À rendre le mardi 30 Janvier

Devoir en temps libre n° 7

PROBLÈME

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2 + x - 1 = 0$. On désignera par λ_1 et λ_2 ses racines, avec $\lambda_1 < \lambda_2$.
2. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + x - 1}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ privé de λ_1 et λ_2.
3. Rappeler la formule de Leibniz donnant la dérivée $n^{\text{ième}}$ du produit de deux fonctions u et v de classe C^n.
4. On suppose, uniquement dans cette question $n \geq 2$.
   En utilisant la relation : $(x^2 + x - 1)f(x) = 1$, montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$ privé de λ_1 et λ_2 :
   $$(x^2 + x - 1)f^{(n)}(x) + n(2x + 1)f^{(n-1)}(x) + n(n - 1)f^{(n-2)}(x) = 0.$$
5. On pose, pour tout entier naturel p : $u_p = \dfrac{f^{(p)}(0)}{p!}$.
   (a) Que valent u_0 et u_1 ?
   (b) On suppose, uniquement dans cette question : $p \geq 2$. Montrer que : $u_p = u_{p-1} + u_{p-2}$.
   (c) En remarquant que $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente d'ordre 2, exprimer, pour tout entier naturel $p \geq 2$, u_p en fonction de p, λ_1 et λ_2.
6. (a) Déterminer deux réels α et β tels que :
   $$\frac{1}{x^2 + x - 1} = \frac{\alpha}{x - \lambda_1} + \frac{\beta}{x - \lambda_2}.$$
   (b) Exprimer, en fonction de λ_1 et λ_2, la dérivée $n^{\text{nième}}$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{\alpha}{x - \lambda_1}$.
   Donner, de même, en fonction de λ_1 et λ_2, la dérivée $n^{\text{nième}}$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{\alpha}{x - \lambda_2}$.
   (c) Retrouver alors le résultat du 5c.

Correction du problème :

1. Les racines sont $\lambda_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < \lambda_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
2. $x \mapsto \dfrac{x}{x^2-x+1}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \lambda_2\}$, donc les théorèmes usuels montrent que f est C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \lambda_2\}$.
3. $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(n-k)} v^{(k)}$.
4. On applique la formule de Leibniz à l'ordre n au produit $(x^2+x-1)f(x)$ et comme les dérivées d'ordre 3 ou plus du polynôme sont toutes nulles, on obtient directement la formule de l'énoncé.
5. (a) $a_0 = f(0) = -1$ et $a_1 = f'(0) = -1$.

   (b) La relation obtenue au II.4, appliquée en $x = 0$, fournit, pour $p \geq 2$: $-p!u_p + p.(p-1)!u_{p-1} + p(p-1).(p-2)!u_{p-2} = 0$, ce qui se simplifie par $p!$ et donne $u_p = u_{p-1} + u_{p-2}$.

   (c) On a reconnu une suite de Fibonacci. L'équation caractéristique est $x^2 = x+1$, dont les racines sont $\frac{1}{\lambda_1}$ et $\frac{1}{\lambda_2}$. On sait qu'il existe alors deux constantes a et b telles que, $\forall p, u_p = \frac{a}{\lambda_1^p} + \frac{b}{\lambda_2^p}$.

   Les conditions $u_0 = u_1 = -1$ conduisent alors à $a = \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ et $b = -\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ donc
   $$\forall p, u_p = \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\lambda_1^{-p} - \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\lambda_2^{-p}.$$
6. (a) On trouve facilement $\frac{1}{x^2+x-1} = \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\frac{1}{x-\lambda_1} - \frac{1}{x-\lambda_2}\right)$ ce qui revient à dire que $\alpha = -\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

   (b) On a $\frac{d^n}{dx^n}\frac{1}{x-\lambda} = \frac{(-1)^n n!}{(x-\lambda)^{n+1}}$, ce qu'établit facilement une récurrence sur n.

   (c) On en déduit que
   $$u_p = \frac{1}{p!}(-\frac{1}{\sqrt{5}})\left(\frac{(-1)^p p!}{(-\lambda_1)^{p+1}} - \frac{(-1)^p p}{(-\lambda_2)^{p+1}}\right) = \frac{1}{\lambda_1\sqrt{5}}\lambda_1^{-p} - \frac{1}{\lambda_2\sqrt{5}}\lambda_2^{-p},$$
   ce qui est la même réponse qu'en 5c puisque $\frac{1}{\lambda_1\sqrt{5}} = \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ et $\frac{1}{\lambda_2\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$.

⋆⋆⋆
FIN
⋆⋆⋆