À rendre le mercredi 18 Octobre

Devoir en temps libre n$^{\text{o}}$ 2

EXERCICE 1

Soit $f : t \mapsto \frac{1+\sin(t)}{\sqrt{3}+\cos(t)}$.

1. Montrer qu'il existe $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ que l'on précisera tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sqrt{3}\cos(t)+\sin(t) = r\cos(t-\theta)$.
2. Donner le domaine de définition de f et expliquer pourquoi il est suffisant de l'étudier sur $[-\pi; \pi]$.
3. Calculer $f'(t)$ pour $t \in [-\pi; \pi]$ puis dresser le tableau de variations de f.
4. Construire la courbe représentative de f sur $[-2\pi; 2\pi]$.

EXERCICE 2

À tout nombre complexe non nul, on associe dans le plan usuel, muni du repère $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$, les points A, B, C d'affixes respectives :

$$a = z; b = \overline{z}; c = \frac{z^2}{\overline{z}}.$$

1. On note r le module de z et θ un argument de z . Exprimer un argument de b et de c. Comment faut-il choisir z pour que les points A, B et C soient distincts deux à deux ? Dans la suite de cet exercice, on supposera la condition réalisée.
2. Montrer que A, B et C appartiennent à un même cercle de centre O.
3. Montrer que $AB = AC$.
4. Le point A étant donné, indiquer une construction géométrique du point B, puis du point C. Réaliser cette construction à partir d' un point quelconque A dans le plan muni du repère usuel.
5. On pose $Z = \frac{a-c}{b-c}$.
   (a) Montrer que $Z = \frac{\sin(\theta)e^{i\theta}}{\sin(2\theta)}$.
   (b) Résoudre alors $|Z| = 1$.
   (c) En déduire l'ensemble des points A tels que le triangle ABC soit équilatéral.

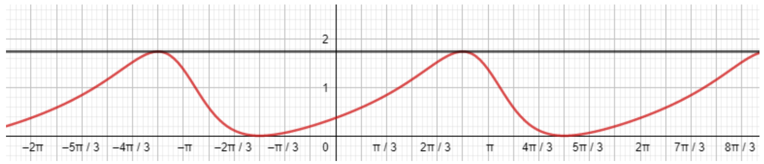
Correction de l'exercice 1:

1. On factorise par $|\sqrt{3}+1\times i| = 2$ et ainsi
$\sqrt{3}\cos(t)+\sin(t) = 2\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(t)+\frac{1}{2}\sin(t)\right) = 2\left(\cos(\frac{\pi}{6})\cos(t)+\sin(\frac{\pi}{6})\sin(t)\right) =$ $\boxed{2\cos(t-\frac{\pi}{6})}$

2. Le nombre $f(t)$ a un sens si et seulement si $\sqrt{3}+\cos(t)\neq 0 \Leftrightarrow \cos(t)\neq -\sqrt{3} < -1$. Ainsi, le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$. De plus, f est 2π périodique :
$$\forall t\in\mathbb{R}, f(t+2\pi) = \frac{1+\sin(t+2\pi)}{\sqrt{3}+\cos(t+2\pi)} = f(t)$$
Il est donc suffisant de l'étudier sur $[0;2\pi]$ et on complètera le tracé par translation.

3. La fonction f est dérivable sur $[0;2\pi]$ en tant que quotient de fonctions qui le sont. On utilise $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$ et on a :
$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{\cos(t)[\sqrt{3}+\cos(t)]-(1+\sin(t))[-\sin(t)]}{[\sqrt{3}+\cos(t)]^2} = \frac{\sqrt{3}\cos(t)+\sin(t)+1}{[\sqrt{3}+\cos(t)]^2} \\ &= \boxed{\frac{2\cos(t-\frac{\pi}{6})+1}{[\sqrt{3}+\cos(t)]^2}} \end{aligned}$$
On étudie le signe du numérateur et A L'AIDE D'UN CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE, on a :
$$2\cos(t-\frac{\pi}{6})+1\geq 0 \Leftrightarrow \cos(t-\frac{\pi}{6})\geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-2\pi}{3}\leq t-\frac{\pi}{6}\leq\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}\leq t\leq\frac{5\pi}{6}$$
Finalement, le tableau de variations est

t	$-\pi$		$-\pi/2$		$5\pi/6$		π
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$\frac{1}{\sqrt{3}-1}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt{3}$	$\searrow$	$\frac{1}{\sqrt{3}-1}$

4. 

Correction de l'exercice 2:

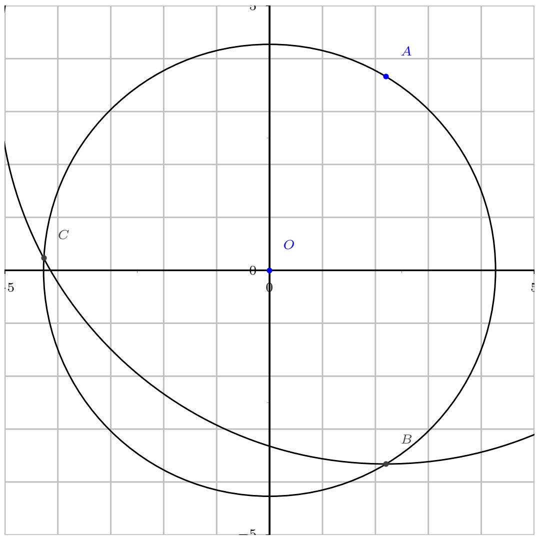
1. Si $a = re^{i\theta}$, alors : $b = re^{i(-\theta)}$ et $c = \dfrac{r^2e^{2i\theta}}{re^{-i\theta}} = re^{3i\theta}$. Ainsi :
A et B confondus si et seulement si $\theta = -\theta\ [2\pi] \Leftrightarrow \theta = 0\ [\pi]$. A et C confondus si et seulement si $\theta = 3\theta\ [2\pi] \Leftrightarrow \theta = 0\ [\pi]$ B et C confondus si et seulement si $-\theta = 3\theta\ [2\pi] \Leftrightarrow \theta = 0\ \left[\frac{\pi}{2}\right]$.
Par conséquent : $\boxed{A, B \text{ et } C \text{ distincts si et seulement si : } \theta\notin\left\{0;\ \frac{\pi}{2};\ \pi;\ \frac{3\pi}{2}\right\}\ [2\pi].}$

2. Il s'agit de remarquer que : $|a| = |b| = |c| \Leftrightarrow OA = OB = OC$. Les trois points appartiennent donc à un même cercle de centre O.

3. $AB = |b-a| = r|e^{-i\theta}-e^{i\theta}|$.
$AC = |c-a| = r|e^{i3\theta}-e^{i\theta}|$. Or : $e^{i3\theta}-e^{i\theta} = e^{2i\theta}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})$ donc en passant au module :
$\boxed{AC = r|e^{i\theta}-e^{-i\theta}|}$ car $|e^{i\theta}| = 1$. Puisque : $|u| = |-u|$, on en déduit :
$\boxed{AC = r|e^{-i\theta}-e^{i\theta}| = AB}$, ce qu'il fallait démontrer.

4. Le point B s'obtient par symétrie de A par rapport à l'axe des abcsisses. Puisque $AB = AC$, Le point C appartient d'une part au cercle de centre A et de rayon AB.

D'autre part, il appartient également au cercle de rayon $[OA]$. Ces deux cercles ont deux points d'intersection dont l'un des deux est le point B. L'autre point d'intersection est donc nécessairement le point C.



5. (a) $Z = \dfrac{re^{i\theta} - re^{3i\theta}}{re^{i\theta} - re^{-i\theta}} = \dfrac{e^{-i\theta} - e^{3i\theta}}{e^{-i\theta} - e^{3i\theta}}$.

Or, $e^{i\theta} - e^{3i\theta} = e^{2i\theta}(e^{-i\theta} - e^{i\theta}) = -2i\sin(\theta)e^{2i\theta}$.

De plus, $e^{-i\theta} - e^{3i\theta} = e^{i\theta}(e^{-2i\theta} - e^{2i\theta}) = -2i\sin(2\theta)e^{i\theta}$.

Par conséquent : $\boxed{Z = \dfrac{-2i\sin(\theta)e^{2i\theta}}{-2i\sin(2\theta)e^{i\theta}} = \dfrac{\sin(\theta)e^{i\theta}}{\sin(2\theta)}.}$

(b) D'après ci-dessus, $|Z| = 1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{\sin(\theta)e^{i\theta}}{\sin(2\theta)}\right| = 1 \Leftrightarrow |\sin(\theta)| = |\sin(2\theta)| \Leftrightarrow$ $\sin(2\theta) = \sin(\theta)$ ou $\sin(2\theta) = -\sin(\theta)$.

Or : $\sin(2\theta) = \sin(\theta) \quad \Leftrightarrow 2\theta = \theta\ [2\pi]$ ou $2\theta = \pi - \theta\ [2\pi]$

$\Leftrightarrow \theta = 0\ [2\pi]$ ou $\theta = \dfrac{\pi}{3}\ \left[\dfrac{2\pi}{3}\right]$

De même, puisque $-\sin(\theta) = \sin(-\theta)$, on en déduit :

$\sin(2\theta) = -\sin(\theta) \quad \Leftrightarrow 2\theta = -\theta\ [2\pi]$ ou $2\theta = \pi + \theta\ [2\pi]$

$\Leftrightarrow \theta = 0\ \left[\frac{2\pi}{3}\right]$ ou $\theta = \pi\ [2\pi]$

En se souvenant que : $\theta \notin \left\{0;\ \frac{\pi}{2};\ \pi;\ \frac{3\pi}{2}\right\}\ [2\pi]$, on en déduit que :

$\boxed{|Z| = 1 \Leftrightarrow \theta = \pm\dfrac{\pi}{3}[2\pi] \text{ ou } \theta = \pm\dfrac{2\pi}{3}[2\pi].}$

(c) Le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $BC = AC = AB$. Or, $AC = AB$ est toujours vérifiée et :

$$\begin{aligned} |Z| = 1 \quad &\Leftrightarrow \left|\frac{a-c}{b-c}\right| = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{|a-c|}{|b-c|} = 1 \\ &\Leftrightarrow |a-c| = |b-c| \\ &\Leftrightarrow AC = BC. \end{aligned}$$

Par conséquent :

Le triangle ABC est équilatéral si et seulement si z a un argument θ tel que :

$\boxed{\theta = \pm\dfrac{\pi}{3}[2\pi] \text{ ou } \theta = \pm\dfrac{2\pi}{3}[2\pi].}$ Autrement dit, il s'agit de :

la réunion de quatre droites, privé de l'origine du repère.

⋆ ⋆ ⋆
FIN
⋆ ⋆ ⋆