PROGRAMME DE COLLES 18

L'examinateur pourra choisir une question de cours et/ou un (ou une partie de) exercice parmi les exercices des fiches méthodes (cf. ci-après)

Questions de cours

1. Définition et propriétés du déterminant de trois vecteurs. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non colinéaires. Montrer que si $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = 0$, alors $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires,
2. Définition et propriétés du produit vectoriel de deux vecteurs dans l'espace. Énoncer et démontrer l'expression du produit vectoriel en base orthonormale directe.
3. Énoncer et démontrer la formule du calcul de la distance d'un point à une droite. Appliquer la formule dans une situation proposée par l'examinateur.
4. Intersection d'une sphère et d'un plan : énoncé de la proposition avec illustrations graphiques.
5. Énoncé de :
   - la relation de divisibilité ;
   - la propriété de division euclidienne.

   Montrer que le reste de la division euclidienne de P par $X - \alpha$ est $P(\alpha)$.
6. Définition de racines multiples et caractérisation pratique. Montrer que si $P(\alpha) = \ldots = \ldots P^{(k-1)}(\alpha) = 0$, $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$, alors α est racine de P de multiplicité k.
7. Montrer que si $\alpha \in \mathbb{C}$ est racine d'un polynôme à coefficient réel alors $\overline{\alpha}$ également.
8. Énoncé des relations coefficients/racines et démonstration des relations pour $n = 3$.

Thèmes de la colle

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE :

— Vecteurs de l'espace : vecteurs coplanaires, base de l'espace, équivalence entre vecteurs non coplanaires et bases de l'espace ;

— Produit scalaire de deux vecteurs : définition, propriétés, expression en base orthonormale ;

— Produit vectoriel de deux vecteurs : définition, produit vectoriel et vecteurs colinéaires, propriétés vérifiées par le produit vectoriel, expression en base orthonormale directe, application au calcul d'aires de triangles et de parallélogrammes ;

— Déterminant de trois vecteurs : défininition, déterminant et bases de l'espace, déterminant et bases directes, propriétés vérifiées par le déterminant, expression en base orthonormale directe, application au calcul de volumes ;

— Plans de l'espace : équation cartésienne, représentation paramétrique, distance d'un point à un plan, intersection de deux plans ;

— Sphères de l'espace : équation cartésienne, intersection d'une sphère et d'un plan ;

— Droites de l'espace : représentation cartésienne, représentation paramétrique, distance d'un point à une droite, intersection d'une sphère et d'une droite.

Les exercices du jour

Exercice 1: Déterminer les coordonnées cylindriques du point de coordonnées cartésiennes $(1;\ -1;\ 2)$.

Exercice 2: Calculer $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ avec $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$, puis déterminer une base ortho**normale** directe à l'aide de ces vecteurs.

Exercice 3: En notant $A(1;\ 0;\ 1)$ et $B(0;\ 1;\ 2)$, calculer l'aire du triangle OAB.

Exercice 4: Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par le point de coordonnées $(1;\ 1;\ 1)$ et de vecteur orthogonal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \neq \overrightarrow{0}$.

Exercice 5: Déterminer une équation paramétrique du plan d'équation cartésienne : $x + 2y + 3z - 1 = 0$.

Exercice 6: Déterminer une représentation cartésienne de la droite passant par $A(1;\ 1;\ 1)$ et orthogonale aux vecteurs $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

Exercice 7: Déterminer une représentation paramétrique de la droite de représentation cartésienne : $\begin{cases} x + z + 1 = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$.

Exercice 8: Montrer que l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que : $x^2 - 4x + y^2 + 6y + z^2 - 2z - 23 = 0$ est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 9: Déterminer l'intersection de la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ avec la droite (AB), où $A(1;\ 0;\ 1)$ et $B(0;\ 1;\ 0)$.

Exercice 10: Montrer que l'ensemble de représentation cartésienne : $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 11: Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tels que : $P^2 = \frac{1}{2}X^3P'$. On note $p = \deg(P)$.

1. Exprimer $\deg(P^2)$ et $\deg\left(\frac{1}{2}X^3P'\right)$ en fonction de p.
2. En déduire les valeurs possibles de p puis la forme de P.
3. Étudier la réciproque.