À rendre le mardi 29 Avril

Devoir en temps libre n° 9

EXERCICE 1

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation : $-x^3 + 3x^2 = \frac{1}{n}$ admet une unique solution sur $]0;\ 1[$ que l'on notera x_n.
2. On note f la fonction définie par $f(x) = -x^3 + 3x^2$. Montrer que $f\left(\frac{1}{\sqrt{3n}}\right) \leq \frac{1}{n} \leq f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{\sqrt{3n}} \leq x_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}},$$
puis que (x_n) converge vers un réel à préciser.
3. Vérifier que $3x_n^2\left(1 - \frac{x_n}{3}\right) = \frac{1}{n}$. En déduire un équivalent simple de x_n que l'on notera a_n.
4. On pose : $v_n = x_n - a_n$.
   (a) Montrer que : $(1 + \sqrt{3n}v_n)^2\left(1 - \frac{v_n}{3} - \frac{1}{3\sqrt{3n}}\right) = 1$. En déduire : $v_n = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.
   (b) Montrer que : $-v_n + 2\sqrt{3n}v_n + v_n^2(-\sqrt{3n} + 3n) - nv_n^3 = \frac{1}{3\sqrt{3n}}$. En déduire $v_n \sim \frac{1}{18n}$ puis :
$$x_n = \frac{1}{\sqrt{3n}} + \frac{1}{18n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

EXERCICE 2

On considère $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ avec $A \neq 0_3$ ainsi que $f : \begin{cases} \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R}) \\ X \mapsto AX \end{cases}$ et $\varphi : \begin{cases} \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ M \mapsto AM \end{cases}$.

1. Vérifier que f et φ sont bien définis puis montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_{31}(\mathbb{R}))$ et $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))$.
2. Montrer que f est un isomorphisme si et seulement si A est inversible.
3. Montrer que si f est un isomorphisme, alors φ est un isomorphisme.
4. On suppose que f n'est pas un isomorphisme. Montrer que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$ ou 2.
5. On suppose $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$ et on note (X_1, X_2) une base de $\mathrm{Ker}(f)$. Pour $i \in [\![1;\ 3]\!]$, on note :
   - A_i l'élément de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont la i-ème colonne est égale à X_1 et les autres colonnes sont nulles.
   - B_i l'élément de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont la i-ème colonne est égale à X_2 et les autres colonnes sont nulles.

   Plus précisément, si $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ alors $A_1 = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ y_1 & 0 & 0 \\ z_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & 0 \\ 0 & y_1 & 0 \\ 0 & z_1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & y_1 \\ 0 & 0 & z_1 \end{pmatrix}$.

   (a) Montrer que $(A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3)$ est une famille libre de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
   (b) Montrer que $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = 6$.
6. Montrer que $\mathrm{rg}(\varphi) = 3\mathrm{rg}(f)$, et ceci quelle que soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non nulle.

Correction de l'exercice 1:

1. On pose : f la fonction définie sur $]0;\ 1[$ par $f(x) = -x^3 + 3x^2$. f est polynômiale donc dérivable sur $]0;\ 1[$ et $\forall x \in]0;\ 1[$, $f'(x) = -3(x^2-1) = -3(x-1)(x+1)$. Ainsi, $\forall x \in]0;\ 1[$, $f'(x) > 0$. Ainsi, f est strictement croissante sur $]0;\ 1[$ donc induit une bijection de $]0;\ 1[$ vers $f(]0;\ 1[)$. De plus, f est continue sur $]0;\ 1[$, donc $f(]0;\ 1[) =]\lim\limits_{x\to 0^+} f(x);\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)[= \boxed{]0;\ 2[.}$ Enfin, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n} \in]0;\ 2[$ donc <u>l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ admet une unique solution que l'on notera x_n.</u>

2. • On calcule : $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = -\dfrac{1}{n\sqrt{n}} + 3\dfrac{1}{n} = \dfrac{-1+3\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$. Or : $\dfrac{-1+3\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} \Leftrightarrow -1 + 3\sqrt{n} > \sqrt{n} \Leftrightarrow 2\sqrt{n} \geq 1$. Or cette dernière inégalité est toujours vraie puisque $n \geq 1$. Par conséquent : $\boxed{f\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq \dfrac{1}{n}.}$

   • De même : $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3n}}\right) = -\dfrac{1}{3n\sqrt{3n}} + \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{n}$.

   • Nous avons donc : $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3n}}\right) \leq f(x_n) \leq f\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \Leftrightarrow \boxed{\dfrac{1}{\sqrt{3n}} \leq x_n \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}},}$ puisque f est strictement croissante. Finalement :

   • $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$ donc par théorème d'encadrement, (x_n) converge et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0.}$

3. Puisque : $-x_n^3 + 3x_n^2 = \dfrac{1}{n}$, en factorisant par $3x_n^2$, nous obtenons : $\boxed{3x_n^2\left(1 - \dfrac{x_n}{3}\right) = \dfrac{1}{n}.}$

   Enfin, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, nous avons : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \dfrac{x_n}{3}\right) = 1$. Or $1 \neq 0$, donc : $1 - \dfrac{x_n}{3} \sim 1$. Par produit : $3x_n^2\left(1 - \dfrac{x_n}{3}\right) \sim 3x_n^2$. Enfin, $3x_n^2\left(1 - \dfrac{x_n}{3}\right) = \dfrac{1}{n}$ donc : $3x_n^2 \sim \dfrac{1}{n} \Leftrightarrow x_n^2 \sim \dfrac{1}{3n}$. Par passage à la racine, et puisque $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n > 0$, nous obtenons : $\boxed{x_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{3n}}.}$

4. (a) Puisque : $x_n = v_n + \dfrac{1}{\sqrt{3n}}$ et $3x_n^2\left(1 - \dfrac{x_n}{3}\right) = \dfrac{1}{n}$, nous obtenons : $3\left(v_n + \dfrac{1}{\sqrt{3n}}\right)^2\left(1 - \dfrac{v_n}{3} - \dfrac{1}{3\sqrt{3n}}\right) = \dfrac{1}{n}$. Or $v_n + \dfrac{1}{\sqrt{3n}} = \left(\sqrt{3n}v_n + 1\right)\dfrac{1}{\sqrt{3n}}$. Ainsi : $3\left(v_n + \dfrac{1}{\sqrt{3n}}\right)^2 = \dfrac{1}{n}\left(\sqrt{3n}v_n + 1\right)$ et donc : $3\left(v_n + \dfrac{1}{\sqrt{3n}}\right)^2\left(1 - \dfrac{v_n}{3} - \dfrac{1}{3\sqrt{3n}}\right) = \dfrac{1}{n} \Leftrightarrow$ $\boxed{(1 + \sqrt{3n}v_n)^2\left(1 - \dfrac{v_n}{3} - \dfrac{1}{3\sqrt{n}}\right) = 1.}$

   Puisque : $x_n \geq \dfrac{1}{\sqrt{3n}}$, nous en déduisons : $v_n \geq 0 \Rightarrow 1 + \sqrt{n}v_n \geq 0$. On en déduit : $\sqrt{n}v_n = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\dfrac{1}{1 - \dfrac{v_n}{3} - \dfrac{1}{3\sqrt{n}}}} - 1$ donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}v_n = 0$ par opérations usuelles. Nous en déduisons : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n}{\dfrac{1}{\sqrt{n}}} = 0$, ce qui prouve : $v_n = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

   (b) On développe la relation : $(1 + \sqrt{3n}v_n)^2\left(1 - \dfrac{v_n}{3} - \dfrac{1}{3\sqrt{3n}}\right)$ ce qui donne la relation : $-v_n + 2\sqrt{3n}v_n + v_n^2(-\sqrt{3n} + 3n)_n v_n^3 = \dfrac{1}{3\sqrt{3}n}$. Or : $-v_n + 2\sqrt{3n}v_n + v_n^2(-\sqrt{3n} + 3n)_n v_n^3 \sim 2\sqrt{3n}v_n$. En effet : $\dfrac{-v_n + 2\sqrt{3n}v_n + v_n^2(-\sqrt{3n} + 3n) - nv_n^3}{2\sqrt{3n}v_n} = -\dfrac{1}{2\sqrt{3n}} - \dfrac{v_n}{2} + \dfrac{v_n\sqrt{3n}}{2} - \dfrac{v_n^2\sqrt{n}}{2\sqrt{3}}$. Or $v_n = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n\sqrt{3n}}{2} = 0$. Il s'ensuit : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n^2\sqrt{n}}{2\sqrt{3}} = 0$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$. Par opérations usuelles, le quotient tend vers 1, ce qu'il fallait

démontrer.

Ainsi : $-v_n+2\sqrt{3n}v_n+v_n^2(-\sqrt{3n}+3n)_n v_n^3 = \dfrac{1}{3\sqrt{3}n}$ donc : $\dfrac{1}{3\sqrt{3}n} \sim 2\sqrt{3n}v_n$, ce qui donne : $\boxed{v_n \sim \dfrac{1}{6n^{3/2}}.}$

Pour finir : $v_n = x_n - \dfrac{1}{\sqrt{3n}}$ donc : $x_n - \dfrac{1}{\sqrt{3n}} \sim \dfrac{1}{6n^{3/2}}$. $\Leftrightarrow x_n - \dfrac{1}{\sqrt{3n}} = \dfrac{1}{6n^{3/2}} + o\left(\dfrac{1}{6n^{3/2}}\right) \Leftrightarrow \boxed{x_n = \dfrac{1}{\sqrt{3n}} + \dfrac{1}{6n^{3/2}} + o\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right).}$

Correction de l'exercice 2:

1. Si $X \in \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, alors AX est défini et $AX \in \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$. Ceci prouve que f est définie.

   De même le produit de deux matrices 3×3 existe et est une matrice 3×3 donc φ est défini.
   Puisque nous avons : $f : \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_31(\mathbb{R})$ et $\varphi : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ il ne nous reste plus qu'à montrer que f et φ sont linéaires pour montrer que ce sont des endomorphismes.

   Par propriété du produit matriciel : $A(\lambda X_1 + \mu X_2) = \lambda AX_1 + \mu AX_2$. Ainsi : $f(\lambda X_1 + \mu X_2) = \lambda f(X_1) + \mu f(X_2)$ ce qui prouve que f est linéaire.

   De même : $A(\lambda M_1 + \mu M_2) = \lambda AM_1 + \mu AM_2$. Ainsi : $\varphi(\lambda M_1 + \mu M_2) = \lambda\varphi(M_1) + \mu\varphi(M_2)$ ce qui prouve que φ est linéaire.

2. $\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ si et seulement si le système homogène associé à A n'admet que la solution nulle. Or, par propriété, cela est équivalent à A inversible. Ainsi $\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\} \Leftrightarrow A \in GL_n(\mathbb{R})$. On en déduit : f injective si et seulement si A est inversible. Enfin, f étant un endomorphisme sur un espace de dimension finie, f est bijective si et seulement si f est injective. Au final, un isoorphisme étant une application linéaire bijective, on en clonclue que : f est un isomorphisme si et seuleemnt si A est inversible.

3. On suppose que f est un ismorphisme donc que A est inversible. Alors φ est injective. En effet si $M \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ alors $AM = 0_3$. En multipliant à gauche par A^{-1} on en déduit $M = 0_3$. Par conséquant : $\mathrm{Ker}(\varphi) \subset \{0_3\}$. L'autre inclusion étant évidente car $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de φ, on en déduit : $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$. Ainsi, par propriété φ est injective. de plus φ étant un endomrphisme sur un espace vectoriel de dimension finie, nécésairment φ est bijective donc, φ étant linéaire, φ est un isomorphisme.

4. Puisque f n'est pas un isomorphisme, $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0_{31}\}$. Comme $\mathrm{Ker}(f)$ est un espace vectoriel, nécessairement : $\dim(\mathrm{Ker}(f)) \geq 1$. De plus : $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$ et $\dim(\mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})) = 3$ donc $\dim(\mathrm{Ker}(f) \leq 3$. Enfin si $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3$ alors pour tout $X \in \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$, $AX = 0_{n1}$. Or, si $X_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, alors $AX = C_1$, $AX_2 = C_2$ et $AX_3 = C_3$ où C_i est la ième colonne de A. On en déduit que $C_1 = C_2 = C_3 = 0_{31}$ donc que A est nulle ce qui est contraire aux hypothèses. Au final nous avons $\boxed{1 \leq \dim(\mathrm{Ker}(f)) \leq 2.}$

5. (a) Notons C_i la ième colonne de $\varphi(A_1)$. Alors, par calcul matriciel : $C_1 = AX_1$, $C_2 = 0_{31}$ et $C_3 = 0_{31}$). Or $X_1 \in \mathrm{Ker}(f)$. On en déduit : $AX_1 = 0_{31}$ ce quyi prouve que $\varphi(A_1) = 0_3$ de même pour $A_2, A_3 n B_1, B_2, B_3$. La famille de vecteurs $(A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3)$ est donc une famille d'éléments de $\mathrm{Ker}(\varphi)$. Elle est de plus libre. En effet, soient $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6$ tels que :

   $aA_1+bA_2+cA_3+dB_1+eB_2+fB_3 = 0_{31}$. Si l'on note C_1 la premièrere colonne de $aA_1+bA_2+cA_3+dB_1+eB_2+fB_3$, on constate que $C_1 = aX_1+dX_2$. De même $C_2 = bX_1+eX_2$ et $C_3 = cX_1+fX_2$. Nous avons donc : $aX_1+bX_2 = 0_{31}$. Or, (X_1, X_2) est une base de $\mathrm{Ker}(f)$ donc nécessairement (X_1, X_2) est libre. On en déduit $a = d = 0$. De même $b = e = 0$ et $c = f = 0$ ce qu'il fallait démontrer.

   (b) D'après la question précédente, $\mathrm{Vect}(A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3) = \mathrm{Ker}(\varphi)$. Montrons l'inclusion réciproque. Soit donc $M \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Alors $AM = 0_3$.

Par conséquent, en notant C_1 sa première colonne nous avons $AC_1 = 0_{31}$ donc $C_1 \in Ker(f)$. Alors il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $C_1 = aX_1 + bX_2$ car (X_1, X_2) est une base de $\mathrm{Ker}(f)$ par hypothèse. De même $C_2 = cX_1 + dX_2$ et $C_3 = eX_1 + fX_2$. On en déduit alors :

$$M = aA_1 + cA_2 + eA_3 + bB_1 + dB_2 + fB_3 \Rightarrow M \in \mathrm{Vect}(A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3).$$

Par double inclusion : $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}(A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3)$ ce qui prouve que $(A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Ker}(\varphi)$. Elle est de plus libre d'après la question précédente. Au final $(A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3)$ est une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ ce qui prouve que $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi) = 6$.

6.
   - Si $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$, d'après ci-dessus $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = 6$. Or, d'après le théorème du rang, $\mathrm{rg}(\varphi) = 9 - \dim(\mathrm{Ker}(\varphi))$. Ainsi $\mathrm{rg}(\varphi) = 3$. De plus, toujours d'après le théorème du rang, $\mathrm{rg}(f) = 3 - \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$. Nous avons donc bien $\mathrm{rg}(\varphi) = 3\mathrm{rg}(f)$.
   - Si $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$ alors f est un isomorphisme donc φ également d'après ci-dessus. On en déduit : $\mathrm{rg}(\varphi) = 9$ et $\mathrm{rg}(f) = 3$ donc nous avons bien $\mathrm{rg}(\varphi) = 3\mathrm{rg}(f)$.
   - Si $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$ on procède comme à la question précédente : on note $X_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ une base de $\mathrm{Ker}(f)$. Une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ sera alors : $\left(\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \right)$. Ainsi $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = 3$ donc d'après le théorème du rang $\mathrm{rg}(\varphi) = 6$. Comme $\mathrm{rg}(f) = 3 - \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$ nous avons donc également $\mathrm{rg}(\varphi) = 3\mathrm{rg}(f)$ dans ce cas-ci.

   Comme A est supposée non nulle, nécessairment $\dim(\mathrm{Ker}(f)) \neq 3$. Tous les cas ont donc été étudiés ce qui permet de conclure que : <u>$\mathrm{rg}(\varphi) = 3\mathrm{rg}(f)$, et ceci quelle que soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non nulle.</u>.

⋆⋆⋆

FIN

⋆⋆⋆