À rendre le mardi 24 Septembre

Devoir en temps libre n$^{\text{o}}$ 1

EXERCICE

Déterminer si les assertions ci-dessous sont vraies et écrire leurs négations. Justifiez.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 1$;
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 1$;
3. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 1$;
4. $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 1$.

PROBLÈME

(Q 1) **Une formule pour la suite.**

(Q a) Pour quelles valeurs de θ les expressions $\tan(\theta)$ et $\tan(2\theta)$ ne sont elles pas définies ? On représentera les points associés à ces réels sur le cercle trigonométrique.

(Q b) Exprimer $\tan(2\theta)$ en fonction de $\tan(\theta)$.

(Q c) En déduire que $\tan(\frac{\pi}{8})$ et $\tan(\frac{5\pi}{8})$ sont solutions de l'équation : $1 = \frac{2X}{1-X^2}$.

(Q d) La résoudre et obtenir les valeurs de $\tan(\frac{\pi}{8})$ et $\tan(\frac{5\pi}{8})$.

(Q e) En déduire $\tan(\frac{3\pi}{8})$ et $\tan(\frac{7\pi}{8})$.

(Q f) **À la règle et au compas**, construire alors les points du cercle trigonométrique associés aux angles $\frac{\pi}{8}[\frac{\pi}{4}]$.

(Q 2) **Une formule pour la suite.**

(Q a) Pour quelles valeurs de θ les expressions $\tan(\theta)$ et $\tan(4\theta)$ ne sont elles pas définies ? On représentera les points associés à ces réels sur le cercle trigonométrique.

(Q b) Exprimer $\tan(4\theta)$ en fonction de $\tan(\theta)$.

(Q 3) **La formule de Machin (John), début du 18ième siècle !**. On note $(\alpha, \beta) \in [0; \pi/2[\times[0; \pi/2[$ vérifiant $\tan(\alpha) = \frac{1}{5}$ et $\tan(\beta) = \frac{1}{239}$.

(Q a) Vérifier que α et β sont des angles appartenant à $]0; \frac{\pi}{8}[$.

(Q b) En déduire que $4\alpha - \beta \in]-\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{2}[$.

(Q c) Donner $\tan(4\alpha)$ sous la forme d'une fraction en expliquant pourquoi ce nombre est bien défini.

(Q d) En déduire que $\tan(4\alpha - \beta) = 1$.

(Q e) En déduire LA valeur de $4\alpha - \beta$.

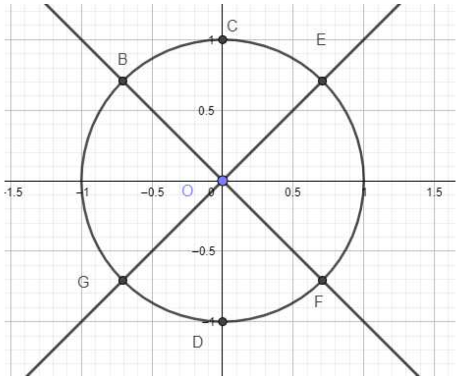
Correction de l'exercice :

1. La négation de $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 1$ est : $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \,/\, x + y^2 \neq 1$. La négation de l'assertion est vraie car pour $x = y = 0$, $x^2 + y^2 \neq 1$ ce qui prouve que l'assertion est fausse.
2. La négation de $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 1$ est $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y^2 \neq 1$. La négation de l'assertion est vraie car si $x = 2$, $\forall y \in \mathbb{R} x + y^2 \geq x > 1$. Ainsi $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y^2 \neq 1$ ce qui prouve que l'assertion initiale est fausse.
3. La négation de $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 1$ est $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \,/\, x + y^2 \neq 1$. La négation est vraie car :
   — Si $x \neq 1$, $y = 0$ convient ;
   — Si $x = 1$, $y = 1$ convient.
   Bref l'assertion est donc fausse.
4. La négation de $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 1$ est $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y^2 \neq 1$. Ici l'assertion est vraie car si $x = 1$ et $y = 0$ alors : $x + y^2 = 1$.

Correction du problème :

(Q 1) **Une formule pour la suite.**

(Q a) Le nombre $\tan(\theta)$ n'a pas de sens si et seulement si $\theta \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ Le nombre $\tan(2\theta)$ n'a pas de sens si et seulement si $2\theta \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \theta \equiv \frac{\pi}{4}[\frac{\pi}{2}]$.



(Q b) On sait que :

$$\boxed{\tan(2\theta) = \frac{2\tan(\theta)}{1 - \tan^2(\theta)}}$$

(Q c) Prenons $\theta = \pi/8$, valeur autorisée par le résultat de la première question :

$$\tan(2 \times \frac{\pi}{8}) = \frac{2\tan(\frac{\pi}{8})}{1 - \tan^2(\frac{\pi}{8})} \Leftrightarrow 1 = \frac{2\tan(\frac{\pi}{8})}{1 - \tan^2(\frac{\pi}{8})}$$

ce qui montre que $\tan(\frac{\pi}{8})$ est solution de $1 = 2X/(1 - X^2)$. De même, prenons $\theta = 5\pi/8$, valeur autorisée par le résultat de la question précédente et on a :

$$\tan(2 \times \frac{5\pi}{8}) = \frac{2\tan(\frac{5\pi}{8})}{1 - \tan^2(\frac{5\pi}{8})} \Leftrightarrow \tan(\pi + \frac{\pi}{4}) = \frac{2\tan(\frac{5\pi}{8})}{1 - \tan^2(\frac{5\pi}{8})}$$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{2\tan(\frac{5\pi}{8})}{1 - \tan^2(\frac{5\pi}{8})}$$

par π périodicité de $\tan$.
Cela montre que $\tan(\frac{5\pi}{8})$ est solution de $1 = 2X/(1 - X^2)$.

(Q d)

$$1 = 2X/(1 - X^2) \Leftrightarrow 1 - X^2 = 2X \text{ et } X \neq \pm 1 \Leftrightarrow X = -1 \pm \sqrt{2}$$

On remarque que $\tan(\pi/8) > 0$ et ainsi $\boxed{\tan(\pi/8) = \sqrt{2} - 1}$ et que $\tan(5\pi/8) < 0$ et ainsi que $\tan(5\pi/8) = -\sqrt{2} - 1$.

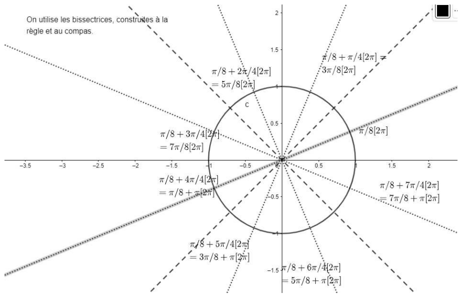
(Q e) On peut utiliser que $\frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$. Ainsi

$$\tan(\frac{3\pi}{8}) = \tan(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}) = \frac{1}{\tan(\pi/8)} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1.$$

De même, $\frac{7\pi}{8} = \pi - \frac{\pi}{8}$. Ainsi,

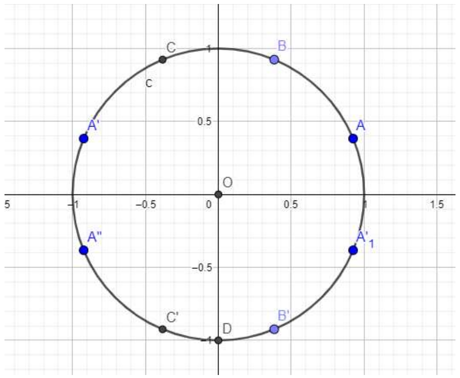
$$\tan(\frac{7\pi}{8}) = \tan(\pi - \frac{\pi}{8}) = -\tan(\pi/8) = -\sqrt{2} + 1.$$

(Q f)



(Q 2) **Une formule pour la suite.**

(Q a) Le nombre $\tan(\theta)$ a un sens si et seulement si $\theta \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$ Le nombre $\tan(4\theta)$ a un sens si et seulement si $4\theta \neq \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \theta \neq \frac{\pi}{8}[\frac{\pi}{4}]$.



(Q b)

$$\tan(4\theta) = \frac{2\tan(2\theta)}{1-\tan^2(2\theta)} = \frac{2 \times \frac{2\tan(\theta)}{1-\tan^2(\theta)}}{1-\left(\frac{2\tan(\theta)}{1-\tan^2(\theta)}\right)^2} = \frac{4\tan(\theta)\Big(1-\tan^2(\theta)\Big)}{\tan^4(\theta)-6\tan^2(\theta)+1}$$

(Q 3) (Q a) On connait $\tan(0) = 0 < \tan(\alpha) = \frac{1}{5} \leq \tan(\pi/8)$. Or la fonction $\tan$ est strictement croissante sur $[0;\pi/2[$. Ainsi

$$0 < \alpha < \pi/8.$$

Il en est de même de β.

(Q b) Partons de

$$\begin{cases} 0 < & 4\alpha & < \pi/2 \\ -\pi/8 < & -\beta & < 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{-\pi/8 < 4\alpha - \beta < \pi/2}$$

(Q c) 4α est un angle entre 0 et $\pi/2$ strictement. On peut donc calculer sa tangente et

$$\tan(4\alpha) = \frac{4\tan(\alpha)\Big(1-\tan^2(\alpha)\Big)}{\tan^4(\alpha)-6\tan^2(\alpha)+1} = \frac{4 \times \frac{1}{5} \times \frac{24}{25}}{\frac{1}{25\times 25} - \frac{6}{25} + 1} = \frac{120}{119}$$

(Q d) On peut donc calculer ce nombre et

$$\begin{aligned} \tan(4\alpha-\beta) &= \tfrac{\tan(4\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(4\alpha)\tan(\beta)} = \tfrac{\frac{120}{119}-\frac{1}{239}}{1+\frac{1}{239}\times\frac{120}{119}} \\ &= \tfrac{120\times 239-119}{119\times 239+120} = \boxed{1} \end{aligned}$$

(Q e) On sait que $4\alpha-\beta$ est un angle entre 0 et $\pi/2$ strictement et que sa tangente est égale à 1. Or $\pi/4$ réalise ces deux mêmes propriétés. Par conséquent, $4\alpha-\beta = \frac{\pi}{4}[\pi]$ et ainsi $\boxed{4\alpha-\beta = \pi/4}$.

⋆ ⋆ ⋆
FIN
⋆ ⋆ ⋆