À rendre le mardi 27 Février

# Devoir en temps libre n$^{\text{o}}$ 8

## PROBLÈME

(Q 1) Soient $A$, $B$ et $C$ trois points distincts du plan. On note $O$ le centre du cercle circonscrit au triangle $ABC$ et $R$ son rayon. Soit $A'$ le symétrique de $A$ par rapport à $O$.

(Q a) Montrer que : $N \in \mathcal{C}(O;R) \Leftrightarrow \overrightarrow{NA}.\overrightarrow{NA'} = 0$.

(Q b) Soit $I \in (AB)$. Montrer alors que $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IA'}$.

(Q c) En déduire que $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = IO^2 - R^2$. **Ainsi, on a montré que le nombre $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}$ ne dépend pas des points** $A$ et $B$.

(Q d) **Application.** Soit $D \in (IC)$. Montrer que si $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IC}.\overrightarrow{ID}$ alors le point $D$ appartient au cercle $\mathcal{C}(O;R)$.

(Q 2) **Seconde utilisation**. On se place dans le plan $P$ muni du repère usuel $(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$. Soit $R \in \mathbb{R}^*$. On note $f$ l'application du plan dans lui même qui à tout point $M$, distinct de $O$, associe le point $M'$ vérifiant : $\boxed{\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} = R^2 \text{ et } M' \in (OM).}$ On note $(x, y)$ les coordonnées de $M$ et $(X, Y)$ celles de $M'$. On identifie le plan à $\mathbb{R}^2$. On cherche donc à obtenir l'expression explicite de :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (X,Y) \end{array}$$

(a) Montrer que $(X, Y)$ vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} xY - yX & = & 0 \\ Xx + Yy & = & R^2 \end{array} \right.$$

(b) Obtenir alors l'expression explicite de $(X, Y)$ en fonction de $(x, y)$ et $R$.

(c) Obtenir que $X^2 + Y^2 \neq 0$.

(d) De même, obtenir que $(x, y) = \frac{1}{X^2+Y^2}(XR^2, YR^2)$.

(e) Soit $C_\lambda = \{M(x, y) \in P; (x - \lambda)^2 + y^2 = \lambda^2\}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Vérifier que $C_\lambda$ est un cercle dont on donnera le centre et le rayon.

(f) On note $f(C_\lambda) = \{M'(X, Y) \in P; M(x, y) \in C_\lambda\}$. Montrer que $f(C_\lambda) = \{M'(X, Y) \in P; 2\lambda X - R^2 = 0\}$ puis que cet ensemble est une droite dont on précisera un point et un vecteur directeur.

(g) On note $D = \{M(x; y) \in P; x + y + 1 = 0\}$. Vérifier que $D$ est une droite et la caractériser.

(h) On note $f(D) = \{M'(X, Y) \in P; M(x, y) \in D\}$. Vérifier que $f(D)$ est un cercle dont on précisera le rayon et le centre.

*Cette application $f$ est appelée inversion. Elle permet de transformer une droite en cercle, ou un cercle en droite. Ce principe a permis de justifier le dispositif de **Peaucellier-Lipkin**, qui est un système articulé permettant de transformer un mouvement rectiligne en mouvement circulaire, et vice-versa.*

**Correction du problème :**

(Q 1) (Q a)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{NA}.\overrightarrow{NA'} = 0 &\Leftrightarrow (\overrightarrow{NO}+\overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{NO}+\overrightarrow{OA'}) = 0 \\ &\Leftrightarrow NO^2 + \overrightarrow{N0}.(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA'}) + \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OA'} = 0 \\ &\Leftrightarrow NO^2 + \overrightarrow{N0}.\overrightarrow{0} - R^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow NO = R \\ &\Leftrightarrow \boxed{N \in \mathcal{C}} \end{aligned}$$

(Q b) $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IA}.(\overrightarrow{IA'}+\overrightarrow{A'B}) = \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IA'} + \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{A'B}$. Or le point $B$ appartient au cercle $C$. Les droites $(AB)$ et $(A'B)$ sont donc orthogonales d'après la question précédente. Le point $I$ étant un élément de la droite $(AB)$, on en déduit que $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{A'B} = 0$ et ainsi que

$$\boxed{\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IA'}}$$

(Q c) Poursuivons les calculs :

$$\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IA'} = (\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OA'}) = IO^2 + \overrightarrow{IO}.(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA'}) - R^2$$

$$= IO^2 + \overrightarrow{IO}.\overrightarrow{0} - R^2 = \boxed{IO^2 - R^2}.$$

Ainsi, on a montré que le nombre $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}$ ne dépend pas des points $A$ et $B$.

(Q d) On suppose que $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IC}.\overrightarrow{ID}$ et on veut montrer que le point $D$ appartient au cercle $\mathcal{C}$.

On note $C' \in (IC) \cap \mathcal{C}$. Alors $\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{IC'} = IO^2 - R^2 = \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}$ d'après la relation précédente. Par conséquent, $\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{IC'} = \overrightarrow{IC}.\overrightarrow{ID} \Leftrightarrow \overrightarrow{IC}.\left(\overrightarrow{IC'} - \overrightarrow{ID}\right) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{IC}.\overrightarrow{DC'} = 0$. Or $\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{DC'} = \pm IC \times DC'$. Puisque $IC \neq 0$ on en déduit que $DC'$ est nulle et ainsi $D = C'$. <u>Le point $D$ appartient donc au cercle $\mathcal{C}$.</u>

(Q 2) (a) Le point $M'$ vérifie

$$\left\{\begin{array}{rcl} \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} &=& R^2 \\ M' &\in& (OM) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} &=& R^2 \\ det(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}) &=& 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \boxed{\left\{\begin{array}{rcl} xX+yY &=& R^2 \\ xY-yX &=& 0\ ( \end{array}\right.}$$

(b) $x(1) - y(2)$ donne : $(x^2+y^2)X = xR^2$ et $y(1)+x(2)$ donne : $(x^2+y^2)Y = yR^2$.

Comme $(x,y) \neq (0,0)$ par hypothèse on en déduit $x^2+y^2 \neq 0$ donc :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} X = \dfrac{xR^2}{x^2+y^2} \\ Y = \dfrac{yR^2}{x^2+y^2} \end{array}\right.}$$

(c) On en déduit : $X^2+Y^2 = \dfrac{R^4}{x^2+y^2}$. Comme $R \in \mathbb{R}^*$ on en déduit : $\boxed{X^2+Y^2 \neq 0.}$

(d) $\left\{\begin{array}{l} X = \dfrac{xR^2}{x^2+y^2} \\ Y = \dfrac{yR^2}{x^2+y^2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{X(x^2+y^2)}{R^2} = x \\ \dfrac{Y(x^2+y^2)}{R^2} = y \end{array}\right.$. Comme $x^2+y^2 = \dfrac{R^4}{X^2+Y^2}$ d'après la question précédente on en déduit : $\boxed{(x,y) = \dfrac{1}{X^2+Y^2}(XR^2, YR^2).}$

(e) On remarque que $M \in C_\lambda \Leftrightarrow O_\lambda M = |\lambda|$ avec $O_\lambda(\lambda, 0)$. L'ensemble $C_\lambda$ est un cercle de centre $O_\lambda(\lambda,0)$ et de rayon $|\lambda|$.

(f) Soit $M'(X,Y)$. Alors $M(x,y) \in C_\lambda$ si et seulement si :

$$\begin{aligned}
(x-\lambda)^2 + y^2 = \lambda^2 &\Leftrightarrow x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 + y^2 = \lambda^2 \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{XR^2}{X^2+Y^2}\right)^2 - 2\lambda\left(\frac{XR^2}{X^2+Y^2}\right) + \lambda^2 + \left(\frac{YR^2}{X^2+Y^2}\right)^2 = \lambda^2 \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{XR^2}{X^2+Y^2}\right)^2 - 2\lambda\left(\frac{XR^2}{X^2+Y^2}\right) + \left(\frac{YR^2}{X^2+Y^2}\right)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow X^2R^4 - 2\lambda XR^2(X^2+Y^2) + Y^2R^4 = 0 \\
&\Leftrightarrow X^2R^2 - 2\lambda X(X^2+Y^2) + Y^2R^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow R^2(X^2+Y^2) - 2\lambda X(X^2+Y^2) = 0 \\
&\Leftrightarrow (X^2+Y^2)(R^2 - 2\lambda X) \\
&\Leftrightarrow \boxed{2\lambda X - R^2 = 0}
\end{aligned}$$

car $(X^2+Y^2) \neq 0$ comme nous l'avons démontré précédemment.
On a donc montré que $f(C_\lambda) = \{M'(X,Y) \in P ; 2\lambda X - R^2 = 0\}$. Or l'équation $2\lambda X - R^2 = 0$ est une équation cartésienne d'une droite, de vecteur directeur $\begin{pmatrix} -1 \\ 2\lambda \end{pmatrix}$ et passant par le point de coordonnées $(R^2/(2\lambda); 0)$.

(g) On a :

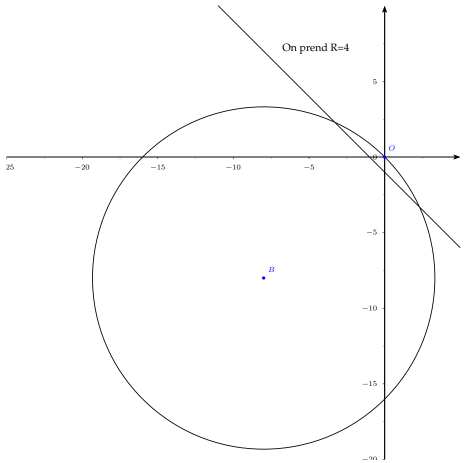
$$M(x,y) \in D \Leftrightarrow (x,y) = (-1,0) + y(-1,1).$$

Ainsi, $D = A(-1,0) + \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

(h) $4(X,Y) \in f(D) \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned}
\frac{R^2X}{X^2+Y^2} + \frac{R^2Y}{X^2+Y^2} + 1 = 0 &\Leftrightarrow R^2X + R^2Y + X^2 + Y^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow (X + R^2/2)^2 - R^4/4 + (Y + R^2/2)^2 - R^4/4 = 0 \\
&\Leftrightarrow \boxed{(X + R^2/2)^2 + (Y + R^2/2)^2 = R^4/2.}
\end{aligned}$$

On reconnait une équation cartésienne d'un cercle de centre $(-R^2/2, -R^2/2)$ et de rayon $R^2/\sqrt{2}$.
Par exemple, on prend $R = 4$ et on trace l'image de la droite $D$ par l'application $f$ en utilisant Geogébra et on obtient le cercle détecté par les calculs précédents.




⋆⋆⋆
FIN
⋆⋆⋆