À rendre le vendredi 28 Mars

Devoir en temps libre n° 8

EXERCICE

Pour tout entier naturel, on note : $g_n(x) = \cos(nx)$ et $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(kx) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

1. Que vaut : $S''_{n+1}(x)+(n+1)^2 S_{n+1}(x)$? En particulier, vérifier que $S''_{n+1}(x)+(n+1)^2 S_{n+1}(x) \in \text{Vect}(g_0, \ldots, g_n)$ puis en déduire par récurrence que la famille de fonctions : $(g_0, \ldots, g_n)$ est libre.
2. Montrer que $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_n(x)\, dx = a_0$.
3. (a) Calculer : $\int_0^{2\pi} \cos^2(kx)\, dx$ pour $k \neq 0$ puis $\int_0^{2\pi} \cos(kx)\cos(px)\, dx$ avec $p \neq k$.

   (b) En déduire : $a_p = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} S_n(x)\cos(px)\, dx$ si $p \neq 0$.

PROBLÈME

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On note $E = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ indexées par $\mathbb{N}$. Soit a, b, c trois scalaires fixés, a et c étant non-nuls (si c est nul, on aurait une suite linéaire d'ordre 1). On note

$$F = \Big\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E; \forall n \in \mathbb{N}, \quad au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0\Big\}.$$

Le but du problème est de démontrer le théorème du cours donnant l'expression générale des suites de F que l'on rappelle ci-dessous.

Soient $b \in \mathbb{K}$; $a, c \in \mathbb{K}^*$ et soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite linéaire d'ordre 2 vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}; au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$$

On appelle $ar^2 + br + c = 0$ (E) l'équation caractéristique.
- Si (E) admet deux racines distinctes r_1 et r_2 alors il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

- Si (E) admet une racine unique r_0 alors il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda + n\mu) r_0^n.$$

(Q 1) Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

(Q 2) **Dimension de F ?**
Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ et $(w_n)_{n\geq 0}$ les suites de F telles que $v_0 = 0$, $v_1 = 1$, et $w_0 = 1$, $w_1 = 0$.

(Q a) Démontrer que la famille $((v_n)_{n\geq 0}, (w_n)_{n\geq 0})$ est libre.

(Q b) Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de F, on pose $\lambda = u_0$ et $\mu = u_1$. Démontrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ est combinaison linéaire de $(v_n)_{n\geq 0}$ et $(w_n)_{n\geq 0}$.

(Q c) En déduire que F est de dimension 2.

(Q 3) **Familles libres de suites ?**

(Q a) Soit α et β deux scalaires distincts. Démontrer que la famille $((\alpha^n)_{n\geq 0},\ (\beta^n)_{n\geq 0})$ est libre.

(Q b) Soit α un scalaire non-nul. Démontrer que la famille $((\alpha^n)_{n\geq 0},\ (n\alpha^n)_{n\geq 0})$ est libre.

(Q 4) **Démonstration du théorème.**
On note (E) l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, et Δ son discriminant.

(Q a) Démontrer qu'une suite géométrique $(q^n)_{n\geq 0}$ de raison non-nulle est élément de F si et seulement si q est solution de (E).

(Q b) On suppose que Δ est non-nul, et on note λ_1, λ_2 les deux racines de (E). En utilisant les questions précédentes, démontrer que $F = \mathrm{Vect}\Big((\lambda_1^n)_{n\geq 0},\ (\lambda_2^n)_{n\geq 0}\Big)$.

(Q c) On suppose que Δ est nul, et on note λ_0 la racine (E). Démontrer que la suite $(n\lambda_0^n)_{n\geq 0}$ est élément de F. Démontrer ensuite que $F = \mathrm{Vect}\Big((\lambda_0^n)_{n\geq 0},\ (n\lambda_0^n)_{n\geq 0}\Big)$.

Exercice :

Pour tout entier naturel, on note : $g_n(x) = \cos(nx)$ et $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(kx)$

1. Par linéarité de la dérivation : $S''_{n+1}(x) = -\sum_{k=0}^{n+1} a_k k^2 \cos(kx)$.

   Ainsi :

   $S''_{n+1}(x)+(n+1)^2 S_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k((n+1)^2-k^2)\cos(kx)$. on remarque alors que pour $k = n+1$, $a_k((n+1)^2-k^2)\cos(kx) = 0$ ce qui assure que :

$$\boxed{S''_{n+1}(x) + (n+1)^2 S_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k((n+1)^2-k^2)\cos(kx) \in \text{Vect}(g_0,\ \dots,\ g_n).}$$

   Montrons par récurrence faible que $(g_0,\ \dots,\ g_n)$ est libre pour tout entier naturel n.

   - **Initialisation.** Pour $n = 0$, g_0 est une fonction nulle. Or toute famille de vecteurs constituée d'un élément non nul est nécessairement libre.
   - **Hérédité.** On suppose : $(g_0,\ \dots,\ g_n)$ libre et on veut montrer que : $(g_0,\ \dots, g_{n+1})$ est libre. Soient donc : $(a_1,\ \dots,\ a_{n+1})$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{n+1} a_k \cos(kx) = 0$. Posons alors : $S_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k \cos(kx)$. Alors S_{n+1} est la fonction nulle donc $S''_{n+1} + (n+1)^2 S_n$ également. Nous avons donc, en accord avec les calculs précédents :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n} a_k((n+1)^2-k^2)\cos(kx) = 0.$$

     Or par hypothèse de récurrence, $(g_0,\ \dots,\ g_n)$ est libre donc nécessairement : $\boxed{\forall k \in [\![0;\ n]\!],}$ $a_k((n+1)^2-k^2) = 0 \Leftrightarrow \boxed{a_k = 0}$ car $(n+1)^2 - k^2 \neq 0$. Nous avons donc :

     $\forall x \in \mathbb{R},\ a_{n+1}\cos((n+1)x) = 0$. En prenant $x = 0$, il vient : $\boxed{a_{n+1} = 0.}$

     Nous avons donc montré que : $\boxed{\forall k \in [\![0;\ n+1]\!],\ a_k = 0}$ ce qui prouve que $(g_0,\ \dots,\ g_{n+1})$ est libre ce qui prouve l'hérédité.

2. Par linéarité de l'intégration :

   $\int_0^{2\pi} S_n(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} a_k \int_0^{2\pi} \cos(kx)\,dx$. Or, pour $k = 0$, $\int_0^{2\pi} \cos(kx)\,dx = \int_0^{2\pi} 1\,dx = 2\pi$ et pour $k \neq 0$, $\int_0^{2\pi} \cos(kx)\,dx = \frac{1}{k}[\sin(kx)]_0^{2\pi} = 0$. Au final : $\sum_{k=0}^{n} a_k \int_0^{2\pi} \cos(kx)\,dx = 2\pi a_0$, ce qui prouve au final que :

$$\boxed{a_0 = \int_0^{2\pi} S_n(x)\,dx.}$$

3. (a)
$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos^2(kx)\,dx &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1+\cos(2kx)}{2}\right)dx \\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1\,dx + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos(2kx)\,dx \\ &= \pi + \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2k}[\sin(2kx)]_0^{2\pi} \text{ car } k \neq 0 \\ &= \boxed{\pi.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi} \cos(kx)\cos(px)\,dx \\ =\ & \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(\cos((k+p)x) + \cos((k-p)x))\,dx \\ =\ & \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos((k+p)x)\,dx + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos((k-p)x)\,dx \\ =\ & \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{k+p}[\sin((k+p)x)]_0^{2\pi} + \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{k-p}[\sin((k-p)x)]_0^{2\pi} \text{ car } k+p \neq 0 \text{ et } k-p \neq 0 \\ =\ & \boxed{0.}\end{aligned}$$

   (b) Ainsi, si $p \neq 0$, par linéarité :

$$\int_0^{2\pi} S_n(x)\cos(px)\,dx \quad = \sum_{k=0}^{n} a_k \int_0^{2\pi} \cos(kx)\cos(px)\,dx$$

Comme dans la somme, la seule valeur de k pour laquelle l'intégrale est non nulle est pour $k = p$, en accord avec les calculs précédents, nous en déduisons :
$\displaystyle\int_0^{2\pi} S_n(x)\cos(px)\,dx = a_p \int_0^{2\pi} \cos^2(px)\,dx = a_p\pi$ car $p \neq 0$ et d'après les calculs ci-dessus. Au final nous obtenons bien :

$\boxed{a_p = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} S_n(x)\cos(px)\,dx}$ si $p \neq 0$

Problème :

(Q 1) On sait que :

- F est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
- La suite nulle appartient à F puisque :$\forall n \in \mathbb{N}, a0 + b0 + c0 = 0$.
- Enfin, soient $(u_n)_{n\geq 0}, (v_n)_{n\geq 0} \in F$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{array}{rl} & a(\lambda u_{n+2} + v_{n+2}) + b(\lambda u_{n+1} + v_{n+1}) + c(\lambda u_n + v_n) \\ = & \lambda\Big(au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n\Big) + \Big(av_{n+2} + bv_{n+1} + cv_n\Big) \\ = & \lambda 0 + 0 = 0 \end{array}$$

Ainsi, $\lambda(u_n)_{n\geq 0} + (v_n)_{n\geq 0} \in F$.

Par propriété, on en déduit que $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.}$

(Q 2) Soit (v_n) et (w_n) les suites de F telles que $v_0 = 0$, $v_1 = 1$, et $w_0 = 1$, $w_1 = 0$.

(Q a) Soient $\lambda; \mu \in \mathbb{K}; \lambda(v_n) + \mu(w_n) = O_{\mathbb{K}^{\mathbb{N}}}$. Alors, en particulier,

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mu & = & 0 \\ \lambda & = & 0 \end{array}\right.$$

en considérant $n = 0$ et $n = 1$. Ainsi,
$\boxed{\text{la famille } ((v_n),\ (w_n)) \text{ est libre.}}$

(Q b) On pose pour tout entier n : $\mathcal{P}_n$: $u_n = \lambda w_n + \mu v_n$.

i. $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont vraies.

ii. Supposons que $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ sont vraies pour $n \geq 0$. Alors

$$\begin{array}{rcl} u_{n+2} & = & \frac{-b}{a}u_{n+1} - \frac{c}{a}u_n \\ & = & \frac{-b}{a}\Big(\lambda w_{n+1} + \mu v_{n+1}\Big) - \frac{c}{a}\Big(\lambda w_n + \mu v_n\Big) \\ & = & \mu\Big(\frac{-b}{a}v_{n+1} - \frac{c}{a}v_n\Big) + \lambda\Big(\frac{-b}{a}w_{n+1} - \frac{c}{a}w_n\Big) \\ & = & \lambda w_{n+2} + \mu v_{n+2} \end{array}$$

Ainsi $\mathcal{P}_{n+2}$ est vraie.

iii. On sait que $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont vraies et que $\forall n \geq 0, (\mathcal{P}_n; \mathcal{P}_{n+1}) \Rightarrow \mathcal{P}_{n+2}$. Ainsi, par le théorème de récurrence à deux pas, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier n et
$\boxed{(u_n)_{n\geq 0} \text{ est combinaison linéaire de ces deux suites.}}$

(Q c) L'espace vectoriel F a une famille $\Big((v_n)_{n\geq 0}; (w_n)_{n\geq 0}\Big)$ libre et génératrice.
Donc c'est une base et $\boxed{\dim F = 2.}$

(Q 3) (Q a) Soient $\lambda; \mu \in \mathbb{K}; \lambda(\alpha^n) + \mu(\beta^n) = O_{\mathbb{K}^{\mathbb{N}}}$. Alors, en particulier,

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda + \mu & = & 0 \\ \lambda\alpha + \mu\beta & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda & = & -\mu \\ \lambda(\alpha - \beta) & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda & = & \mu = 0 \\ \lambda & = & 0 \end{array}\right.$$

car $(\alpha - \beta) \neq 0$. Ainsi, $\boxed{\text{la famille } ((\alpha^n),\ (\beta^n)) \text{ est libre.}}$

(Q b) $((\alpha^n),\ (n\alpha^n))$ est libre.
Soient $\lambda; \mu \in \mathbb{K}; \lambda(\alpha^n) + \mu(n\alpha^n) = O_{\mathbb{K}^{\mathbb{N}}}$. Alors, en particulier,

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda & = & 0 \\ \lambda\alpha + \mu\alpha & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda & = & 0 \\ \alpha(\lambda - \mu) & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda & = & 0 \\ \mu & = & 0 \end{array}\right.$$

car $(\alpha) \neq 0$. Ainsi, $\boxed{\text{la famille } ((\alpha^n),\ (n\alpha^n)) \text{ est libre.}}$

(Q 4) **Démonstration du théorème.**

(Q a) Soit $q \neq 0$. Alors

$$\begin{aligned}(q^n)_{n\geq 0} \in F &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, aq^{n+2} + bq^{n+1} + cq^n = 0\\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, q^n\Big(aq^2 + bq^1 + c\Big) = 0\\ &\Leftrightarrow \Big(aq^2 + bq^1 + c\Big) = 0\end{aligned}$$

car $q \neq 0$.

$\boxed{\text{Ainsi, } (q^n)_{n\in\mathbb{N}} \in F \text{ si et seulement si } q \text{ est solution de l'équation caractéristique.}}$

(Q b) On sait que :

i. les suites (λ_1^n) et (λ_2^n) sont des éléments de F et consituent une famille libre de F

ii. F est de dimension 2.

C'est donc une famille libre de taille maximale donc une base de F. Il s'agit en particulier d'une famille génératrice de cet espace. Ainsi,

$$F = \mathrm{Vect}\Big((\lambda_1^n),\ (\lambda_2^n)\Big).$$

(Q c) Pour démontrer que cette suite est un élément de F, on l'injecte dans la relation définissant F. Alors :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}; a(n+2)\lambda_0^{n+2} + b(n+1)\lambda_0^{n+1} + cn\lambda_0^n &= \lambda_0^n\Big(a(n+2)\lambda_0^2 + b(n+1)\lambda_0^1 + cn\Big)\\ &= \lambda_0^n\Big(n\big(a\lambda_0^2 + b\lambda_0^1 + c\big) + 2a\lambda_0^2 + b\lambda_0\Big)\\ &= \lambda_0^n\Big(n0 + 0\Big)\end{aligned}$$

car λ_0 est solution de l'équation et est égale à $\frac{-b}{2a}$.

$\boxed{\text{Ainsi, } (n\lambda_0^n)_{n\in\mathbb{N}} \in F.}$

On sait que :

i. les suites (λ_0^n) et $(n\lambda_0^n)$ sont des éléments de F et consituent une famille libre de F

ii. F est de dimension 2.

C'est donc une famille libre de taille maximale donc une base de F. Il s'agit en particulier d'une famille génératrice de cet espace. Ainsi,

$$F = \mathrm{Vect}\Big((\lambda_0^n),\ (n\lambda_0^n)\Big).$$

⋆⋆⋆
FIN
⋆⋆⋆