À rendre le mardi 7 Novembre

Devoir en temps libre n° 3

EXERCICE

On se propose de trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables en 0 telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = e^x f(y) + e^y f(x)\ (*).$$

Soit f une fonction vérifiant la relation $(*)$.

1. Montrer que l'on a $f(0) = 0$.
2. Montrer que $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = e^x \dfrac{f(h)}{h} + \dfrac{(e^h - 1)}{h} f(x)$.
3. On pose $a = f'(0)$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, f est dérivable en x et que $f'(x) - f(x) = ae^x$.
4. Résoudre l'équation différentielle précédente puis en déduire la forme de f.
5. Étudier la réciproque.

PROBLÈME

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \left(\dfrac{x}{2} + 9 + \dfrac{8}{x^2}\right) e^{1/x}$.

1. (a) Calculer les limites suivantes : $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{1/x}}{x^2}$; $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} x\left(e^{1/x} - 1\right)$ (*on pourra poser :* $X = \dfrac{1}{x}$.)
   (b) Déterminer les limites aux bords du domaine de définition de f.
   (c) Calculer : $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - \frac{x}{2}\right)$. En déduire que f admet en $\pm\infty$ une asymptote oblique dont on précisera l'équation réduite.
2. (a) Montrer f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = \dfrac{e^{1/x}(x+2)(x+1)(x^2 - 4x - 8)}{2x^4}$.
   (b) En déduire le tableau de variations de f.
   (c) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x} = 0$, puis en vous aidant de toutes les informations précédentes, tracer le plus précisément possible la courbe représentative de f.

Correction de l'exercice :

1. La relation $(*)$ pour $x = y = 0$ donne $f(0) = 2f(0)$ soit $\boxed{f(0) = 0.}$
2. D'après la relation $(*)$, $f(x+h) = e^x f(h) + e^h f(x)$. Ainsi $f(x+h) - f(x) = e^x f(h) + (e^h - 1)f(x)$ puis $\boxed{\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = e^x \dfrac{f(h)}{h} + \dfrac{(e^h - 1)}{h} f(x).}$
3. Puisque $f(0) = 0$, $\dfrac{f(h)}{h} = \dfrac{f(h) - f(0)}{h - 0}$ et donc : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h)}{h} = a$. De plus $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = g'(0) = 1$. On en déduit que $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ admet une limite (par somme), ce qui prouve que <u>f est dérivable en x</u> et : $\boxed{f'(x) - f(x) = ae^x}$ (par somme et produit).
4. La forme générale des solutions de l'équation homogène est $y_H(x) = Ae^x$, $A \in \mathbb{R}$. On cherche maintenant une solution particulière de notre équation différentielle de la forme Cxe^x. Après un petit calcul, la fonction de la forme précédente est solution de notre équation différentielle si et seulement si $C = a$. Ainsi $y_P(x) = axe^x$ est une solution particulière, et $f(x) = (ax + A)e^x$. Finalement, comme $f(0) = 0$, nous avons $A = 0$.
   Ainsi, si f vérifie la relation $(*)$, nécessairement $f(x) = axe^x$. Réciproquement, toute fonction de la forme précédente vérifie la relation $(*)$. Finalement, l'ensemble S des solution de $(*)$ est :
$$\boxed{S = \{Axe^x,\ A \in \mathbb{R}\}.}$$

Correction du problème :

1. (a) • On pose : $X = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{X}$. Alors : $\dfrac{e^{1/x}}{x^2} = \dfrac{e^X}{\left(\frac{1}{X}\right)^2} = X^2 e^X$. De plus : $\lim\limits_{x \to 0^-} X = -\infty$, donc par changement de variables : $\boxed{\lim\limits_{x \to O^-} \dfrac{e^{1/x}}{x^2} = \lim\limits_{X \to -\infty} X^2 e^X = 0,}$ par croissances comparées.

   • On pose : $X = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{X}$. Alors : $x\left(e^{1/x} - 1\right) = \dfrac{1}{X}(e^X - 1) = \dfrac{e^X - 1}{X}$. De plus : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} X = 0$, donc par changement de variables : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^{1/x} - 1\right) = \lim\limits_{X \to 0} \dfrac{e^X - 1}{X} = 1.}$

   (b) • Nous avons : $f(x) = \left(\dfrac{x}{2} + 9\right) e^{1/x} + 8\dfrac{e^{1/x}}{x^2}$. Or, par opérations élémentaires : $\lim\limits_{x \to 0^-} \left(\dfrac{x}{2} + 9\right) e^{1/x} = 0$ puisque : $\lim\limits_{x \to 0^-} e^{1/x} = 0$. De plus, $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{e^{1/x}}{x^2} = 0$ d'après la question précédente. Ainsi : $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0.}$

   • Puisque : $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{1/x} = +\infty$, alors par opérations élémentaires $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty.}$

   • Puisque $\lim\limits_{x \to \pm\infty} e^{1/x} = 1$, par opérations élémentaires, $\boxed{\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty.}$

   (c) Nous avons : $f(x) - \frac{x}{2} = \frac{1}{2}x\left(e^{1/x} - 1\right) + \left(9 + \dfrac{8}{x^2}\right) e^{1/x}$. Or d'après 1., $\lim\limits_{x \to \pm\infty} x\left(e^{1/x} - 1\right) = 1$ et par opérations élémentaires, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(9 + \dfrac{8}{x^2}\right) e^{1/x} = 9$. Par conséquent, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - \dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{19}{2}.}$

   Nous en déduisons : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - \left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{19}{2}\right)\right) = 0$, donc <u>la courbe représentative de f admet une asymptote oblique d'équation réduite : $y = \frac{x}{2} + \frac{19}{2}$.</u>

2. (a) Par composition, la fonction définie par $g(x) = e^{1/x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*, g'(x) = -\dfrac{1}{x^2} e^{1/x}$. Ainsi, par opérations élémentaires, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^*,\quad f'(x) &= \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{16}{x^3}\right) e^{1/x} + \left(\tfrac{x}{2} + 9 + \tfrac{8}{x^2}\right) \frac{-e^{1/x}}{x^2} \\ &= \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{16}{x^3} - \tfrac{1}{2x} - \tfrac{9}{x^2} - \tfrac{8}{x^4}\right) e^{1/x} \\ &= \frac{x^4 - 32x - x^3 - 18x^2 - 16}{2x^4} e^{1/x}.\end{aligned}$$

Il nous reste à remarquer que :

$$\begin{aligned}(x+2)(x+1)(x^2-4x-8) &= (x^2+3x+2)(x^2-4x-8) \\ &= x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 3x^3 - 12x^2 - 24x + 2x^2 - 8x - 16 \\ &= x^4 - x^3 - 32x - 16.\end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = \dfrac{e^{1/x}(x+2)(x+1)(x^2-4x-8)}{2x^4}.}$

(b) L'expression $f'(x)$ est du signe de $(x+2)(x+1)(x^2-4x-8)$. Or, x^2-4x-8 a pour discriminant $48 = (4\sqrt{3})^2$. Ses racines sont donc : $x_1 = 2(1-\sqrt{3}) \approx -1.46$ et $x_2 = 2(1+\sqrt{3}) \approx 5.45$. Ce trinôme est donc positif à l'extérieur des racines. On obtient le signe du produit à l'aide du tableau de signes suivant :

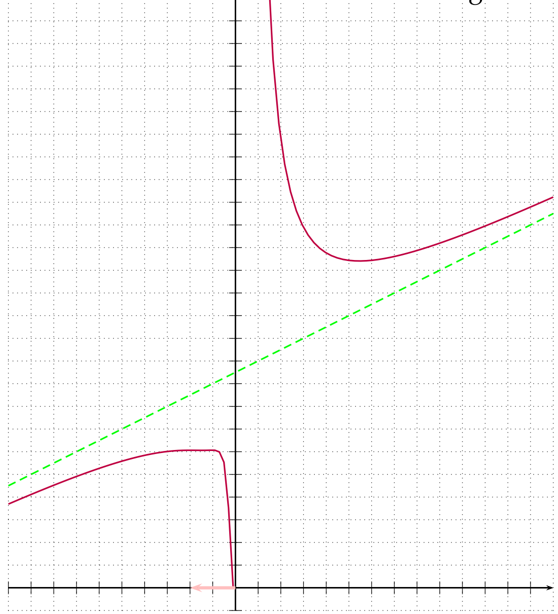
x	$-\infty$		-2		x_1		-1		x_2		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$x+1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-4x-8		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$(x+2)(x+1)(x^2-4x-8)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Nous en déduisons donc le tableau de variations, les limites ayant été calculées précédemment :

x	$-\infty$		-2		x_1		-1		0		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{10}{\sqrt{e}} \approx 6.06$	$\searrow$	≈ 6.05	$\nearrow$	$\frac{33}{2e} \approx 6.07$	$\searrow$	$0 \Vert +\infty$	$\searrow$	$\approx 14,41$	$\nearrow$	$+\infty$

(c) Nous avons : $\dfrac{f(x)}{x} = \frac{e^{1/x}}{2} + (9x^2+8)\dfrac{e^{1/x}}{x^3}$. Or, toujours par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{e^{1/x}}{x^3} = 0$, donc par opérations élémentaires, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0.}$

Si nous posons : $f(0) = 0$ (vu que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$) alors, nous avons $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$. Le taux d'accroissement admet donc une limite nulle en 0^-. On en déduit donc une demi-tangente horizontale en 0^-.



Il est à noter les deux éléments non visibles à l'oeil nu sur le graphique à cause de l'échelle :

- Le changement du sens de variations de la courbe entre -2 et 0.
- Une demi-tangente horizontale en 0^-.