À rendre le mardi 03 Décembre

Devoir en temps libre n$^{\mathrm{o}}$ 4

PROBLÈME

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

2. On note f la fonction d'expression : $f(x) = 2\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right)$ ainsi que la fonction g d'expression : $g(x) = \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{(x-1)(x+1)}\right)$.

   (a) Donner les domaines de définitions de f et g. On notera D le domaine de définition de f dans la suite de l'exercice.

   (b) Montrer que $\forall x \in D \cap \mathbb{R}_+^*,\ f(-x) + f(x) = \pi$ et g est paire.

   (c) Montrer que pour tout $x \in]1;\ +\infty[$, $\tan(f(x))$ et $\tan(g(x))$ sont définis et vérifier que :
   $$\forall x \in]1;\ +\infty[,\ \tan(f(x)) + \tan(g(x)) = 0.$$

   (d) En déduire une expression simple de $2\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{(x-1)(x+1)}\right)$ pour tout réel $x > 1$.

   (e) Quelle est la relation entre $f(x)$ et $g(x)$ pour $x < -1$?

3. On considère dorénavant l'intégrale $I(a) = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{a - \cos(x)}$.

   (a) Vérifier que $I(a)$ est bien défini pour $a \in]-\infty;\ -1[\cup]1;\ \infty[$.

   (b) En vous aidant d'un changement de variable, montrer que :
   $$\forall a \in]-\infty;\ -1[\cup]1;\ \infty[, I(a) = \int_0^{\pi} \frac{dx}{a + \cos(x)}.$$
   En déduire que I est impaire.

   (c) Soit $a > 1$. Calculer les intégrales $J(a) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a - \cos(x)}$ et $K(a) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a + \sin(x)}$ à l'aide du changement de variable $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

   (d) Montrer que $I(a) = J(a) + K(a)$ à l'aide d'un changement de variable.

   (e) En déduire :
   $$\forall a > 1, I(a) = \frac{2}{\sqrt{(a+1)(a-1)}}\left(2\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{(a-1)(a+1)}\right) - \frac{\pi}{2}\right)$$
   puis une expression simple de $I(a)$ à l'aide de 2d.

Correction du problème :

1. Notons h la fonction d'expression : $h(x) = \mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$. Par opérations usuelles h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et par dérivation de fonctions composées : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, n\ h'(x) = 0$. On en déduit l'existence, $\mathbb{R}_+^*$ étant un intervalle, de $C \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, h(x) = C$. En particulier $h(1) = C$. Comme $\mathrm{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$, $C = \frac{\pi}{2}$ d'où au final :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.}$$

2. On note f la fonction d'expression : $f(x) = 2\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right)$ ainsi que la fonction g d'expression : $g(x) = \mathrm{Arctan}\left(\sqrt{(x-1)(x+1)}\right)$.

   (a) Puisque $\arctan$ est définie sur $\mathbb{R}$, f est défini si et seulement si $x \neq 1$, $\frac{x+1}{x-1} \geq 0$. En faisant un tableau de signes on obtient : $\frac{x+1}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty;\ -1] \cup]1;\ +\infty[$ on en déduit : $\boxed{D = \mathcal{D}_f =]-\infty;\ -1] \cup]1;\ +\infty[.}$ De la même façon : $\boxed{\mathcal{D}_g =]-\infty;\ -1] \cup [1;\ +\infty[.}$ (ici l'intervalle est fermé en 1 car l'expression de g n'a pas de quotient).

   (b) On constate que si $x \in x \in D \cap \mathbb{R}_+^*$ alors $-x \in D$ ce qui prouve que $f(-x) + f(x)$ est défini. De plus :
   $\forall x \in D \cap \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} f(-x) + f(x) &= 2\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\frac{-x+1}{-x-1}}\right) + 2\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right) \\ &= 2\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\frac{-(x-1)}{-(x+1)}}\right) + 2\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right) \\ &= 2\left(\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right) + \mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right)\right). \end{aligned}$$

   Or, si l'on pose $y = \arctan\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right)$ on constate alors que : $\arctan\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right) + \arctan\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right) = \arctan\left(\frac{1}{y}\right) + \arctan(y)$. D'autre part, puisque $y \in \mathbb{R}_+^*$ et d'après 1 : $\arctan\left(\frac{1}{y}\right) + \arctan(y) = \frac{\pi}{2}$ d'où :

   $\boxed{\forall x \in D \cap \mathbb{R}_+^*,\ f(x) + f(-x) = \pi.}$

   De la même façon, si $x \in \mathcal{D}_g$ alors $-x \in \mathcal{D}_g$ et $g(-x) = \arctan(\sqrt{(-x-1)(-x+1)}) = \arctan(\sqrt{-(x+1)(-(x-1))}) = \arctan(\sqrt{(x-1)(x+1)}) = g(x)$ ce qui prouve que <u>g est paire.</u>

   (c) Soit $x \in]1;\ +\infty[$. Alors : $1 < \frac{x+1}{x-1}$ car $x+1 > x-1$ et $x-1 > 0$. En passant à la racine et puisque $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ on en déduit : $\forall x \in]1;\ +\infty[,\ f(x) > \frac{\pi}{2}$. D'autre part $\forall y \in \mathbb{R},\ \arctan(y) < \frac{\pi}{2}$ donc : $\forall x \in]1;\ +\infty[,\ f(x) < \pi$. Au final :

   $\forall x \in]1;\ +\infty[,\ f(x) \in \left]\frac{\pi}{2};\ pi\right[$, ce qui prouve <u>l'existence de $\tan(f(x))$.</u> D'autre part il est évident que $\forall x \in]1;\ +\infty[,\ g(x) \in \left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[$ donc <u>$\tan(g(x))$ est bien défini pour tout $x > 1$.</u>

   Soit $x \in]1;\ +\infty[$. Par calcul : $\tan(f(x)) = \tan(2y) = \frac{2\tan(y)}{1-\tan^2(y)}$ avec $y = \arctan\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right)$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \tan(f(x)) &= \frac{2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{1 - \frac{x-1}{x+1}} = \frac{2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{\frac{-2}{x-1}} \\ &= -(x-1)\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = -\sqrt{(x-1)^2}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \\ &= -\sqrt{(x-1)(x+1)} = -\tan(g(x)) \end{aligned}.$$

On en déduit : $\boxed{\forall x \in]1;\ +\infty[,\ \tan(f(x)) + \tan(g(x)) = 0.}$

(d) D'après précédemment nous avons donc : $\forall x \in]1;\ +\infty[,\ \tan(g(x)) = \tan(-f(x)) = \tan(\pi - f(x))$ par π périodicité de $\tan$/ Or $\forall x \in]1;\ +\infty[$, $\frac{\pi}{2} < f(x) < \pi \Rightarrow -\pi < -f(x) < -\frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \pi - f(x) < \frac{\pi}{2}$. Au final :

$\tan(g(x)) = \tan(\pi - f(x))$ et $(g(x);\ \pi - f(x)) \in \left]0;\ \frac{\pi}{2}\right[^2$ donc $f(x) = \pi - f(x)$ bar bijectivité donc injectivité de la fonction $\tan$ sur $\left]0;\ \frac{\pi}{2}\right[$.

Nous avons donc : $\boxed{\forall x \in]1;\ +\infty[,\ f(x) + g(x) = \pi.}$

(e) Si $x < -1$ alors $-x > 1$ donc : $f(-x) + g(-x) = \pi$. Comme $g(-x) = g(x)$ par parité de g et $f(-x) = \pi - f(x)$ d'après précédemment, on en déduit : $\boxed{\forall x \in]-\infty;\ -1[,\ f(x) = g(x).}$

3. On considère dorénavant l'intégrale $I(a) = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{a - \cos(x)}$.

(a) Si $a \in]-\infty;\ -1[\cup]1;\ +\infty[$, alors $|a| > 1$ donc $\forall x \in [0;\ \pi],\ a - \cos(x) \neq 0$ car $\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leq \cos(x) \leq 1$. Alors $x \mapsto \dfrac{1}{a - \cos(x)}$ est continue sur $[0;\ \pi]$ par quotient ce qui prouve que $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{a - \cos(x)}$ donc que $\underline{I(a) \text{ est défini.}}$

(b) On considère l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{a - \cos(x)}$ et on fait le changement de variable $v = \pi - x \Leftrightarrow x = \pi - v$. Ceci défini une application $\varphi : v \mapsto \pi - v$ qui est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc en particuliers sur les nouveaux bords c'est à dire : $[0;\ \pi]$ également (pour $x_0 = 0, v_0 = \pi$ et pour $x_1 = \pi$, $v_1 = 0$). Comme $\forall v \in [0;\ \pi], \varphi'(x) = -1$ par changement de variable :

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{a + \cos(x)} = -\int_{\pi}^{0} \frac{dv}{a - \cos(v + \pi)} = \int_0^{\pi} \frac{dv}{a - \cos(v + \pi)}.$$

Or, $\forall v \in [0;\ \pi], \cos(v + \pi) = -\cos(v)$ d'où au final : $\boxed{I(a) = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{a + \cos(x)}.}$

Si $a \in]-\infty;\ -1[\cup]1;\ +\infty[$, alors $-a$ également donc $I(-a)$ est bien défini et $I(-a) = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{-a - \cos(x)} = -\int_0^{\pi} \frac{dx}{a + \cos(x)}$. Or, d'après ci-dessus, $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{a + \cos(x)} = I(a)$. Donc : $\forall a \in]-\infty;\ -1[\cup]1;\ +\infty[,\ I(-a) = -I(a)$ ce qui prouve que $\underline{I \text{ est impaire.}}$

(c) Soit $x \in [0;\ \frac{\pi}{2}]$. Si $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ alors $u \in [0;\ 1]$ et $\arctan(\tan\left(\frac{x}{2}\right)) = \frac{x}{2}$. Ainsi : $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow x = 2\arctan(u)$. Posons : $\varphi : u \mapsto 2\arctan(u)$. Alors φ est de classe C^1 sur $[0;\ 1]$ et $\forall u \in [0;\ 1], \varphi'(u) = \dfrac{2}{1 + u^2}$. Par ailleurs, comme $\cos(x) = \dfrac{1 - u^2}{1 + u^2}$ et $\sin(x) = \dfrac{2u}{1 + u^2}$ (preuve laissée au lecteur mais à faire !) on en déduit par changement de variable :

$$\boxed{J(a) = 2\int_0^1 \frac{du}{u^2(1 + a) + a - 1}, \quad K(a) = 2\int_0^1 \frac{du}{au^2 + 2u + a}.}$$

Par ailleurs, comme $a > 1$, $\sqrt{\dfrac{a-1}{a+1}}$ est défini et donc :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{du}{u^2(1 + a) + a - 1} &= \frac{1}{a+1}\int_0^1 \frac{du}{u^2 + \frac{a-1}{a+1}} \\
&= \frac{1}{a+1}\frac{a+1}{a-1}\left[\arctan\left(u\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}\right)\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{\sqrt{(a+1)(a-1)}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}\right).
\end{aligned}$$

On en déduit : $\boxed{J(a) = \dfrac{2}{\sqrt{(a+1)(a-1)}}\arctan\left(\sqrt{\dfrac{a+1}{a-1}}\right).}$

De même, pour $K(a)$ en factorisant par $a \neq 0$ nous en déduisons :

$$\begin{aligned}
&\boxed{K(a)}\\
= \;& \frac{2}{a}\int_0^1 \frac{du}{u^2+\frac{2}{a}u+1}\\
= \;& \frac{2}{a}\int_0^1 \frac{du}{\left(u+\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{(1-a)(1+a)}}{a}\right)^2}\\
= \;& \frac{2}{\sqrt{(a+1)(a-1)}}\left[\arctan\left(\frac{a}{\sqrt{(a-1)(a+1)}}\left(u+\frac{1}{a}\right)\right)\right]_0^1\\
\boxed{=} \;& \boxed{\frac{2}{\sqrt{(a+1)(a-1)}}\left(\arctan\left(\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}\right)-\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{(a+1)(a-1)}}\right)\right).}
\end{aligned}$$

(d) Par Chasles : $I(a)=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{a-\cos(x)}+\int_{/pi/2}^{\pi}\frac{dx}{a-\cos(x)}$.

Or, on peut exprimer $\displaystyle\int_{/pi/2}^{\pi}\frac{dx}{a-\cos(x)}$ à l'aide du changement de variable : $v=x-\frac{\pi}{2}$, ce qui donne pour nouveaux bords 0 et $\frac{\pi}{2}$ et donc, puisque par ailleurs $\cos(\pi/2-x)=\sin(x)$: $\displaystyle\int_{/pi/2}^{\pi}\frac{dx}{a-\cos(x)}=K(a)$. D'où au final :

$\boxed{I(a)=J(a)+K(a).}$

(e) On déduit des questions précédentes que :

$$I(a)=\frac{2}{\sqrt{(a+1)(a-1)}}\left(2\arctan\left(\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}\right)-\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{(a+1)(a-1)}}\right)\right)$$

où encore : $I(a)=\dfrac{2}{\sqrt{(a+1)(a-1)}}\left(f(a)-\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{(a+1)(a-1)}}\right)\right)$.

Or, d'après 1, $\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{(a+1)(a-1)}}\right)=\dfrac{\pi}{2}-\arctan\left(\sqrt{(a+1)(a-1)}\right)$.

Par conséquent :

$$I(a)=\frac{2}{\sqrt{(a+1)(a-1)}}(f(a)+g(a)-\tfrac{\pi}{2}).$$

Or $a>1$ donc d'après 2d, $f(a)+g(a)=\pi$. Au final nous en déduisons :

$$\boxed{I(a)=\frac{\pi}{\sqrt{(a+1)(a-1)}}.}$$

⋆⋆⋆
FIN
⋆⋆⋆