À rendre le mardi 03 Octobre

Devoir en temps libre n$^{\text{o}}$ 1

EXERCICE 1

Simplifier l'expression suivante :

$$\frac{\sin(2x)+\sin(4x)+\sin(6x)}{1+\cos(2x)+\cos(4x)}.$$

EXERCICE 2

On considère l'équation : (E) $\tan^2(3x)-2\sqrt{2}\tan(3x)+1=0$.

1. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles l'équation ci-dessus est définie.
2. Résoudre l'équation $X^2-2\sqrt{2}X+1=0$.
3. Donner l'epxression de $\tan(2x)$ en fonction de $\tan(x)$ et en déduire $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
4. Exprimer très simplement $\frac{3\pi}{8}$ en fonction de $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{8}$ et en déduire $\tan\left(\frac{3\pi}{8}\right)$.
5. Résoudre l'équation (E).

Correction de l'exercice 1:

- Au dénominateur : comme $\cos(4x) = 2\cos^2(2x) - 1$ on en déduit : $1 + \cos(2x) + \cos(4x) = \cos(2x)(2\cos(2x) + 1)$.
- Au dénominateur, nous avons $\sin(2x) + \sin(6x) = 2\sin\left(\frac{2x+6x}{2}\right)\cos\left(\frac{2x-6x}{2}\right) = 2\sin(4x)\cos(2x)$ par parité de $\cos$.

Ainsi, $\sin(2x) + \sin(4x) + \sin(6x) = \sin(4x)(2\cos(2x) + 1)$.

En faisant le quotient, nous avons une simplification par $2\cos(2x) + 1$ qui nous mène à l'expression : $\dfrac{\sin(4x)}{\cos(2x)} = \dfrac{2\sin(2x)\cos(2x)}{\cos(2x)} = 2\sin(2x)$. Au final : $\boxed{\dfrac{\sin(2x) + \sin(4x) + \sin(6x)}{1 + \cos(2x) + \cos(4x)} = 2\sin(2x).}$

Correction de l'exercice 2:

1. L'équation n'est pas définie lorsque $\tan(3x)$ n'existe pas, c'est à dire si et seulement si $\cos(3x) = 0 \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$. Ainsi, $\boxed{\text{l'équation est définie pour } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{6}\ \left[\frac{\pi}{3}\right]\right\}.}$
2. On calcule le discriminant $\Delta = (2\sqrt{2})^2 - 4 = 4$. Puisque $\Delta > 0$, nous avons deux racines distinctes : $\begin{array}{lll} x_1 = \frac{2\sqrt{2}+2}{2} & \text{ou} & x_2 = \frac{2\sqrt{2}-2}{2} \\ x_1 = 1 + \sqrt{2} & \text{ou} & x_2 = -1 + \sqrt{2}. \end{array}$.
   Ainsi : $\boxed{S = \{x_1;\ x_2\}.}$
3. (a) $\boxed{\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}}$, cf. cours pour la démonstration.

   (b) Avec $a = b = x$, la formule précédente donne : $\boxed{\tan(2x) = \dfrac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}.}$ Cette relation donne, pour $x = \frac{\pi}{8}$:

$$1 = \tan(\pi/4) = \frac{2\tan(\pi/8)}{1 - \tan^2(\pi/8)} \quad \Leftrightarrow 1 - \tan^2(\pi/8) = 2\tan(\pi/8)$$
$$\Leftrightarrow \tan^2(\pi/8) + 2\tan(\pi/8) - 1 = 0.$$

Ainsi, $\tan(\pi/8)$ est solution de l'équation : $x^2 + 2x - 1 = 0$. C'est un trinôme : on calcule le discriminant : $\Delta = 8$. Puisque $\Delta > 0$, nous avons deux racines distinctes :

$$\begin{array}{lll} x_1 = \frac{-2+\sqrt{8}}{2} & \text{ou} & x_2 = \frac{-2-\sqrt{8}}{2} \\ x_1 = -1 + \sqrt{2} & \text{ou} & x_2 = -1 - \sqrt{2}. \end{array}$$

Comme $\frac{\pi}{8} \in \left]0;\ \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan(\pi/8) > 0$. On en déduit : $\boxed{\tan(\pi/8) = -1 + \sqrt{2}.}$

4. Nous avons $\boxed{\frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}}$, donc :

$$\begin{aligned} \tan(3\pi/8) &= \frac{\sin(3\pi/8)}{\cos(3\pi/8)} \\ &= \frac{\sin(\pi/2 - \pi/8)}{\cos(\pi/2 - \pi/8)} \\ &= \frac{\cos(\pi/8)}{\sin(\pi/8)} \\ &= \frac{1}{\tan(\pi/8)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \\ &= \frac{\sqrt{2} + 1}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} \\ &= 1 + \sqrt{2}. \end{aligned}$$

   Ainsi : $\boxed{\tan(3\pi/8) = 1 + \sqrt{2}.}$

5. Posons : $X = \tan(3x)$. L'équation devient alors : $X^2 - 2\sqrt{2}X + 1 = 0$. Cette équation a déjà été résolue en 2. : nous avons deux solutions : $-1 + \sqrt{2} = \tan(\pi/8)$

d'après 3. et $1+\sqrt{2}=\tan(3\pi/8)$ d'après la question précédente. On en déduit

$$\begin{aligned}\tan^2(3x)-2\sqrt{2}\tan(3x)+1=0 \quad &\Leftrightarrow \tan(3x)=\tan(\pi/8) \text{ ou } \tan(3x)=\tan(3\pi/8)\\ &\Leftrightarrow 3x=\tfrac{\pi}{8}\ [\pi] \text{ ou } 3x=\tfrac{3\pi}{8}\ [\pi]\\ &\Leftrightarrow x=\tfrac{\pi}{24}\ \left[\tfrac{\pi}{3}\right] \text{ ou } x=\tfrac{\pi}{8}\ \left[\tfrac{\pi}{3}\right].\end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{S=\left\{\frac{\pi}{8}\ \left[\frac{\pi}{3}\right];\ \frac{\pi}{24}\ \left[\frac{\pi}{3}\right]\right\}.}$

⋆ ⋆ ⋆
FIN
⋆ ⋆ ⋆