À rendre le mardi 04 Février

Devoir en temps libre n$^{\mathrm{o}}$ 6

EXERCICE 1

Soit $g : x \mapsto \frac{1}{(x+a)(x+b)}, (a,b) \in (\mathbb{R}^*)^2, a \neq b, .$

1. Soit $v : x \mapsto (x+a)(x+b)$. En utilisant que $v \times g = 1$, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{-a, -b\}, \forall n \geq 2, (x+a)(x+b)g^{(n)}(x) + n[2x+a+b]g^{(n-1)}(x) + n(n-1)g^{(n-2)}(x) = 0.$$

2. Soit $u_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!}$. Montrer que $\forall n \geq 2, abu_n + (a+b)u_{n-1} + u_{n-2} = 0$.
3. Calculer u_0 et u_1.
4. Montrer que $\pm|a-b| = \pm(a-b)$.
5. En déduire l'expression explicite de $(u_n)_{n\geq 0}$ puis de $(g^{(n)}(0))_{n\geq 0}$.

EXERCICE 2

On note $f(x) = e^x$, $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$. On considère $a \in]0;\ 1[$ fixé, $A \in \mathbb{R}$ tel que :
$f(a) - S_n(a) = a^{n+1}A$ et on pose h d'expression : $h(t) = f(t) - S_n(t) - t^{n+1}A$. Soit $t \in [0;\ a]$.

1 Vérifier que h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que : $\forall k \in [\![0;\ n]\!], h^{(k)}(0) = 0$ et $h(a) = 0$.

2 En déduire l'existence de $c \in]0;\ a[$ tel que : $h^{(n+1)}(c) = 0$.

3 Finalement montrer que : $A = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$.

4 En déduire : $|f(a) - S_n(a)| \leq \dfrac{e}{(n+1)!}$ puis que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} = e^a$.

Correction de l'exercice 1:

1. Les fonction g et v sont de classe C^∞ sur respectivement $\mathbb{R}-\{-a,-b\}$ et $\mathbb{R}$. Par la formule de Leibniz, on en déduit que $\forall n\geq 2, \forall x\in\mathbb{R}-\{-a,-b\}$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}v^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)=0$$

Or $\forall x\in\mathbb{R}, v'(x)=2x+a+b, v''(x)=2, v^{(3)}(x)=0, \forall k\geq 0, v^{(k)}(x)=(v^{(3)})^{(k-3)}(x)=0$. Ainsi, par Chasles :

$$\begin{aligned}
&\tbinom{n}{0}v(x)g^{(n)}(x)+\tbinom{n}{1}v'(x)g^{(n-1)}(x)+\tbinom{n}{2}v''(x)g^{(n-2)}(x)=0\\
\Leftrightarrow\quad &(x+a)(x+b)g^{(n)}(x)+n(2x+a+b)g^{(n-1)}(x)+\tfrac{n(n-1)}{2}\times 2g^{(n-2)}(x)=0\\
\Leftrightarrow\quad &\boxed{(x+a)(x+b)g^{(n)}(x)+n[2x+a+b]g^{(n-1)}(x)+n(n-1)g^{(n-2)}(x)=0}
\end{aligned}$$

2. On remplace x par 0 et on obtient :

$$abg^{(n)}(0)+n[a+b]g^{(n-1)}(0)+n(n-1)g^{(n-2)}(0)=0$$

On divise par $n!\neq 0$:

$$\begin{aligned}
&ab\tfrac{g^{(n)}(0)}{n!}+\tfrac{n(a+b)g^{(n-1)}(0)}{n!}+\tfrac{n(n-1)g^{(n-2)}(0)}{n!}=0\\
\Leftrightarrow\quad &ab\tfrac{g^{(n)}(0)}{n!}+\tfrac{n(a+b)g^{(n-1)}(0)}{n\times(n-1)!}+\tfrac{n(n-1)g^{(n-2)}(0)}{n(n-1)\times(n-2)!}=0\\
\Leftrightarrow\quad &\boxed{abu_n+(a+b)u_{n-1}+u_{n-2}=0}
\end{aligned}$$

3. $u_0=g(0)=\frac{1}{ab}$. Et $\forall x\in\mathbb{R}-\{-a,-b\}, g'(x)=\frac{-[2x+a+b]}{(x+a)^2(x+b)^2}$. Donc $u_1=\frac{-(a+b)}{a^2b^2}$.

4. Si $a-b\geq 0$ alors $\pm|a-b|=\pm(a-b)$. Si $a-b\leq 0$ alors $\pm|a-b|=\pm\times(-1)(a-b)=\pm(a-b)$.

5. Nous avons une suite linéaire homogène d'ordre 2 puisque $ab\neq 0$. L'équation caractéristique est $abr^2+(a+b)r+1=0$. Le discriminant est $(a+b)^2-4ab=(a-b)^2>0$. Les racines sont alors $\frac{-[a+b]\pm|a-b|}{2ab}$. Or $\pm|a-b|=\pm(a-b)$. Les racines sont donc $\frac{-1}{b}$ et $\frac{-1}{a}$. Ainsi,

$$\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2, \forall n\in\mathbb{N}, u_n=\lambda\Big(\frac{-1}{a}\Big)^n+\mu\Big(\frac{-1}{b}\Big)^n.$$

Puis, $u_0=\lambda+\mu$ et $u_1=\frac{-\lambda}{a}+\frac{-\mu}{b}$. On résout donc le système linéaire :

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{rcl}\lambda+\mu&=&\frac{1}{ab}\\ \frac{-\lambda}{a}+\frac{-\mu}{b}&=&\frac{-(a+b)}{(ab)^2}\end{array}\right.
&\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix}1&1\\-1/a&-1/b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/(ab)\\-(a+b)/(ab)^2\end{pmatrix}\\
&\Leftrightarrow\quad {\scriptstyle -\frac{1}{b}+\frac{1}{a}=\frac{b-a}{ab}\neq 0}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{(b-a)/(ab)}\begin{pmatrix}-1/b&-1\\1/a&1\end{pmatrix}\left(\begin{matrix}1/(ab\\-(a+b)/(\end{matrix}\right.\\
&=\quad \frac{1}{(b-a)/(ab)}\begin{pmatrix}1/(a^2b)\\-1/(ab^2)\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall n\in\mathbb{N}, u_n=\frac{1}{(b-a)a}\Big(\frac{-1}{a}\Big)^n-\frac{1}{(b-a)b}\Big(\frac{-1}{b}\Big)^n$$

Et

$$g^{(n)}(0)=n!\times u_n=\frac{1}{b-a}\times\frac{(-1)^n n!}{a^{n+1}}-\frac{1}{b-a}\times\frac{(-1)^n n!}{b^{n+1}}$$

Correction de l'exercice 2:

On note $f(x)=e^x$, $S_n(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$. On considère $a\in]0;\ 1[$ fixé, $A\in\mathbb{R}$ tel que :
$f(a)-S_n(a))=a^{n+1}A$ et on pose h d'expression : $h(t)=f(t)-S_n(t)-t^{n+1}A$. Soit $t\in[0;\ a]$.

1 S_n est polynômiale donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Par opérations usuelles, $\underline{h \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$ donc en particulier sur $\underline{[0;\ a]}$.

L'égalité de Taylor-Lagrange appliquée au polynôme P donne : $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{S_n^{(k)}(0)}{k!} x^k$. Nous avons donc :
$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{S_n^{(k)}(0)}{k!} x^k$ ce qui donne par identification des coefficients la relation :
$\forall k \in [\![0;\ n]\!],\ S_n^{(k)}(0) = f^{(k)}(0)$. Cela entraîne donc : $\boxed{\forall k \in [\![0;\ n]\!], h^{(k)}(0) = 0.}$ Par ailleurs, par définition de a, $\boxed{h(a) = 0.}$

2 Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n :
$\left\{\begin{array}{l} \forall k \in [\![0;\ n]\!], h^{(k)}(0) = 0 \\ h(a) = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \exists c \in]0;\ a[,\ h^{(n+1)}(c) = 0.$

- **Initialisation :** Pour $n = 0$, comme h est dérivable sur $]0;\ a[$, continue sur $[0;\ a]$ (car de classe C^∞ sur $[0;\ a]$) et que $h(a) = h(0)(= 0)$, l'application directe du théorème de Rolle fournit l'existence de $c \in]0;\ a[$ tel que : $h'(c) = 0$.
- **Hérédité :** Soit h telle que : $\left\{\begin{array}{l} \forall k \in [\![0;\ n+1]\!], h^{(k)}(0) = 0 \\ h(a) = 0 \end{array}\right.$. Alors en particulier : $\left\{\begin{array}{l} \forall k \in [\![0;\ n]\!], h^{(k)}(0) = 0 \\ h(a) = 0 \end{array}\right.$ donc par hypothèse de récurrence, il existe $c_1 \in]0;\ a[$ tel que : $h^{(n+1)}(c_1) = 0$. Mais alors : $h^{(n+1)}(c_1) = h^{(n+1)}(0) = 0$. Comme h est de classe C^∞ sur $[0;\ c_1]$, il est assuré que $h^{(n+1)}$ est continue sur $[0;\ c_1]$ et dérivable sur $]0;\ c_1[$. D'après le théorème de Rolle, on en déduit l'existence de $c \in]0;\ c_1[$ tel que : $(h^{n+1})'(c) = 0$. Comme $]0;\ c_1[\subset]0;\ a[$ et que : $(h^{n+1})' = h^{(n+2)}$ nous en déduisons l'existence de $c \in]0;\ a[$ tel que : $h^{(n+2)}(c) = 0$ ce qui prouve l'hérédité.

3 D'après la question précédente, $c \in]0;\ a[,\ h^{(n+1)}(c) = 0$. Or, S_n est de degré inférieur ou égal à n donc la dérivée $n+1$-ème de S_n s'annule. Par conséquent : $h^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - (n+1)!A$. Par conséquent : $f^{(n+1)}(c) - (n+1)!A \Leftrightarrow$ $\boxed{A = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.}$

4 On en déduit : $f(a) - S_n(a) = a^{n+1}A = \frac{a^{n+1}f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} = \frac{a^{n+1}e^c}{(n+1)!}$. Ainsi : $|f(a) - S_n(a)| = \frac{a^{n+1}e^c}{(n+1)!}$. Pour finir, $0 < a < 1$ donc : $a^n \leq 1$ et $c < a$ donc $e^x < e^a < e$. On en déduit :

$$\boxed{0 \leq |f(a) - S_n(a)| \leq \frac{e}{(n+1)!}.}$$

Enfin par opérations usuelles : $\lim_{n\to+\infty} \frac{e}{(n+1)!} = 0$ donc par théorème d'encadrement : $\lim_{n\to+\infty} |f(a) - S_n(a)| = 0$, ce qui revient à dire que : $\lim_{n\to+\infty} S_n(a) = f(a) \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} a^k = f(a)$. Ici, $f = exp$ donc $f(a) = e^a$ et $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$. Nous avons donc prouvé :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} = e^a,}$$

et ce pour tout $a \in]0;\ 1[$.

⋆ ⋆ ⋆
FIN
⋆ ⋆ ⋆