À rendre le mardi 05 Novembre

Devoir en temps libre n° 3

EXERCICE 1

1. (a) Montrer que : $(2+i)^3 = 2+11i$, puis déterminer les racines cubiques de $2+11i$.
   (b) Déterminer les racines cubiques de $2-11i$.
2. On cherche à résoudre l'équation : (E) $x^3 - 15x - 4 = 0$. Notons x_0 une racine quelconque de (E).
   (a) Justifier l'existence des deux nombres complexes u et v tels que : $\begin{cases} u+v = x_0 \\ uv = 5 \end{cases}$
   (b) Montrer que $u^3+v^3 = 4$, puis que les nombres complexes u^3 et v^3 sont solutions du système : $\begin{cases} u^3+v^3 = 4 \\ u^3v^3 = 125. \end{cases}$
   (c) En déduire que u^3 et v^3 sont solutions d'une équation du second degré que l'on explicitera, puis que l'on résoudra.
   (*on rappelle que* $11^2 = 121$).
   (d) À l'aide de 1., en déduire toutes les valeurs possibles pour u.
   (e) Pour chaque valeur de u possible, déterminer la valeur de v correspondante.
   (f) En déduire que x_0 peut alors être égal à trois nombres complexes distincts que l'on explicitera.
   (g) On admet que (E) admet **exactement** trois solutions distinctes. Déterminer alors l'ensemble des solutions de (E).

EXERCICE 2

On considère l'équation différentielle :

$$y''' + y'' + y' + y = 0 \ \ (E)$$

où y''' désigne la dérivée troisième de y.

(Q 1) (a) Montrer que si y_1, y_2, y_3 sont des solutions de (E) alors pour $(\lambda, \mu, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ la fonction $\lambda y_1 + \mu y_2 + \gamma y_3$ est encore solution.
(b) Montrer que $x \mapsto e^{rx}$ est solution de (E) si et seulement si r est solution de l'équation $r^3 + r^2 + r + 1 = 0$ (E_1).
(c) Résoudre cette dernière équation (E_1) dans $\mathbb{C}$.
(d) Des questions précédentes, montrer que $x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu\cos(x) + \gamma\sin(x)$ est solution de (E), pour tout $(\lambda, \mu, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

On a donc montré que :

$$\left\{x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu\cos(x) + \gamma\sin(x); (\lambda, \mu, \gamma) \in \mathbb{R}^3\right\} \subset \mathcal{S}$$

avec $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation (E).

(Q 2) Traitons la réciproque.

(a) Soit y une solution de (E). Montrer que $u = y' + y$ est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 que l'on résoudra.

(b) Donner l'ensemble des solutions de $y' + y = 0$.

(c) Chercher une solution particulière de $y' + y = \lambda \cos(x) + \mu \sin(x)$.

(d) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Correction de l'exercice 1:

1. (a) $(2+i)^3 = 2^3 + 3.2^2.i + 3.2.i^2 + i^3 = 8 + 12i - 6 - i = \boxed{2+11i}$.
Nous avons alors :
$$\begin{aligned} z^3 = 2+11i \quad &\Leftrightarrow \left(\tfrac{z}{2+i}\right)^3 = 1 \\ &\Leftrightarrow \tfrac{z}{2+i} = 1 \text{ ou } \tfrac{z}{2+i} = j \text{ ou } \tfrac{z}{2+i} = j^2 \\ &\Leftrightarrow z = 2+i \text{ ou } z = (2+i)j \text{ ou } z = (2+i)j^2 \end{aligned}.$$
$\boxed{\text{Les racines cubiques de } 2+11i \text{ sont donc : } 2+i,\ (2+i)j,\ (2+i)j^2.}$

(b) Nous avons :
$$\begin{aligned} z^3 = 2-11i \quad &\Leftrightarrow \overline{z^3} = \overline{2-11i} \\ &\Leftrightarrow \overline{z}^3 = 2+11i \\ &\Leftrightarrow \overline{z} = 2+i \text{ ou } \overline{z} = (2+i)j \text{ ou } \overline{z} = (2+i)j^2 \\ &\Leftrightarrow z = \overline{2+i} \text{ ou } z = \overline{(2+i)j} \text{ ou } z = \overline{(2+i)j^2} \\ &\Leftrightarrow z = 2-i \text{ ou } z = (2-i)\overline{j} \text{ ou } z = (2-i)\overline{j^2} \\ &\Leftrightarrow z = 2-i \text{ ou } z = (2-i)\overline{j} \text{ ou } z = (2-i)\overline{j}^2 \\ &\Leftrightarrow z = 2-i \text{ ou } z = (2-i)j^2 \text{ ou } z = (2-i)j^4 \\ &\Leftrightarrow z = 2-i \text{ ou } z = (2-i)j^2 \text{ ou } z = (2-i)j \end{aligned}$$
$\boxed{\text{Les racines cubiques de } 2-11i \text{ sont donc : } 2-i,\ (2-i)j^2,\ (2-i)j.}$

2. (a) Considérons l'équation du second degré $z^2 - x_0 z + 5 = 0$. Cette équation admet bien deux solutions complexes que l'on note u et v (avec éventuellement $u = v$). Alors, d'après les relations coefficient/racines, nous en déduisons :
$u + v = x_0$ et $uv = 5$, d'où <u>l'existence de u et v</u> tels que $\boxed{\begin{cases} u+v = x_0 \\ uv = 5 \end{cases}}$

(b) Puisque x_0 est solution de (E), et que $x_0 = u+v$, nous avons :
$$\begin{aligned} (u+v)^3 - 15(u+v) - 4 = 0 \quad &\Leftrightarrow u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 - 15(u+v) = 4 \\ &\Leftrightarrow u^3 + v^3 + 3uv(u+v) - 15(u+v) = 4 \\ &\Leftrightarrow u^3 + v^3 + 15(u+v) - 15(u+v) = 4 \quad (uv = 5) \\ &\Leftrightarrow u^3 + v^3 = 4. \end{aligned}$$
Ainsi : $u^3 + v^3 = 4$. De plus $uv = 5 \Rightarrow (uv)^3 = (5)^3 = 125$. Comme $(uv)^3 = u^3v^3$, nous en déduisons que :

$\boxed{\text{les nombres complexes } u^3 \text{ et } v^3 \text{ sont solutions du système : } \begin{cases} u^3 + v^3 = 4 \\ u^3v^3 = 125. \end{cases}}$

(c) Puisque, u^3 et v^3 sont solutions du système précédent, il sont solutions de l'équation du second degré : $X^2 - 4X + 125 = 0$. On calcule le discriminant : $\Delta = 16 - 500 = -484 = -4 \times 121 = (2 \times 11i)^2$. Puisque : $\Delta < 0$, et que l'équation est à coefficients réels, nous avons deux solutions complexes conjuguées : $\begin{aligned} z_1 &= \tfrac{4-2\times 11i}{2} \\ &= 2-11i \end{aligned}$ ou $\begin{aligned} z_2 &= \tfrac{4+2\times 11i}{2} \\ &= 2+11i. \end{aligned}$
Ainsi : $\boxed{S = \{z_1;\ z_2\}.}$

(d) Nous avons donc : $u^3 = 2-11i$ et $v^3 = 2+11i$ ou $u^3 = 2+11i$ et $v^3 = 2-11i$. D'après 1.,
$$\boxed{u \in S_0 = \{2+i;\ (2+i)j;\ (2+i)j^2;\ 2-i;\ (2-i)j;\ (2-i)j^2\}.}$$

(e) Nous avons $uv = 5$, ainsi :
$$\begin{aligned} &\text{si } u = 2+i, && v = \tfrac{5}{2+i} = \boxed{2-i} \\ &\text{si } u = (2+i)j && v = \tfrac{5}{(2+i)j} = \tfrac{5j^2}{(2+i)j^3} = \tfrac{5j^2}{2+i} = \boxed{(2-i)j^2} \\ &\text{si } u = (2+i)j^2 && v = \tfrac{5}{(2+i)j^2} = \tfrac{5j}{(2+i)j^3} = \tfrac{5j}{2+i} = \boxed{(2-i)j} \\ &\text{si } u = 2-i, && v = \tfrac{5}{2-i} = \boxed{2+i} \\ &\text{si } u = (2-i)j && v = \tfrac{5}{(2-i)j} = \tfrac{5j^2}{(2-i)j^3} = \tfrac{5j^2}{2-i} = \boxed{(2+i)j^2} \\ &\text{si } u = (2-i)j^2 && v = \tfrac{5}{(2+-)j^2} = \tfrac{5j}{(2-i)j^3} = \tfrac{5j}{2-i} = \boxed{(2+i)j} \end{aligned}$$

(f) D'après la question précédente :
$u + v = 2 + i + 2 - i$ ou $u + v = (2+i)j + (2-i)j^2 = (2+i)j + \overline{(2+i)j}$ ou $u + v = (2+i)j^2 + (2-i)j = (2-i)j + \overline{(2-i)j}$. On calcule ces trois valeurs : $u_1 = 4$, $u_2 = 2\mathcal{R}e((2+i)j) = -2-\sqrt{3}$, $u_3 = 2\mathcal{R}e((2-i)j) = -2+\sqrt{3}$.
Ainsi : $\boxed{x_0 \in S_0 = \{4;\ -2-\sqrt{3};\ -2+\sqrt{3}\}.}$

(g) Il est maintenant temps de faire le point : Qu'a-t-on montré ? Nous avons montré que :
$$x_0 \text{ solution de (E) } \Rightarrow x_0 = 4 \text{ ou } x_0 = -2-\sqrt{3} \text{ ou } x_0 = -2+\sqrt{3}.$$

Ceci ne veut pas dire que les trois valeurs trouvées ci-dessus sont forcément solutions, ce ne sont que des valeurs POSSIBLES. Il reste donc à étudier la réciproque : puisque cette équation admet EXACTEMENT trois solutions distinctes, nous n'avons pas le choix, les trois valeurs $4,\ -2-\sqrt{3},\ -2+\sqrt{3}$ sont FORCÉMENT solutions. On en déduit que :
l'ensemble des solutions de (E) est **EXACTEMENT** l'ensemble : $\boxed{\{4;\ -2-\sqrt{3};\ -2+\sqrt{3}\}}$.

Correction de l'exercice 2:

(Q 1) (a) Soient y_1, y_2, y_3 sont des solutions de (E). Soit $(\lambda,\mu,\gamma)\in\mathbb{R}^3$. Alors

$$\Big(\lambda y_1+\mu y_2+\gamma y_3\Big)'''+\Big(\lambda y_1+\mu y_2+\gamma y_3\Big)''+\Big(\lambda y_1+\mu y_2+\gamma y_3\Big)'+\Big(\lambda y_1+\mu y_2+\gamma y_3\Big)$$

$$= \lambda(y_1'''+y_1''+y_1'+y_1)+\mu(y_2'''+y_2''+y_2'+y_2)+\gamma(y_3'''+y_3''+y_3'+y_3)$$
$$= \lambda\times 0+\mu\times 0+\gamma\times 0 = 0$$

On a donc montré que $\lambda y_1+\mu y_2+\gamma y_3$ est encore solution de E.

(b) Cette fonction est trois fois dérivable et $y'(x) = re^{rx}, y''(x) = r^2e^{rx}, y'''(x) = r^3e^{rx}$. Donc, y est solution si et seulement si $\forall x\in\mathbb{R}, r^3e^{rx}+r^2e^{rx}+re^{rx}+e^{rx}=0$ ce qui équivaut à $\forall x\in\mathbb{R}, \Big(r^3+r^2+r+1\Big)e^{rx}=0$. Or une exponentielle n'est jamais nulle. Par conséquent, y est solution si et seulement si $r^3+r^2+r+1=0$.

(c) On peut effectuer une division euclidienne de cette expression polynomiale par $r+1$ puisque (-1) est racine évidente. Sinon, $r^3+r^2+r+1 = r^2(r+1)+1\times(r+1) = (r+1)(r^2+1)$. Ainsi, r est solution de (E_1) si et seulement si

$$\boxed{r=-1, r=\pm i}.$$

(d) Par les deux questions précédentes, on obtient que $x\mapsto e^{-x}$ est solution de l'équation, ainsi que $x\mapsto e^{ix}$. Donc la partie réelle et la partie imaginaire de cette fonction sont encore solutions, à savoir $\cos$ et $\sin$. Puis par la première question, on en déduit que $x\mapsto \lambda e^{-x}+\mu\cos(x)+\gamma\sin(x)$ est solution de (E), pour tout $(\lambda,\mu,\gamma)\in\mathbb{R}^3$.

(Q 2) (a) On a $u''+u = y'''+y''+y'+y = 0$. Donc, u est solution de $y''+y=0$.

(b) L'équation caractéristique de cette équation différentielle linéaire d'ordre 2 est $r^2+1=0 \Leftrightarrow r=\pm i$. Par théorème, l'ensemble des solutions est :

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda\cos(x)+\mu\sin(x) \end{array} ; (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2 \right\}.$$

(c) L'ensemble des solutions de $y'+y=0$ est par propriété :

$$S = \{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & Ce^{-x} \end{array} ; C\in\mathbb{R}\}$$

(d) On cherche une solution particulière sous la forme $C_1\cos+C_2\sin$, fonction dérivable en tant que somme de fonctions dérivables. Ainsi,

$$\begin{array}{rl} & (C_1\cos+C_2\sin)'+(C_1\cos+C_2\sin) = \lambda\cos+\mu\sin \\ \Leftrightarrow & (C_2+C_1)\cos+(C_2-C_1)\sin = \lambda\cos+\mu\sin \end{array}.$$

On pose

$$\left\{ \begin{array}{rcl} C_2+C_1 & = & \lambda \\ C_2-C_1 & = & \mu \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} C_2 & = & \frac{\lambda+\mu}{2} \\ C_1 & = & \frac{\lambda-\mu}{2} \end{array} \right.$$

Une solution particulière est donc $\frac{\lambda-\mu}{2}\cos+\frac{\lambda+\mu}{2}\sin$.

(e) Par théorème, l'expression de y est :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & Ce^{-x}+\frac{\lambda-\mu}{2}\cos+\frac{\lambda+\mu}{2}\sin \end{array}$$

avec $(C,\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^3$. On a donc montré que l'ensemble des solutions de cette équation différentielle est

$$\boxed{S = \Big\{x\mapsto \lambda e^{-x}+\mu\cos(x)+\gamma\sin(x); (\lambda,\mu,\gamma)\in\mathbb{R}^2\Big\}.}$$

⋆ ⋆ ⋆
FIN
⋆ ⋆ ⋆