À rendre le mardi 28 Novembre

Devoir en temps libre n° 4

PROBLÈME

On admet que $A_n = \sum_{k=0}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et on souhaite calculer : $B_n = \sum_{k=0}^{n} k^3$ de deux façons différentes.

A- Première méthode.

A-1. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\binom{k}{3} = \binom{k+1}{4} - \binom{k}{4}$.

A-2. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{3}$.

A-3. Soit $n = 6$. Construire les 7 premières lignes du triangle de Pascal (on commence avec $n = 0$), encadrer les termes contenus dans la somme précédente et vérifier que la formule obtenue est correcte.

A-4. En utilisant la définition de $\binom{k}{3}$, montrer que : $\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{3} = \dfrac{1}{6} B_n - \dfrac{1}{2} A_n + \dfrac{n(n+1)}{6}$.

A-5. En déduire une expression simple de B_n.

B- Deuxième méthode. On considère : $S_n = \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} ij$.

B-1. Sans calculer A_n et B_n, montrer que : $S_n = \frac{1}{2}(A_n + B_n)$.

B-2. Justifier que : $S_n = \sum_{0 \leq j \leq i \leq n} ij$.

B-3. Montrer que : $\sum_{0 \leq i \leq j \leq n} ij + \sum_{0 \leq j \leq i \leq n} ij - \sum_{j=0}^{n} j^2 = \sum_{(i,j) \in [\![0;\, n]\!]^2} ij$.

B-4. Déduire des questions précédentes que : $B_n = \left(\sum_{k=0}^{n} k \right)^2$.

Correction du problème :

On admet que $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et on souhaite calculer : $B_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3$ de deux façons différentes.

A- Première méthode.

A-1. On applique la formule :

- Si $k < 3$ alors par définition du coefficient binômial l'égalité devient $0 = 0$ qui est vérifiée.
- Si $k = 3$ alors $\binom{2}{2} = 1$ et $\binom{2+1}{3} - \binom{2}{3} = 1 - 0 = 1$. L'égalité est vérifiée.
- Si $k \geq 4$ alors $\dbinom{k}{3} = \frac{k!}{3!(k-3)!} = \frac{k(k-1)(k-2}{6}$. D'autre part,

$$\begin{aligned}\tbinom{k+1}{4} - \tbinom{k}{4} &= \tfrac{(k+1)k(k-1)(k-2)}{24} - \tfrac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{24} = \tfrac{k(k-1)(k-2)[k+1-(k-3)]}{24} \\ &= \tfrac{k(k-1)(k-2)\times 4}{24} = \boxed{\frac{k(k-1)(k-2)}{6}.}\end{aligned}$$

L'égalité est donc démontrée.

Il existe une autre méthode utilisant la formule de Pascal : $\dbinom{k}{3} = \dbinom{k+1}{4} - \dbinom{k}{4} \Leftrightarrow \dbinom{k}{3} + \dbinom{k}{4} = \dbinom{k+1}{4}$ ce qui est vérifié par l'utilisation de la formule citée précédemment.

A-2. Remplaçons $\dbinom{k}{3}$ par l'expression précédente :

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{3} = \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{k+1}{4} - \binom{k}{4} \right) = \binom{n+1}{4} - \binom{0}{4} = \boxed{\binom{n+1}{4}}$ par télescopage.

A-3.

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	0	0	0	$\boxed{0}$	0	0	0
1	1	1	0	0	$\boxed{0}$	0	0	0
2	1	2	1	0	$\boxed{0}$	0	0	0
2	1	2	1	0	$\boxed{0}$	0	0	0
3	1	3	3	1	$\boxed{0}$	0	0	0
4	1	4	6	4	$\boxed{1}$	0	0	0
5	1	5	10	10	$\boxed{5}$	1	0	0
6	1	6	15	20	$\boxed{15}$	6	1	0
7	1	7	21	35	35	$\boxed{21}$	7	1

Sur le triangle de Pascal ci-dessus on constate que la somme des éléments entourés en noir correspond à la somme entouréeb en rouge ce qui correspond à la formule précédemment obtenue pour $n = 5$.

A-4. On a montré précédemment que si $k \geq 3$, $\binom{k}{3} = \frac{k(k-1)(k-2)}{6} = \frac{1}{6}(k^3 - 3k^2 + 2k)$. De plus cette égalité est en fait valable pour $k < 3$. Par linéarité,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{3} &= \tfrac{1}{6}\Big(\textstyle\sum_{k=1}^{n} k^3 - 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k \Big) \\ &= \boxed{\frac{1}{6}B_n - \frac{1}{2}A_n + \frac{n(n+1)}{6}.}\end{aligned}$$

A-5. Finalement,

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{6}B_n - \tfrac{1}{2}A_n + \frac{n(n+1)}{6} = \tbinom{n+1}{4} \\
\Leftrightarrow\quad & B_n = 3A_n - n(n+1) + \frac{(n+1)n(n-1)}{4} \\
\Leftrightarrow\quad & B_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} - n(n+1) + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4} \\
\Leftrightarrow\quad & B_n = \tfrac{n(n+1)}{4}\left(2(2n+1) - 4 + n^2 - 3n + 2\right) \\
\Leftrightarrow\quad & B_n = \tfrac{n(n+1)}{4}\left(n^2 + n\right) \\
\Leftrightarrow\quad & \boxed{B_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.}
\end{aligned}$$

B- Deuxième méthode. On considère : $S_n = \displaystyle\sum_{0\le i\le j\le n} ij.$

B-1. $\displaystyle\sum_{0\le i\le j\le n} ij = \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{j} ij\right).$

Or : $\displaystyle\sum_{i=0}^{j} ij = j\sum_{i=0}^{j} i = j\frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2}(j^3+j^2).$

Par conséquent, par linéarité : $S_n = \frac{1}{2}\left(\displaystyle\sum_{j=0}^{n} j^3 + \sum_{j=0}^{n} j^2\right)$, ce qui prouve au final :

$$\boxed{S_n = \frac{1}{2}(A_n + b_n).}$$

B-2. Les variables i et j étant muettes, on peut remplacer i par j et j par i dans S_n ce qui mène à l'égalité

: $\boxed{S_n = \displaystyle\sum_{0\le j\le i\le n} ij.}$

B-3.

$$\begin{aligned}
&\sum_{0\le i\le j\le n} ij + \sum_{0\le j\le i\le n} ij - \sum_{j=0}^{n} j^2 \\
=\;& \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{j} ij\right) + \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=j}^{n} ij\right) - \sum_{j=0}^{n} j^2 \\
=\;& \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{j} ij + \sum_{i=j}^{n} ij - j^2\right)
\end{aligned}$$

Or, par Chasles : si $j>0$: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} ij = \sum_{i=0}^{j-1} ij + \sum_{i=j}^{n} ij$ et $\displaystyle\sum_{i=0}^{j} ij = \sum_{i=0}^{j-1} ij + \underbrace{j^2}_{i=j}$

donc : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} ij = \sum_{i=0}^{j} ij + \sum_{i=j}^{n} ij - j^2.$

Il nous reste à contater que si $j=0$ alors la relation est encore vraie car tout est nul.

On en déduit :

$$\boxed{\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{j} ij + \sum_{i=j}^{n} ij - j^2\right)} = \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n} ij\right) = \boxed{\sum_{(i,j)\in[\![0;\,n]\!]^2} ij.}$$

B-4. L'égalité précédente s'écrit donc : $2S_n - A_n = \displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![0;\,n]\!]^2} ij$ d'après B2. Or, d'après B2 $S_n = \frac{1}{2}(A_n+B_n)$. Ainsi : $2S_n - A_n = B_n$. Au final, cela prouve que : $B_n = \displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![0;\,n]\!]^2} ij$. Par ailleurs, par propriété des sommes rectangulaires à variables séparables : $\displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![0;\,n]\!]^2} ij = \left(\sum_{i=0}^{n} i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} j\right) = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2.$

Il s'ensuit :

$$B_n = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2.$$