À rendre le mardi 9 Janvier

Devoir en temps libre n$^{\text{o}}$ 6

EXERCICE

Soit une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de termes strictement positifs et telle que $(\frac{u_{n+1}}{u_n})_{n\geq 0}$ converge vers 2.

(Q 1) Donner la définition de $(\frac{u_{n+1}}{u_n})_{n\geq 0}$ converge vers 2.

(Q 2) On prend $\varepsilon = \frac{1}{2}$. En déduire qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{3}{2}$.

(Q 3) En déduire alors par récurrence que $\forall n \geq n_0, u_n \geq u_{n_0}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-n_0}$.

(Q 4) Quel est alors le comportement asymptotique de $(u_n)_{n\geq 0}$?

PROBLÈME

On pose $A_n = \int_0^{\pi}[\cos(t)]^{2n}\, dt$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $u_n = \dfrac{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}{\prod_{k=1}^{n}(2k)}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

Partie (1) (Q 1) Soit $n \geq 1$. Montrer que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{2(n+1)}.$$

(Q 2) En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ puis sa convergence vers un réel $\ell \geq 0$.

(Q 3) On pose $v_n = (n+1)(u_n)^2$ pour $n \geq 1$. Montrer que $(v_n)_{n\geq 1}$ converge vers un réel $l' \geq 0$.

(Q 4) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0. On pourra raisonner par l'absurde.

Partie (2) (Q 1) Calculer A_0 et A_1

(Q 2) Rappeler la formule d'Euler exprimant $\cos(t)$ en fonction d'une somme d'exponentielles complexes $e^{\pm it}$.

(Q 3) Appliquer la formule du binôme de Newton à $(a+b)^{2n}$.

(Q 4) Calculer :

i. $\int_0^{\pi} e^{2it(k-n)}\, dt$ si $k = n$;

ii. $\int_0^{\pi} e^{2it(k-n)}\, dt$ sinon.

(Q 5) En déduire que $A_n = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}\pi$.

Partie (3) (a) Soit $n \geq 1$. Montrer que $u_n = \frac{(2n)!}{[2^n(n)!]^2}$.

(b) En déduire que $A_n = \pi u_n$ puis la limite de $(A_n)_{n\geq 0}$.

Correction de l'exercice :

(Q 1) La suite $(\frac{u_{n+1}}{u_n})_{n\geq 0}$ converge vers 2 si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |\frac{u_{n+1}}{u_n} - 2| \leq \varepsilon.$$

(Q 2) On prend $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Ainsi il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0, |\frac{u_{n+1}}{u_n} - 2| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -1/2 \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} - 2 \leq 1/2 \Leftrightarrow 3/2 \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 5/2.$$

On montré que :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{3}{2}.$$

(Q 3) On pose :

$$\forall n \geq n_0, P_n : "u_n \geq u_{n_0}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-n_0}".$$

(a) Initialisation. P_{n_0} est vraie puisque $u_{n_0}\left(\frac{3}{2}\right)^{n_0-n_0} = u_{n_0} \leq u_{n_0}$.

(b) Hérédité. On suppose que P_n est vraie pour $n \geq n_0$. Montrons que P_{n+1} l'est aussi. Partons de

$$u_n \geq u_{n_0}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-n_0}$$

Or $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{3}{2}$ par la question précédente. Puisque $u_n > 0$, on en déduit :

$$u_{n+1} \geq \frac{3}{2} \times u_n$$

Ainsi $u_{n+1} \geq \frac{3}{2}u_{n_0}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-n_0} \geq u_{n_0}\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1-n_0}$. P_{n+1} est donc vraie.

(c) On a montré que P_{n_0} est vraie et $\forall n \geq n_0, P_n \Rightarrow P_{n+1}$. Par le théorème de récurrence, P_n est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

(Q 4) Puisque $3/2 > 1$, on sait que $\lim_{n\to+\infty} u_{n_0}\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1-n_0} = +\infty$. Par le thérème de divergence par minoration, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Correction du problème :

Partie (1) (Q 1) Soit $n \geq 1$. Par la relation de Chasles, on a :

$$u_{n+1} = u_n \times \frac{2(n+1)-1}{2(n+1)} = u_n\frac{2n+1}{2n+2}$$

Par conséquent, puisque $u_n \neq 0$,

$$\boxed{\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{2(n+1)}}$$

(Q 2) Puisque $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{2n+1}{2(n+1)} \leq 1$ et que $\forall n \geq 0, u_n \geq 0$, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$. Ainsi, la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante, minorée par 0. Par le théorème des suites monotones, elle converge vers $l \in \mathbb{R}$.

(Q 3) On pose $v_n = (n+1)(u_n)^2$ pour $n \geq 1$. Montrer que $(v_n)_{n\geq 1}$ converge vers un réel $l' \geq 0$.
On étudie sa monotonie. Soit $n \geq 0$. Alors

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(n+2)}{n+1} \times \left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)^2 = \frac{(n+2)}{n+1} \times \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^2.$$

On calcule :

$$(n+2)(2n+1)^2 = (n+2)(4n^2+4n+1) = 4n^3+12n^2+9n+2$$

et

$$(n+1)(2n+2)^2 = 4(n+1)^3 = 4n^3+12n^2+12n+4$$

Donc

$$(n+2)(2n+1)^2 - (n+1)(2n+2)^2 = -3n-2 \leq 0.$$

Ainsi,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq 1$$

et la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est décroissante. Ainsi, la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est décroissante, minorée par 0. Par le théorème des suites monotones, elle converge vers $l' \in \mathbb{R}$.

(Q 4) Si $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers $l>0$ alors par opérations usuelles $(v_n)_{n\geq 0}$ converge vers $+\infty$. Ceci est absurde donc la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.

Partie (2) (Q 1)

$$A_0 = \int_0^{\pi} 1\,dt = \pi.$$

$$A_1 = \int_0^{\pi} \cos^2(t)\,dt = \int_0^{\pi} \frac{\cos(2t)+1}{2}\,dt = \Big[\frac{1}{2}(\frac{\sin(2t)}{2}+t)\Big]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

(Q 2) La formule d'Euler est :

$$\cos(t) = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}$$

(Q 3) La formule du binôme de Newton à $(a+b)^{2n}$ est

$$(a+b)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} a^k b^{2n-k}$$

(Q 4) i. Si $k=n$ alors $\int_0^{\pi} e^{2it(k-n)}\,dt = \int_0^{\pi} 1\,dt = \pi$.

ii. Si $k\neq n$ alors

$$\int_0^{\pi} e^{2it(k-n)}\,dt = \Big[\frac{e^{2it(k-n)}}{2i(k-n)}\Big]_0^{\pi} = \frac{e^{2i\pi(k-n)}-1}{k-n} = 0.$$

(Q 5) On utilise les questions précédentes :

$$\begin{aligned}
A_n &= \int_0^{\pi}\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^{2n} dt = \int_0^{\pi}\sum_{k=0}^{2n}\frac{\binom{2n}{k}}{2^{2n}}\left(e^{it}\right)^k\left(e^{-it}\right)^{2n-k} dt\\
&= \sum_{k=0}^{2n}\frac{\binom{2n}{k}}{2^{2n}}\int_0^{\pi} e^{itk+it(k-2n)}\,dt \text{ par linéarité}\\
&= \sum_{k=0}^{2n}\frac{\binom{2n}{k}}{2^{2n}}\int_0^{\pi} e^{i2t(k-n)}\,dt\\
&= \left(\sum_{k=0,k\neq n}^{2n}\frac{\binom{2n}{k}}{2^{2n}}\int_0^{\pi} e^{i2t(k-n)}\,dt\right) + \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}\int_0^{\pi} e^{i2t(n-n)}\,dt\\
&= \sum_{k=0,k\neq n}^{2n}\frac{\binom{2n}{k}}{2^{2n}}\times 0 + \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}\pi = \boxed{\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}\pi}
\end{aligned}$$

Partie (3) (a) Soit $n\geq 1$. Le terme u_n est le quotient des nombres impairs entre 1 et $2n-1$ par le produit des nombres pairs entre 2 et $2n$.
On a $\prod_{k=1}^{n}(2k-1) = \frac{\prod_{k=1}^{n}(2k)\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}{\prod_{k=1}^{n}(2k)} = \frac{(2n)!}{2^n\times n!}$. Ainsi,

$$u_n = \frac{(2n)!}{(2^n\times n!)^2}$$

(b) Soit $n\in\mathbb{N}$. On a $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)(2n-n)!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.
Ainsi, $A_n = u_n\pi$. Par opérations usuelles, la suite $(A_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.

⋆⋆⋆
FIN
⋆⋆⋆