}\left(4 \times \left(\tfrac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2 - 3\right)\\ &= \tfrac{\sqrt{5}+1}{4} \times \tfrac{6+2\sqrt{5}-12}{4}\\ &= \tfrac{\sqrt{5}+1}{4} \times \tfrac{\sqrt{5}-3}{2}\\ &= \tfrac{5-3-2\sqrt{5}}{8}\\ &= \boxed{\frac{1-\sqrt{5}}{4}}\end{aligned}$$

(Q 8) Résoudre alors

$$\begin{aligned}2\cos(2x) - 2\cos(x) + 1 = 0 &\Leftrightarrow 2[2\cos^2(x) - 1] - 2\cos(x) + 1 = 0\\ &\Leftrightarrow 4\cos^2(x) - 2\cos(x) - 1 = 0\\ &\Leftrightarrow \cos(x) = \tfrac{2\pm2\sqrt{5}}{2\times4} = \tfrac{1\pm\sqrt{5}}{4}\\ &\Leftrightarrow \cos(x) = \cos(\tfrac{\pi}{5}) \text{ ou } \cos(x) = \cos(\tfrac{3\pi}{5})\\ &\Leftrightarrow x \equiv \pm\tfrac{\pi}{5}[2\pi] \text{ ou } x \equiv \pm\tfrac{3\pi}{5}[2\pi]\end{aligned}$$

Finalement, $\mathcal{S} = \{\pm\frac{\pi}{5}[2\pi]; \pm\frac{3\pi}{5}[2\pi]\}$.

⋆ ⋆ ⋆
FIN
⋆ ⋆ ⋆