À rendre le mercredi 06 Décembre

Devoir en temps libre n° 5 (Facultatif)

EXERCICE 1

1. Pour tout réel t de $[0;\pi/2]$, on pose :
$$u = \tan\frac{t}{2}$$
Montrer que $\cos(t) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$.
2. On souhaite calculer $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2\cos(t)+3}\,dt$. Pourquoi cette intégrale est-elle bien définie ?
3. En effectuant le changement de variables $u = \tan(t/2)$, calculer $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2\cos(t)+3}\,dt$.

EXERCICE 2

Soit f la fonction donnée par $f(x) = \mathrm{Arcos}(2x-1)$ et g la fonction donnée par $g(x) = 2\mathrm{Arcos}\left(\sqrt{x}\right)$. Le but est de montrer que les deux fonctions sont égales sur un intervalle à préciser de deux façons différentes.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ? de la fonction g?
2. Calculer $f(0); g(0); f(1); g(1)$. Que remarquez-vous ?
3. ***Première façon.***
   (a) Montrer que f et g sont deux fonctions dérivables **sur un même intervalle** que l'on précisera.
   (b) Par le calcul, montrer que les fonctions dérivées f' et g' sont égales sur un intervalle à préciser.
   (c) En déduire que f et g sont égales sur un intervalle à préciser.
4. ***Seconde façon***.
   (a) Soit $x \in [0;1]$. À quel intervalle appartient le nombre $2\mathrm{Arcos}(\sqrt{x})$?
   (b) Calculer $\cos(2\mathrm{Arcos}(\sqrt{x}))$ pour x appartenant à un intervalle à préciser.
   (c) En déduire que f et g sont égales sur un intervalle à préciser.

Correction de l'exercice 1:

1. Soit $t \in [0;\pi/2]$. On pose $u = \tan\frac{t}{2}$. D'une part $\cos(t) = 2\cos^2(t/2) - 1$. D'autre part, $\cos^2(t/2) = \frac{1}{1+\tan^2(\frac{t}{2})} = \frac{1}{1+u^2}$. Ainsi,

$$\boxed{\cos(t) = 2\frac{1}{1+u^2} - 1 = \frac{2-(1+u^2)}{(1+u^2)} = \frac{1-u^2}{1+u^2}}$$

2. On souhaite calculer $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2\cos(t)+3}\,dt$. Pourquoi cette intégrale est-elle bien définie ?
La fonction $t \mapsto \frac{1}{2\cos(t)+3}$ est une fonction bien définie sur $[0;\pi/2]$ puisque $2\cos +3$ ne s'y annule pas. Elle est de plus continue sur cet intervalle en tant que quotient de fonctions continues. On peut donc calculer l'intégrale proposée.

3. En effectuant le changement de variables $u = \tan(t/2)$ calculer $\int_0^{\pi/4} \frac{1}{2\cos(t)+3}\,dt$.
Soit $t \in [0;\pi/2]$. On pose : $u = \tan(t/2) \Leftrightarrow t = 2\text{Arctan}(u) = \varphi(u)$. On a :
   (a) $t \mapsto \frac{1}{2\cos(t)+3}$ est continue.
   (b) φ est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
   (c) Bornes ? $t = 0 \Leftrightarrow u = 0$ et si $t = \pi/2 \Leftrightarrow u = \tan(\pi/4) = 1$
   (d) $\frac{dt}{du} = \varphi'(u) = \frac{2}{1+u^2}$.

   Enfin, on sait que $\cos(t) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$. Par le théorème de changement de variables, on a :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2\cos(t)+3}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{2\times\frac{1-u^2}{1+u^2}+3} \times \frac{2}{1+u^2}\,du = \int_0^1 \frac{2}{2(1-u^2)+3(1+u^2)}\,du$$

$$= \int_0^1 \frac{2}{5+u^2}\,du = \left[\frac{2}{\sqrt{5}}\arctan(\frac{u}{\sqrt{5}})\right]_0^1$$

$$= \boxed{\frac{2}{\sqrt{5}}\arctan(\frac{1}{\sqrt{5}})}$$

Correction de l'exercice 2:

1. L'expression $\text{Arcos}(2x-1)$ a un sens si et seulement si $2x - 1 \in [-1;1]$ ce qui équivaut à $x \in [0;1]$. Donc, l'ensemble de définition de f est $\boxed{[0;1].}$ L'expression $2\text{Arcos}\left(\sqrt{x}\right)$ a un sens si et seulement si $\sqrt{x} \in [-1;1]$ ce qui équivaut à $x \in [0;1]$. Donc, l'ensemble de définition de g est $\boxed{[0;1].}$

2. D'une part, $f(0) = \text{Arcos}(-1) = \pi; g(0) = 2\text{Arcos}(0) = 2\frac{\pi}{2} = \pi$. Puis $f(1) = \text{Arcos}(1) = 0$ et $g(1) = 2\text{Arcos}(1) = 20 = 0$. Les fonctions f et g sont bien égales en 0 et en 1.

3. ***Première façon.***
   (a) On sait que
   - $\begin{array}{ccc}]0;1[& \to &]-1;1[\\ x & \mapsto & 2x-1 \end{array}$ est dérivable ;
   - La fonction Arcos est dérivable sur $]-1;1[$.

   $\boxed{\text{Donc, par composition, la fonction } f \text{ est dérivable sur }]0;1[.}$

   On sait que
   - $\begin{array}{ccc}]0;1[& \to &]0;1[\\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$ est dérivable ;
   - La fonction Arcos est dérivable sur $]-1;1[$.

   $\boxed{\text{Donc, par composition, la fonction } g \text{ est dérivable sur }]0;1[.}$

   (b) Soit $x \in]0;1[$. Alors, d'une part

$$f'(x) = 2\text{Arcos}'(2x-1) = \frac{-2}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}$$

   et d'autre part,

$$g'(x) = 2\frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{-1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}$$

Simplifions ces expressions.

$$f'(x) = \frac{-2}{\sqrt{4x-4x^2}} = \frac{-1}{\sqrt{x-x^2}}$$

et

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{-1}{\sqrt{1-x}} = \frac{-1}{\sqrt{x-x^2}}$$

Ainsi, $\boxed{\forall x \in]0;1[, f'(x) = g'(x)}$.

(c) Sur l'intervalle $]0;1[$ la fonction $f-g$ a une dérivée nulle. Par propriété, $f-g$ est donc constante sur $]0;1[$. Déterminons cette constante en calculant une image d'un élément de $]0;1[$:

$$(f-g)(\frac{1}{2}) = \mathrm{Arcos}(0) - 2\mathrm{Arcos}(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{2} - 2\frac{\pi}{4} = 0.$$

Ainsi, la fonction $f-g$ est nulle sur $]0;1[$ et en utilisant les résultats de la première question, on en déduite que $\boxed{f-g \text{ est la fonction nulle sur l'intervalle } [0;1].}$

4. ***Seconde façon***.

(a) Soit $x \in [0;1]$. On a $\sqrt{x} \in [0;1]$. Donc, la fonction Arcos étant décroissante, $\mathrm{Arcos}(\sqrt{x}) \in [\mathrm{Arcos}(1);\ \mathrm{Arcos}(0)] = [0; \frac{\pi}{2}]$ et $\boxed{2\mathrm{Arcos}(\sqrt{x}) \in [0;\pi].}$

(b) Soit $x \in [0;1]$. Alors $\cos(2\mathrm{Arcos}(\sqrt{x})) = 2\Big(\cos(\mathrm{Arcos}(\sqrt{x})\Big)^2 - 1 = 2(\sqrt{x})^2 - 1 = \boxed{2x-1}$, car $\forall y \in [-1;\ 1],\ \cos(\mathrm{Arcos}(y)) = y$.
Ainsi $\forall x \in [0;1]$:

$$\begin{aligned} &\cos(2\mathrm{Arcos}(\sqrt{x})) = \cos(\mathrm{Arcos}(2x-1)) \\ \Leftrightarrow &2\mathrm{Arcos}(\sqrt{x}) = \mathrm{Arcos}(2x-1) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\text{ou } 2\mathrm{Arcos}(\sqrt{x}) = -\mathrm{Arcos}(2x-1) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Or, d'après la question précédente, $2\mathrm{Arcos}(\sqrt{x}) \in [0;\pi]$ et $\mathrm{Arcos}(2x-1) \in [0;\pi]$. Ces deux expressions ne peuvent donc être opposées modulo 2π.

Nous ne pouvons donc avoir : $2\mathrm{Arcos}(\sqrt{x}) = -\mathrm{Arcos}(2x-1) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Pour les mêmes raisons, nous avons uniquement l'égalité $2\mathrm{Arcos}(\sqrt{x}) = \mathrm{Arcos}(2x-1) + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) pour $k = 0$.

Finalement, $\boxed{\text{les deux fonctions } f \text{ et } g \text{ sont égales sur } [0;1].}$

⋆⋆⋆
FIN
⋆⋆⋆