À rendre le mardi 11 Mars

Devoir en temps libre n° 7

EXERCICE 1

Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ tel que : $XP(X-1) = (X-2)P(X)$.

1. Montrer que 0 et 1 sont racines de P.
2. Soit $a \in \mathbb{C}$ une racine de P.
   (a) Si $a \neq 0$, montrer que $a-1$ est racine de P.
   (b) Si $a \neq 1$, montrer que $a+1$ est racine de P.
3. On suppose que P n'est pas le polynôme nul. Montrer que 0 et 1 sont les seules racines de P.
4. En déduire l'expression des polynômes P tels que : $XP(X-1) = (X-2)P(X)$.

EXERCICE 2

On considère $n \geq 1$ et on note $P = \dfrac{1}{2i}\left((X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1}\right)$.

1. Déterminer le degré de P et préciser son coefficient dominant.
2. Préciser les racines complexes de P. On exprimera ces dernières à l'aide de la fonction $\tan$.
3. En déduire une expression simple de $\displaystyle\prod_{k=1}^{2n} \tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$.

Correction de l'exercice 1:

1. Si l'on note encore P la fonction polynômiale associée à P, alors $\forall x \in \mathbb{C},\ xP(x-1) = (x-2)P(x)$. En particulier, avec $x = 0$, nous obtenons : $-2P(0) = 0 \Leftrightarrow P(0) = 0$. De même, avec $x = 1$, nous obtenons : $-P(1) = P(0)$ d'où $P(1) = 0$. Les réels 0 et 1 sont donc racines de P.
2. (a) Soit $a \neq 0$ une racine de P. Alors $P(a) = 0$. De plus $\forall x \in \mathbb{C},\ xP(x-1) = (x-2)P(x)$. Ainsi $aP(a-1) = (a-2)P(a) = 0$. Comme $a \neq 0$, on en déduit que $P(a-1) = 0$, donc que $a-1$ est racine de P.
   (b) Soit $a \neq 1$ une racine de P. Alors $P(a) = 0$. De plus $\forall x \in \mathbb{C},\ xP(x-1) = (x-2)P(x)$. Ainsi $0 = (a+1)P(a) = (a-1)P(a+1)$. Comme $a \neq 0$, on en déduit que $P(a+1) = 0$, donc que $a+1$ est racine de P.
3. On suppose que P n'est pas le polynôme nul. Soit a une racine de P. Supposons par l'absurde que $a \notin \{0;\ 1\}$. Nous distinguons alors deux cas :

   (a) $a \neq 0$. Alors $a-1$ est racine de P puis par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, a-n$ est racine de P (à faire mais laissée au lecteur !). Ceci donne alors une infinité de racines ce qui est impossible car un polynôme non nul n'admet qu'un nomlbre fini de racines.

   (b) $a \neq 1$. Alors $a+1$ est racine de P puis par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, a+n$ est racine de P (à faire mais laissée au lecteur !). Ceci donne alors une infinité de racines ce qui est impossible car un polynôme non nul n'admet qu'un nomlbre fini de racines.

   Par l'absurde, $a \in \{0;\ 1\}$, c'est à dire que les seules racines possibles de P sont 0 et 1.
4. On constate que le polynôme nul vérifie la relation : $XP(X-1) = (X-2)P(X)$.

   Soit maintenant P un polynôme non nul. Comme les polynômes constants non nuls ne peuvent pas vérifier $XP(X-1) = (X-2)P(X)$ puisque $X-1 \neq X-2$, on en déduit que P n'est pas constant. Alors, par d'Alembert-Gauss, P admet au moins une racine complexe a. Ainsi, d'après la question précédente, $a = 0$ ou $a = 1$, c'est à dire que $P = \lambda x^p(X-1)^q$ avec $\lambda \neq 0$ et $(p;\ q) \neq (0;\ 0)$.

   Réciproquement, soit $P = \lambda x^p(X-1)^q$ avec $\lambda \neq 0$ et $(p;\ q) \neq (0;\ 0)$. Alors $XP(X-1) = (X-2)P(X) \Leftrightarrow x(X-1)^p(x-2)^q = (X-2)x^p(X-1)^q$ car $\lambda \neq 0$. Or $x(X-1)^p(x-2)^q = (X-2)x^p(X-1)^q \Leftrightarrow p = q = 1$; Ainsi $P = \lambda X(X-1)$.

   Au final les polynômes P tels que : $XP(X-1) = (X-2)P(X)$ sont le polynôme nul ainsi que les polynômes de la forme $\lambda X(X-1)$ avec $\lambda \neq 0$.

Correction de l'exercice 2:

1. Par application du binôme de Newton, nous avons : $(X+i)^{2n+1} = X^{2n+1} + (2n+1)iX^{2n} + P_1$ avec P_1 un polynôme de degré inférieur ou égal à $2n-1$.

   De même : $(X-i)^{2n+1} = X^{2n+1} - i(2n+1)X^{2n} + P_1$ avec P_2 un polynôme de degré inférieur ou égal à $2n-1$.

   Ainsi : $P = (2n+1)X^{2n} + Q$ avec $Q = P_1 - P_2$. Par propriétés du degré, Q est un polynôme de degré inférieur ou égal à $2n-1$.Par conséquent P est un polynôme de degré $2n$ et son coefficient dominant est $2n+1$.
2. Soit $w \in \mathbb{C}$ une racine complexe de P. Alors $(w+i)^{2n+1} = (w-i)^{2n+1} \Leftrightarrow \left(\dfrac{w+i}{w-i}\right)^{2n+1} = 1$ car i n'est pas racine de P, donc $w \neq i$. Posons $Z = \dfrac{w+i}{w-i}$. Alors $Z^{2n+1} = 1$. Ainsi Z est racine $2n+1$-ème de l'unité donc de la forme : $e^{i\frac{2k\pi}{2n+1}}$ avec $k \in [\![0;\ 2n]\!]$.

   Par conséquent $(w+i)^{2n+1} = (w-i)^{2n+1} \Leftrightarrow \dfrac{w+i}{w-i} = e^{i\frac{2k\pi}{2n+1}}$ avec $k \in [\![0;\ 2n]\!]$.

   On en déduit : $(w+i)^{2n+1} = (w-i)^{2n+1} \Leftrightarrow w(1 - e^{i\frac{2k\pi}{2n+1}}) = -i(1 + e^{i\frac{2k\pi}{2n+1}})$. On constate donc que $k \neq 0$ car pour $k = 0$ nous obtenons $0 = -2i$ ce qui est impossible.

De plus, $1 - e^{i\frac{2k\pi}{2n+1}} = e^{i\frac{k\pi}{2n+1}}(e^{-i\frac{k\pi}{2n+1}} - e^{i\frac{k\pi}{2n+1}}) = -2ie^{i\frac{k\pi}{2n+1}} \sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$. De même : $1 + e^{i\frac{2k\pi}{2n+1}} = e^{i\frac{k\pi}{2n+1}}(e^{-i\frac{k\pi}{2n+1}} + e^{i\frac{k\pi}{2n+1}}) = 2e^{i\frac{k\pi}{2n+1}} \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$.

Au final : $w = -i\dfrac{-1\cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}{i\sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \dfrac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$ car pour tout $k \in [\![1;\ 2n]\!]$, $\dfrac{k\pi}{2n+1} \notin \{\frac{\pi}{2}\ [\pi]$ donc $\tan\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)$ est défini.

<u>On en conclue que les racines complexes de P sont exactement les nombres complexes $w_k = \dfrac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$ avec $k \in [\![1;\ 2n]\!]$.</u>

3. D'après les relations coefficients racines $\displaystyle\prod_{k=1}^{2n} w_k = \frac{(-1)^{2n}a_o}{a_2 n}$ où a_0 est le terme constant et a_{2n} le coefficient dominant. D'après précédemment, $a_{2n} = 2n+1$. Comme $a_0 = \dfrac{1}{2i}(i^{2n+1} - (-i)^{2n+1}) = (-1)^n$ car $i^{2n} = (i^2)^n = (-1)^n$, on en déduit :
$\displaystyle\prod_{k=1}^{2n} \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{1}{(-1)^n(2n+1)}$. Par ailleurs, par propriété du produit de nombres, $\displaystyle\prod_{k=1}^{2n} \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \frac{1}{\displaystyle\prod_{k=1}^{2n}\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$. Ainsi :

$$\frac{1}{\displaystyle\prod_{k=1}^{2n}\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \frac{1}{(-1)^n(2n+1)} \Leftrightarrow \boxed{\prod_{k=1}^{2n}\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = (-1)^n(2n+1).}$$

⋆⋆⋆
FIN
⋆⋆⋆