À rendre le vendredi 22 Mars

Devoir en temps libre n° 9

EXERCICE

Pour tout entier naturel, on note : $g_n(x) = \cos(nx)$ et $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(kx) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

1. Que vaut : $S''_{n+1}(x) + (n+1)^2 S_{n+1}(x)$? En particulier, vérifier que $S''_{n+1}(x) + (n+1)^2 S_{n+1}(x) \in \mathrm{Vect}(g_0,\ \ldots,\ g_n)$ puis en déduire par récurrence que la famille de fonctions : $(g_0,\ \ldots, g_n)$ est libre.
2. Montrer que $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} S_n(x)\,dx = a_0$.
3. (a) Calculer : $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2(kx)\,dx$ pour $k \neq 0$ puis $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(kx)\cos(px)\,dx$ avec $p \neq k$.

   (b) En déduire : $a_p = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} S_n(x)\cos(px)\,dx$ si $p \neq 0$.

Correction de l'exercice :

Pour tout entier naturel, on note : $g_n(x) = \cos(nx)$ et $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \cos(kx)$

1. Par linéarité de la dérivation : $S''_{n+1}(x) = -\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} a_k k^2 \cos(kx)$.

   Ainsi :
   $S''_{n+1}(x) + (n+1)^2 S_{n+1}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} a_k((n+1)^2 - k^2)\cos(kx)$. on remarque alors que pour $k = n+1$, $a_k((n+1)^2 - k^2)\cos(kx) = 0$ ce qui assure que :

$$\boxed{S''_{n+1}(x) + (n+1)^2 S_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k((n+1)^2 - k^2)\cos(kx) \in \mathrm{Vect}(g_0,\ \ldots,\ g_n).}$$

   Montrons par récurrence faible que $(g_0,\ \ldots,\ g_n)$ est libre pour tout entier naturel n.

   - **Initialisation.** Pour $n = 0$, g_0 est une fonction nulle. Or toute famille de vecteurs constituée d'un élément non nul est nécessairement libre.
   - **Hérédité.** On suppose : $(g_0,\ \ldots,\ g_n)$ libre et on veut montrer que : $(g_0,\ \ldots, g_{n+1})$ est libre. Soient donc : $(a_1,\ \ldots,\ a_{n+1})$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} a_k \cos(kx) = 0$. Posons alors : $S_{n+1}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} a_k \cos(kx)$. Alors S_{n+1} est la fonction nulle donc $S''_{n+1} + (n+1)^2 S_n$ également. Nous avons donc, en accord avec les calculs précédents :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n} a_k((n+1)^2 - k^2)\cos(kx) = 0.$$

     Or par hypothèse de récurrence, $(g_0,\ \ldots,\ g_n)$ est libre donc nécessairement : $\boxed{\forall k \in [\![0;\ n]\!],}$ $a_k((n+1)^2 - k^2) = 0 \Leftrightarrow \boxed{a_k = 0}$ car $(n+1)^2 - k^2 \neq 0$. Nous avons donc :

     $\forall x \in \mathbb{R},\ a_{n+1}\cos((n+1)x) = 0$. En prenant $x = 0$, il vient : $\boxed{a_{n+1} = 0.}$

     Nous avons donc montré que : $\boxed{\forall k \in [\![0;\ n+1]\!],\ a_k = 0}$ ce qui prouve que $(g_0,\ \ldots,\ g_{n+1})$ est <u>libre</u> ce qui prouve l'hérédité.

2. Par linéarité de l'intégration :

   $\displaystyle\int_0^{2\pi} S_n(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} a_k \int_0^{2\pi} \cos(kx)\,dx$. Or, pour $k = 0$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(kx)\,dx = \int_0^{2\pi} 1\,dx = 2\pi$ et pour $k \neq 0$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(kx)\,dx = \frac{1}{k}[\sin(kx)]_0^{2\pi} = 0$. Au final : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \int_0^{2\pi} \cos(kx)\,dx = 2\pi a_0$, ce qui prouve au final que :

$$\boxed{a_0 = \int_0^{2\pi} S_n(x)\,dx.}$$

3. (a)
$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos^2(kx)\,dx &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1+\cos(2kx)}{2}\right) dx \\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1\,dx + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(2kx)\,dx \\ &= \pi + \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2k}[\sin(2kx)]_0^{2\pi} \text{ car } k \neq 0 \\ &= \boxed{\pi.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi} \cos(kx)\cos(px)\,dx \\ =\ &\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(\cos((k+p)x) + \cos((k-p)x))\,dx \\ =\ &\tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos((k+p)x)\,dx + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos((k-p)x)\,dx \\ =\ &\tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{k+p}[\sin((k+p)x)]_0^{2\pi} + \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{k-p}[\sin((k-p)x)]_0^{2\pi} \text{ car } k+p \neq 0 \text{ et } k-p \neq 0 \\ =\ &\boxed{0.}\end{aligned}$$

   (b) Ainsi, si $p \neq 0$, par linéarité :

$$\int_0^{2\pi} S_n(x)\cos(px)\,dx \quad = \sum_{k=0}^{n} a_k \int_0^{2\pi} \cos(kx)\cos(px)\,dx$$

Comme dans la somme, la seule valeur de k pour laquelle l'intégrale est non nulle est pour $k = p$, en accord avec les calculs précédents, nous en déduisons :
$\displaystyle\int_0^{2\pi} S_n(x)\cos(px)\,dx = a_p \int_0^{2\pi} \cos^2(px)\,dx = a_p\pi$ car $p \neq 0$ et d'après les calculs ci-dessus. Au final nous obtenons bien :
$\boxed{a_p = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} S_n(x)\cos(px)\,dx}$ si $p \neq 0$

⋆ ⋆ ⋆
FIN
⋆ ⋆ ⋆